УДК 512.55

Е.Ю. Каравдина

ПОСТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА КОЛЬЦА ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ ПОРЯДКА n ($n \geq 2$)

Определяются кольца обобщенных матриц порядка n.

В теории колец важную роль играют различные кольца матриц. Среди них выделяются кольца обобщенных матриц произвольного порядка n. Работ, в которых бы специально изучались кольца обобщенных матриц порядка n, большего двух, по-видимому, нет. Однако кольца обобщенных матриц порядка 2 можно встретить в ряде изданий научной литературы [1,2]. Это подтверждает несомненную пользу изучения таких колец. Они появляются в самых разнообразных ситуациях. Кольца обобщенных матриц порядка 2 появляются при рассмотрении морита-контекстов или ситуаций предэквивалентности [3,4]. Эти кольца получили также интересные применения при исследовании абелевых групп как модулей над кольцами эндоморфизмов [5].

В настоящей статье дано построение колец обобщенных матриц произвольного порядка n ($n \geq 2$), установлены связи этих колец с кольцами эндоморфизмов модулей и с абстрактными кольцами. Также показано, что кольцо обобщенных матриц порядка n ($n>2$) изоморфно некоторому кольцу обобщенных матриц порядка k для всякого k, где $2 \leq k \leq n-1$.

Все рассматриваемые в работе кольца – ассоциативные с единицей, модули – унитарные. Введем следующие обозначения. Пусть A и B – R-модули. Тогда $\mathrm{End}_R(A)$ – кольцо эндоморфизмов R-модуля A, $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ – группа гомоморфизмов из A в B. Прямую сумму и тензорное произведение модулей обозначаем символами $\oplus$ и $\otimes$ соответственно. Наконец, $Z(R)$ – центр кольца R.

Перейдем к основному содержанию работы. Для любого натурального числа n ($n \geq 2$) определим кольцо определенных матриц порядка n. Назовем его кольцом обобщенных матриц (порядка n). Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – кольца, M_{ij} – R_i-R_j-бимодуль ($i, j = 1,\ldots,n$), причем $M_{ii}=R_i$ для $i=1,\ldots,n$. Обозначим через K множество матриц (a_{ij}) порядка n, где $a_{ij} \in M_{ij}$ ($i, j=1,\ldots,n$). Относительно обычного сложения матриц K образует абелеву группу. Определим операцию умножения матриц. Предположим, что для любых $i,k,j=1,\ldots,n$ имеется отображение $\varphi_{ikj}: M_{ik} \times M_{kj} \to M_{ij}$. Считаем, что φ_{iij} и φ_{ikk} совпадают с модульными умножениями $R_i \times M_{ij} \to M_{ij}$ и $M_{ik} \times R_k \to M_{ik}$ соответственно (напомним, что $R_i=M_{ii}$ при всех i). Пишем $\varphi_{ikj}(a,b)=ab$ для любых $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$. Теперь для $(a_{ij}),(b_{ij}) \in K$ полагаем $(a_{ij})(b_{ij})=(c_{ij})$, где $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ ($a_{ik} \in M_{ik}$, $b_{kj} \in M_{kj}$).

Лемма 1. *Множество K является кольцом относительно введенных операций сложения и умножения матриц тогда и только тогда , когда для каждых i, k, j ($i,k,j= 1,\ldots,n$) отображения φ_{ikj} билинейны и «ассоциативны» в следующем смысле: $a(bc)=(ab)c$ для любых $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$, $c \in M_{jl}$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, $\langle K, + \rangle$ – абелева группа. Непосредственными вычислениями проверяется, что ассоциативность умножения в K эквивалентна ассоциативности всех отображений φ_{ikj} , а законы дистрибутивности эквивалентны билинейности всех φ_{ikj} . Билинейность φ_{ikj} подразумевает справедливость равенств

$$\varphi_{ikj}(a, b+c) = \varphi_{ikj}(a, b) + \varphi_{ikj}(a, c)$$

и $$\varphi_{ikj}(a+b, c) = \varphi_{ikj}(a, c) + \varphi_{ikj}(b, c)$$

для всех элементов a, b, c соответствующих бимодулей. Лемма доказана.

Напомним, что отображение $\varphi_{ikj}: M_{ik} \times M_{kj} \to M_{ij}$ называется сбалансированным (над R_k), если оно билинейно и $\varphi_{ikj}(ar, b) = \varphi_{ikj}(a, rb)$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$, $r \in R_k$.

Хорошо известно, что сбалансированное отображение φ_{ikj} индуцирует гомоморфизм абелевых групп $\overline{\varphi}_{ikj}: M_{ik} \otimes_{R_k} M_{kj} \to M_{ij}$, такой, что $\overline{\varphi}_{ikj}(a \otimes b)=\varphi_{ikj}(a,b)$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$ [3]. Наоборот, имея такой гомоморфизм $\overline{\varphi}_{ikj}$, с помощью записанного равенства можно получить сбалансированное отображение φ_{ikj} .

Удобнее иметь дело с гомоморфизмами $\overline{\varphi}_{ikj}$, а не с отображениями φ_{ikj}, поэтому переформулируем лемму 1 в других терминах. Допустим, что для любых $i, k, j=1,\ldots,n$, таких, что $i \neq k$ и $k \neq j$, дан гомоморфизм $\overline{\varphi}_{ikj}: M_{ik} \otimes_{R_k} M_{kj} \to M_{ij}$ абелевых групп. Для $i = k$ и $k = j$ считаем, что $\overline{\varphi}_{iij}$ и $\overline{\varphi}_{ijj}$ – это соответствующие канонические изоморфизмы $R_i \otimes_{R_i} M_{ij} \to M_{ij}$ и $M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \to M_{ij}$. Полагая $\varphi_{ikj}(a,b)=\overline{\varphi}_{ikj}(a \otimes b)$ ($a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$) , получаем сбалансированное отображение $M_{ik} \times M_{kj} \to M_{ij}$ для всех i, k, j. Пишем $\varphi_{ikj}(a,b)=ab$. С помощью φ_{ikj} , как и выше, определяем умножение в K.

Лемма 2. *Множество K является кольцом относительно введенных операций сложения и умножения тогда и только тогда , когда для каждых i, k, j, l ($i, k, j, l=1,\ldots,n$; $i \neq k$, $k \neq j$, $j \neq l$) гомоморфизм $\overline{\varphi}_{ikj}$ является R_i-R_j-бимодульным и $a(bc)=(ab)c$ для любых $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$ и $c \in M_{jl}$.*

Доказательство. Уточним, что $\overline{\varphi}_{ikj}(a \otimes b) = \varphi_{ikj}(a,b) = ab$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$ ($i, k, j=1,\ldots,n$).

Необходимость. Пусть K – кольцо. По лемме 1 имеем $a(bc) = (ab)c$ ($a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$, $c \in M_{jl}$, $i, k, j, l = 1,\ldots,n$). R_i-R_j-бимодульность гомоморфизма $\overline{\varphi}_{ikj}$ означает, что $\overline{\varphi}_{ikj}(r(a \otimes b))=r\overline{\varphi}_{ikj}(a \otimes b)$ и $\overline{\varphi}_{ikj}((a \otimes b)s)= = \overline{\varphi}_{ikj}(a \otimes b)s$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$, $r \in R_i$, $s \in R_j$.

Но $\bar{\varphi}_{ikj}(r(a\otimes b)) = \bar{\varphi}_{ikj}(ra\otimes b) = \varphi_{ikj}(ra,b) = (ra)b = r(ab) = r\varphi_{ikj}(a,b) = r\bar{\varphi}_{ikj}(a\otimes b)$. Аналогично доказывается равенство $\bar{\varphi}_{ikj}((a\otimes b)s) = \bar{\varphi}_{ikj}(a\otimes b)s$.

Достаточность. Для всех $i, k, j, l=1,\ldots,n$, таких, что $i\neq k$, $k\neq j$ и $j\neq l$, получаем, что отображения φ_{ikj} билинейны и $a(bc)=(ab)c$ для любых $a\in M_{ik}$, $b\in M_{kj}$, $c\in M_{jl}$. При $i=k$ или $k=j$ билинейность φ_{ikj} следует из того, что M_{ij} – R_i-R_j-бимодуль. Действительно, при $i=k$ имеем модульное умножение $\varphi_{iij}: R_i\times M_{ij}\to M_{ij}$. Так как $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$ и $(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$ для любых $r,r_1,r_2\in R_i$ и $m,m_1,m_2\in M_{ij}$, то φ_{iij} билинейно. Если $k=j$, то имеем модульное умножение $\varphi_{ikk}: M_{ik}\times R_k\to M_{ik}$ и билинейность φ_{ikk} получается ввиду того, что M_{ik} – R_i-R_k-бимодуль.

Почему $a(bc)=(ab)c$, если $i=k$, или $k=j$, или $j=l$? Прежде заметим, что при $i=k$ или $k=j$ гомоморфизмы $\bar{\varphi}_{ikj}$ являются R_i-R_j-бимодульными. Если $i=k$, то нужно убедиться, что $r(bc)=(rb)c$, где $r\in R_i$, $b\in M_{ij}$, $c\in M_{jl}$. Имеем $r(bc)=r\bar{\varphi}_{ijl}(b\otimes c)=\bar{\varphi}_{ijl}(rb\otimes c)=(rb)c$, поскольку φ_{ijl} – гомоморфизм R_i-бимодулей. Аналогично для $j=l$.

Пусть $k=j$. Убедимся, что $a(rc)=(ar)c$, где $a\in M_{ik}$, $r\in R_k$, $c\in M_{kl}$. Можно записать $a(rc)=\bar{\varphi}_{ikl}(a\otimes rc)=$ $=\bar{\varphi}_{ikl}(ar\otimes c)=(ar)c$ по свойству тензорного произведения.

Все условия леммы 1 выполняются. Следовательно, K – кольцо. Лемма доказана.

Построенное кольцо K будем называть *кольцом обобщенных* или *формальных матриц порядка n* или просто кольцом матриц порядка n. Гомоморфизмы $\bar{\varphi}_{ikj}$ будем обозначать как φ_{ikj}. Отметим одно важное обстоятельство, касающееся определения кольца K. Вполне очевидно, что, беря другой набор гомоморфизмов φ_{ikj} из леммы 2, мы получим другое кольцо K. Таким образом, возникает проблема классификации колец обобщенных матриц, то есть проблема нахождения условий изоморфизма двух колец обобщенных матриц, построенных по разным наборам гомоморфизмов φ_{ikj}.

Всегда есть «тривиальное» кольцо, соответствующее случаю, когда $\varphi_{ikj}=0$ для всех i, k, j, таких, что $i\neq k$ и $k\neq j$. Представляют интерес различные кольца треугольных матриц. А именно, если $M_{ij}=0$ для всех $i>j$, то получаем кольцо всех верхних треугольных матриц. При $M_{ij}=0$ для всех $i<j$ имеем кольцо всех нижних треугольных матриц.

Детализируем построение наиболее часто встречающихся колец обобщенных матриц порядка 2. Пусть R и S – кольца, M – R-S-бимодуль, N – S-R-бимодуль. Допустим, что существуют бимодульные гомоморфизмы φ: $M\otimes_S N\to R$ и ψ: $N\otimes_R M\to S$, удовлетворяющие условиям ассоциативности $(m,n)m' = m[n,m']$ и $[n,m]n'=n(m,n')$ для всех $m,m'\in M$, $n,n'\in N$. Здесь мы полагаем $(m,n) = \varphi(m\otimes n)$ и $[n,m]=\psi(n\otimes m)$ $(m\in M,\ n\in N)$.

Пусть $K=\begin{pmatrix} R & M\\ N & S\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}\middle| r\in R, s\in S, m\in M, n\in N\right\}.$

Определим сложение матриц из K покомпонентно и умножение как

$$\begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & m'\\ n' & s'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} rr'+(m,n') & rm'+ms'\\ nr'+sn' & [n,m']+ss'\end{pmatrix}.$$

Таким путем K становится кольцом обобщенных матриц порядка 2. Если нужно подчеркнуть, что кольцо K построено с помощью φ и ψ, то пишем $K(\varphi,\psi)$.

Имеем также два кольца треугольных обобщенных матриц $\begin{pmatrix} R & M\\ 0 & S\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} R & 0\\ N & S\end{pmatrix}$, называемых еще идеализациями бимодулей M и N соответственно [3]. Для построения этих колец гомоморфизмы φ и ψ не нужны.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между кольцами обобщенных матриц порядка 2 и контекстами Мориты [3, 4].

Для колец обобщенных матриц порядка 2 вопрос о классификации формулируется следующим образом. Даны кольца R и S, R-S-бимодуль M, S-R-бимодуль N и бимодульные гомоморфизмы φ_1,φ_2: $M\otimes_S N\to R$, ψ_1,ψ_2: $N\otimes_R M\to S$, причем выполняются законы ассоциативности для φ_1,ψ_1 и φ_2,ψ_2. Имеем два кольца $\begin{pmatrix} R & M\\ N & S\end{pmatrix}$ обобщенных матриц порядка 2: $K_1=K(\varphi_1,\psi_1)$ и $K_2=K(\varphi_2,\psi_2)$. Как должны быть связаны бимодульные гомоморфизмы φ_1,ψ_1 и φ_2,ψ_2, чтобы $K_1\cong K_2$?

Отметим интересный случай, встречающийся при изучении колец обобщенных матриц. Возьмем два кольца R, R и два бимодуля ${}_RR_R$ и ${}_RR_R$. Имеем обычное кольцо матриц $\begin{pmatrix} R & R\\ R & R\end{pmatrix}$. Обозначим его через K_1. Ему соответствует два (одинаковых) R-R-бимодульных «обычных» умножения ω: $R\otimes_R R\to R$, $x\otimes y\to xy$. Более того, ω – изоморфизм.

Во-первых, заметим, что всякий R-R-бимодульный эндоморфизм бимодуля R есть умножение кольца R на некоторый центральный элемент. Действительно, пусть $\alpha\in \mathrm{End}_R({}_RR_R)$. С одной стороны, отображение α есть $\alpha: R_R\to R_R$. Хорошо известно, что такой эндоморфизм есть левое умножение, то есть существует элемент $s\in R$ такой, что $\alpha(x)=sx$ для всех $x\in R_R$. С другой стороны, отображение α есть $\alpha: {}_RR\to {}_RR$. Эндоморфизмы из $\mathrm{End}_R({}_RR)$ есть в точности все правые умножения кольца R. Следовательно, существует элемент $t\in R$, такой, что $\alpha(x)=xt$ для всех $x\in {}_RR$. Имеем $\alpha(x)=sx=xt$. При $x=1$ получаем равенство $s=t$, отсюда $sx=xs$. Следовательно, s является центральным элементом кольца R, $s\in Z(R)$. Более точно, существует кольцевой изоморфизм $\mathrm{End}_R({}_RR_R)\cong Z(R)$.

Рассмотрим теперь некоторый R-R-бимодульный гомоморфизм $\varphi: R\otimes_R R\to R$. Имеем $\varphi=\alpha\omega$, где $\alpha\in \mathrm{End}_R({}_RR_R)$. Следовательно, найдется такой элемент $s\in Z(R)$, что $\alpha(x)=sx$ для любого $x\in R$. Тогда $\varphi(x\otimes y) =$ $= (\alpha\omega)(x\otimes y)=\alpha\omega(x\otimes y)=\alpha(xy)=sxy$.

Предположим теперь, что есть еще одно кольцо обобщенных матриц $K(\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} R & R\\ R & R\end{pmatrix}$. Значит, имеем R-R-бимодульные гомоморфизмы $\varphi,\psi: R\otimes_R R\to R$, удовлетворяющие двум законам ассоциативности: $\varphi(x\otimes y)z=x\psi(y\otimes z)$ и $\psi(x\otimes y)z=x\varphi(y\otimes z)$ (лемма 2). Тогда существуют элементы $s,t\in Z(R)$, такие, что $\varphi(x\otimes y)=sxy$ и $\psi(x\otimes y)=txy$ для любых $x,y\in R$. При $x=y=z=1$ получаем $\varphi(1\otimes 1)1=1\psi(1\otimes 1)$. Отсюда $s=t$, то есть центральные элементы для φ и ψ совпадают. Следовательно, и бимодульные гомоморфизмы φ и ψ будут совпадать, $\varphi=\psi$.

Итак, для каждого центрального элемента $s\in Z(R)$ получаем кольцо обобщенных матриц $K_s=\begin{pmatrix} R & R\\ R & R\end{pmatrix}$.

Сложение в K_s определяется как обычное сложение матриц. Операция умножения задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ z_1 & v_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ z_2 & v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1x_2+sy_1z_2 & x_1y_2+y_1v_2\\ z_1x_2+v_1z_2 & sz_1y_2+v_1v_2\end{pmatrix}.$$

При s=1 получаем, конечно, «обычное» кольцо матриц K_1.

Имеет место и обратное. Именно, любое кольцо $K(\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} R & R\\ R & R\end{pmatrix}$ имеет вид K_s для некоторого $s\in Z(R)$.

Так, «тривиальное» кольцо $\begin{pmatrix} R & R\\ R & R\end{pmatrix}$ (когда $\varphi=\psi$) получается при s=0.

Вопрос о классификации таких колец формулируется следующим образом. Если s и t – центральные элементы кольца R, то при каких условиях кольца обобщенных матриц K_s и K_t будут изоморфными?

Вернемся к рассмотрению колец обобщенных матриц произвольного порядка n $(n\geq 2)$. Рассмотрим связи этих колец с кольцами эндоморфизмов разложимых модулей и с абстрактными кольцами.

Предложение 1. *Класс колец обобщенных матриц порядка n $(n\geq 2)$ совпадает с классом колец эндоморфизмов разложимых модулей.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть K – произвольное кольцо обобщенных матриц порядка n, где $(n\geq 2)$. Имеем канонический изоморфизм $\mathrm{End}_K(K)\cong K$. Остается заметить, что K является прямой суммой «строк»:

$$K=\begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\oplus\dots$$

$$\dots\oplus\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n\end{pmatrix},$$

являющихся подмодулями модуля K_K.

Достаточность. Пусть A – произвольный разложимый правый модуль над некоторым кольцом R (в частности, абелева группа) и $A=\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, причем $A_i\neq 0$ для всех i. Тогда кольцо эндоморфизмов модуля A изоморфно кольцу всех матриц (α_{ji}) порядка n, где $\alpha_{ji}\in\mathrm{Hom}_R(A_i,A_j)$, то есть

$$\mathrm{End}_R(A)\cong$$

$$\cong\begin{pmatrix} \mathrm{End}_R(A_1) & \mathrm{Hom}_R(A_2,A_1) & \dots & \mathrm{Hom}_R(A_n,A_1)\\ \mathrm{Hom}_R(A_1,A_2) & \mathrm{End}_R(A_2) & \dots & \mathrm{Hom}_R(A_n,A_2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathrm{Hom}_R(A_1,A_n) & \mathrm{Hom}_R(A_2,A_n) & \dots & \mathrm{End}_R(A_n)\end{pmatrix}$$

Здесь $\mathrm{Hom}_R(A_i,A_j)$ является $\mathrm{End}_R(A_j)$-$\mathrm{End}_R(A_i)$-бимодулем. Отображение

$$\varphi_{ikj}:\mathrm{Hom}_R(A_k,A_i)\times\mathrm{Hom}_R(A_j,A_k)\to\mathrm{Hom}_R(A_j,A_i)$$

определяем как композицию. Условия из леммы 1 очевидно выполняются. Таким образом, кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_R(A)$ модуля $A=\bigoplus_{i=1}^{n}A_i$ с $A_i\neq 0$ для всех i является кольцом обобщенных матриц порядка n. Предложение доказано.

Предложение 2. *Кольцо K является кольцом обобщенных матриц порядка n $(n\geq 2)$ тогда и только тогда, когда в K существует полная ортогональная система из n идемпотентов.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть K – произвольное кольцо обобщенных матриц порядка n. Положим e_i $(i=1,\dots,n)$ – диагональные матричные единицы. Тогда $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ – полная ортогональная система идемпотентов кольца K, то есть $e_i^2=e_i$, $e_ie_j=0$ для любых i, j с $i\neq j$ и $\sum_{i=1}^{n}e_i=1$.

Достаточность. Пусть K – произвольное кольцо. Предположим, что в K существует полная ортогональная система идемпотентов $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$. Тогда $K=e_1K\oplus\dots\oplus e_nK=\bigoplus_{i=1}^{n}e_iK$. Отсюда

$$\mathrm{End}_K(K)\cong$$

$$\cong\begin{pmatrix} \mathrm{End}_K(e_1K) & \mathrm{Hom}_K(e_2K,e_1K) & \dots & \mathrm{Hom}_K(e_nK,e_1K)\\ \mathrm{Hom}_K(e_1K,e_2K) & \mathrm{End}_K(e_2K) & \dots & \mathrm{Hom}_K(e_nK,e_2K)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathrm{Hom}_K(e_1K,e_nK) & \mathrm{Hom}_K(e_2K,e_nK) & \dots & \mathrm{End}_K(e_nK)\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{End}_K(K)\cong K$ канонически. Рассмотрим теперь $\mathrm{Hom}_K(e_iK,e_jK)$ и $\mathrm{End}_K(e_iK)$. Существуют канонические изоморфизмы групп $\mathrm{Hom}_K(e_iK,e_jK)\cong e_jKe_i$ и колец $\mathrm{End}_K(e_iK)\cong e_iKe_i$ [6].

В результате получаем изоморфизм

$$K\cong\begin{pmatrix} e_1Ke_1 & e_1Ke_2 & \dots & e_1Ke_n\\ e_2Ke_1 & e_2Ke_2 & \dots & e_2Ke_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e_nKe_1 & e_nKe_2 & \dots & e_nKe_n\end{pmatrix}.$$

Этот изоморфизм можно установить и непосредственно, путем сопоставления

$$x\to\begin{pmatrix} e_1xe_1 & e_1xe_2 & \dots & e_1xe_n\\ e_2xe_1 & e_2xe_2 & \dots & e_2xe_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ e_nxe_1 & e_nxe_2 & \dots & e_nxe_n\end{pmatrix}\ \text{для всех } x\in K.$$

Здесь каждая группа e_iKe_j является e_iKe_i-e_jKe_j-бимодулем, а отображение $\varphi_{ikj}: e_iKe_j\times e_kKe_j\to e_iKe_j$

совпадает с умножением в кольце K (i, j, k=1,…,n). Тогда K является кольцом обобщенных матриц порядка n. Предложение доказано.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. *Кольцо обобщенных матриц порядка n, где $n>2$, изоморфно некоторому кольцу обобщенных матриц порядка k для всякого k=2,…,n–1.*

Доказательство. Пусть K – произвольное кольцо обобщенных матриц порядка n ($n>2$).

Возьмем k=2. Применяя предложение 1, получаем $K\cong \mathrm{End}_K(A)$, где $A=\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ – некоторый правый K-модуль, причем $A_i\neq 0$ для всех i. Обозначим через B прямую сумму $A_2\oplus\ldots\oplus A_n$. Тогда $A=A_1\oplus B$ и по предложению 1 $K\cong \mathrm{End}_K(A_1\oplus B)=\begin{pmatrix} R_1 & M_{12}\\ M_{21} & R_2\end{pmatrix}$, где $R_1=\mathrm{End}_K(A_1)$, $R_2=\mathrm{End}_K(B)$, $M_{12}=\mathrm{Hom}_K(B,A_1)$, $M_{21}=\mathrm{Hom}_K(A_1,B)$. Таким образом, матричное кольцо K изоморфно кольцу матриц порядка 2.

Данное утверждение можно доказать и непосредственно. Введем следующие обозначения. Положим $M_1=\left(M_{12},\ \ldots\ ,M_{1n}\right)$,

$$M_2=\begin{pmatrix} M_{21}\\ \vdots\\ M_{n1}\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \ldots & M_{2n}\\ M_{32} & R_3 & \ldots & M_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ M_{n2} & M_{n3} & \ldots & R_n\end{pmatrix}.$$

Здесь S – кольцо обобщенных матриц порядка n–1, M_1 – R_1-S-бимодуль, M_2 – S-R_1-бимодуль. Рассмотрим множество матриц $\begin{pmatrix} R_1 & M_1\\ M_2 & S\end{pmatrix}$. С помощью φ_{ikj}, задающих умножение в K, можно определить R_1-R_1-бимодульный гомоморфизм $\varphi{:}M_1\otimes_S M_2\to R_1$ и S-S-бимодульный гомоморфизм $\psi{:}M_2\otimes_{R_1} M_1\to S$ так, что будут справедливы два известных закона ассоциативности. Поэтому $\begin{pmatrix} R_1 & M_1\\ M_2 & S\end{pmatrix}$ является кольцом обобщенных матриц порядка 2 и $K\cong\begin{pmatrix} R_1 & M_1\\ M_2 & S\end{pmatrix}$. Этот изоморфизм получается путем разбиения каждой матрицы из K на четыре блока:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} \left(a_{11}\right) & \left(a_{12}\quad a_{13}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad a_{1n}\right)\\ \begin{pmatrix} a_{21}\\ \ldots\\ a_{n-1,1}\\ a_{n1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n}\\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} R_1 & M_1\\ M_2 & S\end{pmatrix}$ – кольцо блочных матриц по отношению к K. При сложении и умножении матриц из K соответствующие блочные матрицы складываются и умножаются как блочные матрицы. Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $k\in\left\{3,\ldots,n-1\ \right\}$. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rowen L.* Ring Theory, vol I. N.Y.: Academic Press, 1988.
2. *Müller M.* Rings of quotient of generalised matrix rings // Comm. Algebra. 1987. V.15. P. 1991–2015.
3. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории, том 1. М.: Мир, 1977.
4. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинев: Штиинца, 1983.
5. *Крылов П.А., Пахомова Е.Г.* Когда группа Hom(A,B) является инъективным $E(B)$-модулем?: Матем. заметки. 2003.
6. *Ламбек.* Кольца и модули. М.: Мир, 1971.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 30 апреля 2003 г.