УДК 515.12

С.П. Гулько, Е.И. Окулова

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПОНЯТИЯ *t*-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В работе определяется и исследуется новый супертопологический инвариант – t_0-эквивалентность. Доказано, что t_0-эквивалентность следует из обычной t- эквивалентности, и исследованы некоторые ее свойства.

Напомним [1], что топологические пространства X и Y называются t-эквивалентными, если гомеоморфны пространства всех непрерывных вещественных функций $C_p(X)$ и $C_p(Y)$, наделенных топологией поточечной сходимости. Введем новый тип эквивалентности между пространствами, который связан с изменением топологии на пространстве непрерывных функций. Пусть X – произвольное тихоновское пространство. На множестве всех непрерывных функций $C(X)$ рассмотрим новую топологию τ_0, в которой окрестностями нуля являются те же множества, что и в $C_p(X)$, т.е. множества вида: $U(0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{g \in C(X); |g(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1,\ldots,n\}$, а для всякой ненулевой функции f окрестностями объявляются всевозможные множества вида: $U(f, x_1,\ldots,x_n) = \{g \in C(X); g(x_i) = f(x_i), i = 1,\ldots,n\}$. Обозначим пространство $(C(X),\tau_0)$ через $C_{p_0}(X)$ и пространства X и Y будем называть t_0-эквивалентными (и писать $X \overset{t_0}{\sim} Y$), если пространства $C_{p_0}(X)$ и $C_{p_0}(Y)$ гомеоморфны между собой. Очевидны следующие факты.

1. Топология τ_0 сильнее топологии поточечной сходимости.

2. Из t-эквивалентности следует t_0-эквивалентность.

3. Топология τ_0 нульмерна (т.е. она имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых подмножеств).

Из последнего утверждения сразу следует, что

4. Топология τ_0 является тихоновской топологией.

5. Операция сложения $(f,g) \mapsto f+g$ непрерывна в точках, в которых каждая координата есть ненулевая функция, а также в точках с нулевой суммой, в оставшихся случаях она разрывна.

6. Операция умножения на скаляры $(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$ непрерывна только в тех точках, в которых или $\lambda = 0$, или $f = 0$.

7. Мощность $|X|$ равна характеру $\chi\left(C_{p_0}(X)\right)$.

8. Плотность $d(X)$ равна псевдохарактеру пространства $C_{p_0}(X)$.

Перейдем теперь к обсуждению менее тривиальных фактов. Как известно, теорема Архангельского – Пыткеева [1] утверждает, что пространство $C_p(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда для каждого $n \in N$ число Линделефа $l(X^n)$ счетно. Так как в нулевой точке топология не была изменена, $t(C_{p_0}(X), 0) \le \aleph_0$ для любого такого пространства X. Теснота же в любой ненулевой точке пространства $C_{p_0}(X)$ уже является несчетной в том случае, когда X несчетно. В самом деле, рассмотрим функцию **1**, тождественную равную единицу, и множество A всех непрерывных функций, которые лишь в конечном числе точек равны **1**. Тогда **1** – предельная точка для A и она не будет таковой ни для какого счетного подмножества в A. Таким образом, введенное нами пространство имеет счетную тесноту достаточно редко. Приведенное рассуждение показывает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Пространство $C_{p_0}(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда X счетно. □

В статье [2] Р.Коти доказал, что сильно бесконечномерное метризуемое компактное пространство не может быть t-эквивалентным конечномерному метризуемому компакту. Анализ доказательства показал, что его рассуждение можно обобщить на случай t_0-эквивалентности. Более того, именно данное наблюдение (что рассуждение Р. Коти привязано к одной только нулевой точке в пространстве непрерывных функций) и послужило причиной введения нами понятия t_0-эквивалентности.

Теорема 2. *Пусть X и Y – метризуемые компакты и существует непрерывное открытое отображение пространства $C_{p_0}(X)$ на $C_{p_0}(Y)$. Пусть, далее, для некоторого натурального числа k пространство X^k является сильно бесконечномерным. Тогда существует натуральное число p, для которого пространство Y^p также сильно бесконечномерно.*

Доказательство. Все рассуждения статьи [2] остаются в силе и для топологии τ_0 и повторяются дословно, за исключением, возможно, леммы 3. Но доказательство этой леммы легко получить и в данной ситуации, если по-новому определить $R(f,B)$ как множество $\{g \in C_{p_0}(X);\ g(y) = f(y),\ \forall y \in B\}$ и после этого сделать очевидные изменения в доказательстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
2. *Cauty R.* Sur l'invariance de la dimension infinie forte par *t*-equivalence // Fund. Math. 1999. V. 160. P. 95–100.

Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 9 июня 2003 г.