УДК 517.54

С.А. Копанев, Л.С. Копанева

ФОРМУЛА ТИПА ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА ДЛЯ СЧЕТНОУГОЛЬНИКА

Получена формула для отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с помощью формулы типа формулы Шварца. Рассмотрены некоторые частные случаи.

Область *D* комплексной *w*-плоскости будем называть областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси, если $D = L(D)$, где $L(w) = w + 2\pi$. Каждая область *D* с симметрией переноса вдоль вещественной оси является неограниченной и конечной ($\infty \notin D$), а также либо односвязной, либо бесконечносвязной. Бесконечно удаленная точка может быть телом одного или многих простых концов границы области *D*. При преобразованиях $L(w) = w + 2\pi$ области *D* возможны только два варианта: в точке $w = \infty$ среди всех простых концов неподвижными могут быть либо один простой конец, либо два простых конца. В первом случае область *D* будем называть областью типа полуплоскости. Во втором случае область *D* будем называть областью типа полосы. Будут рассматриваться только односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси (см., например, [1]).

Пусть область *D* есть односвязная область типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси, граница которой состоит из отрезков прямых и лучей, причем при движении по границе от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ их должно быть конечное число. Будем такую область называть счетноугольником.

Пусть отображение *f* (существование такого отображения следует из теоремы Римана) переводит верхнюю полуплоскость в счетноугольник. Двигаясь по границе счетноугольника от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ в положительном направлении, обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, …, $A_n^{(0)}$, $A_n^{(0)} \neq A_1^{(0)} + 2\pi$, $n \in \mathbf{N}$, а углы счетноугольника обозначим соответственно через $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, …, $\alpha_n\pi$. Если $A_k^{(0)} \in \mathbf{C}$, то $0 < \alpha_k \le 2$, если же $A_k^{(0)} = \infty$, то $\alpha_k = 0$. Видно, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n$. Обозначим через $a_k^{(0)}$ прообраз $A_k^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, для отображения f. Без потери общности можно считать, что все $a_k^{(0)} \in (0, 2\pi)$ (см. рис. 1).

И.А.Александров в работе [2], используя принцип симметрии Римана – Шварца, получил формулу для отображения f

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^{z} G(\varsigma) \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \varsigma}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\varsigma + c_2 ,$$

где целое отображение G, постоянные $c_1, c_2, a_k^{(0)}$ подлежат определению из условий конкретной задачи.

В данной работе эта задача решается другим способом и при дополнительном условии, что $\lim\limits_{\mathrm{Im}\, z \Rightarrow +\infty} \left(f(z) - z \right) = 0$. Предел здесь равномерный относительно $\mathrm{Re}\, z$.

Вспомогательное отображение

$$g(z) = \ln f'(z) + z$$

есть голоморфное в верхней полуплоскости отображение с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемое на вещественную ось и удовлетворяющее условиям

$$g(z + 2\pi k) = g(z) + 2\pi k , \ k \in \mathbf{Z} ,$$

$$\lim_{\mathrm{Im}\, z \Rightarrow +\infty} \left(g(z) - z \right) = 0 .$$

Таким образом, отображение *g* удовлетворяет следующей теореме, доказанной в работе [3].

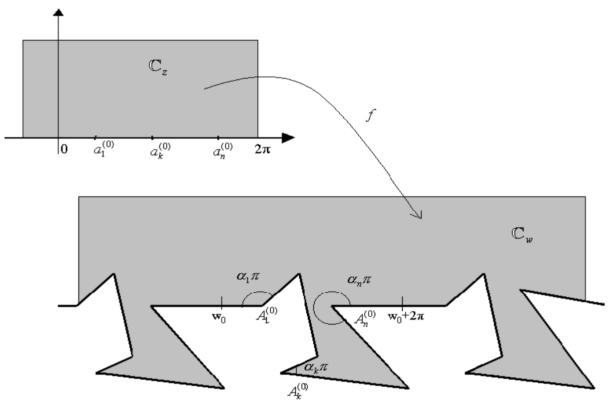

Рис. 1

Теорема 1. *Для голоморфного в верхней полуплоскости отображения h с симметрией переноса вдоль вещественной оси, непрерывно продолжаемого на вещественную ось и удовлетворяющего условиям*

$$h(z + 2\pi k) = h(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} ,$$

$$\lim_{\mathrm{Im}\, z \Rightarrow +\infty} \left(h(z) - z \right) = A, \quad A \in \mathbf{C}, \quad \mathrm{Im}\, z > 0 ,$$

справедлива формула (*типа формулы Шварца*)

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg} \frac{x - z}{2} \mathrm{Im}\, h(x) dx + z + \mathrm{Re}\, A .$$

Применяя эту формулу к отображению *g* и возвращаясь к отображению *f*, получим

$$\ln f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg} \frac{x - z}{2} \left(\arg f'(x) + \mathrm{Im}\, z \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ctg} \frac{x - z}{2} \arg f'(x) dx .$$

Исходя из геометрического смысла аргумента производной, запишем отображение

$$\arg f'(x)=\begin{cases} v_1, & 0<x<a_1^{(0)},\\ v_2, & a_1^{(0)}<x<a_2^{(0)},\\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ v_n, & a_{n-1}^{(0)}<x<a_n^{(0)},\\ v_1, & a_n^{(0)}<x<2\pi. \end{cases}$$

Возвращаясь к полученному выше интегральному виду $\ln f'(z)$, имеем

$$\ln f'(z)=\frac{v_1}{2\pi}\int\limits_0^{a_1^{(0)}}\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx+\frac{v_2}{2\pi}\int\limits_{a_1^{(0)}}^{a_2^{(0)}}\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx+\ldots$$

$$\ldots+\frac{v_n}{2\pi}\int\limits_{a_{n-1}^{(0)}}^{a_n^{(0)}}\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx+\frac{v_1}{2\pi}\int\limits_{a_n^{(0)}}^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx\,.$$

Интегрируя и переставляя соответствующим образом слагаемые, получаем

$$\ln f'(z)=\frac{v_1-v_2}{\pi}\ln\sin\frac{a_1^{(0)}-z}{2}+$$

$$+\frac{v_2-v_3}{\pi}\ln\sin\frac{a_2^{(0)}-z}{2}+\ldots+\frac{v_{n-1}-v_n}{\pi}\ln\sin\frac{a_{n-1}^{(0)}-z}{2}+$$

$$+\frac{v_n-v_1}{\pi}\ln\sin\frac{a_n^{(0)}-z}{2}+c\,.$$

Геометрический смысл чисел v_k, $k=\overline{1,n}$, приводит к равенствам

$$v_{k-1}-v_k=\left(\alpha_{k-1}-1\right)\pi\,,\ k=\overline{2,n}\,.$$

После простых преобразований и потенцирования имеем

$$f'(z)=c_1\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^{(0)}-z}{2}\right)^{\alpha_k-1}.$$

В результате интегрирования по кривой в верхней полуплоскости от точки z_0 до точки z получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для отображения f, переводящего верхнюю полуплоскость в счетноугольник и удовлетворяющего условию* $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\Rightarrow+\infty}(f(z)-z)=0$*, имеет место формула* (*типа формулы Кристоффеля – Шварца*)

$$f(z)=c_1\int\limits_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^{(0)}-\varsigma}{2}\right)^{\alpha_k-1}d\varsigma+c_2\,,$$

где c_1 *и* c_2 *– комплексные постоянные,* $a_k^{(0)}\in(0,2\pi)$ *– прообразы вершин счетноугольника с углами* $\alpha_k\pi$.

Постоянные c_1, c_2 и $a_k^{(0)}$ определяются из условий задачи и дополнительного условия на отображение *f*.

Приведем примеры применения полученной формулы Кристоффеля – Шварца.

Пример 1. Пусть область *D* есть полуплоскость с исключенными равнобедренными треугольниками E_k, $E_k=E_0+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Вершины треугольника E_0 обозначим через $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$, $0<\operatorname{Re}A_1^{(0)}<$ $<\operatorname{Re}A_2^{(0)}<\operatorname{Re}A_3^{(0)}<2\pi$, $\operatorname{Im}A_1^{(0)}=\operatorname{Im}A_3^{(0)}<\operatorname{Im}A_2^{(0)}$, а угол при основании обозначим через $\gamma\pi$. Тогда $\alpha_1=\alpha_3=1-\gamma$, $\alpha_2=1+2\gamma$. Прообразами вершин $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$ будут точки $0<a_1^{(0)}=\pi-\delta$, $a_2^{(0)}=\pi$, $a_3^{(0)}=\pi+\delta<2\pi$.

Формула Кристоффеля – Шварца примет вид

$$f(z)=c_1\int\limits_0^z\frac{\cos^{2\gamma}\frac{\varsigma}{2}}{\left(\cos^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\varsigma}{2}\right)^{\gamma}}d\varsigma+c_2\,.$$

Если угол $\gamma=\frac{1}{2}$, то $A_1^{(0)}=A_3^{(0)}$ и отображение записывается в явном виде

$$f(z)=c_1\int\limits_0^z\frac{\cos\frac{\varsigma}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\varsigma}{2}}}d\varsigma+c_2=$$

$$=2c_1\arcsin\frac{\sin\frac{z}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}+c_2\,.$$

Из условия $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\Rightarrow+\infty}\left(f(z)-z\right)=0$ получаем, что $c_1=-1$ и $c_2=2i\ln\left(-\cos\frac{\delta}{2}\right)$.

Пример 2. Пусть D есть плоскость с разрезами по параллельным лучам $l_k=l+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, под углом β к вещественной оси. Пусть $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$ – концевые точки луча l, причем $A_1^{(0)}\in\mathbf{C}$, $A_2^{(0)}=\infty$. Тогда $\alpha_1=2$, $\alpha_2=0$. Прообразами вершин $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$ будут точки $a_1^{(0)}=0$ и $a_2^{(0)}=2\pi-\sigma$.

Формула Кристоффеля – Шварца примет вид

$$f(z)=c_1\int\limits_0^z\frac{\sin\frac{\varsigma}{2}}{\sin\left(\frac{\varsigma}{2}+\sigma\right)}d\varsigma=$$

$$=c_3\left[\left(\cos\sigma\right)\frac{z}{2}-\left(\sin\sigma\right)\ln\sin\left(\frac{z}{2}+\sigma\right)\right]+c_4\,.$$

В частном случае, когда $\sigma=\frac{\pi}{2}$, отображение имеет вид

$$h(z)=c_5\ln\cos\frac{z}{2}+c_4\,,$$

а когда $\sigma=\frac{\pi}{4}$, отображение имеет вид

$$g(z)=c_6\left[z-2\ln\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]+c_4\,.$$

Из условия $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\Rightarrow+\infty}\left(f(z)-z\right)=0$ получаем, что $c_4=2i\ln 2$, $c_5=2i$ и $c_6=\frac{1-i}{2}$.

Заметим, что отображения h и g были получены в работе [3] через решения уравнения Левнера.

Пример 3. Пусть область D есть полуплоскость с исключенными равнобедренными треугольниками E_k, $E_k = E_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Вершины треугольника E_0 обозначим через $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$, причем $A_1^{(0)} + 2\pi = A_3^{(0)} = A_1^{(1)}$, а угол при основании обозначим через $\gamma\pi$. Тогда $\alpha_1 = 1 - 2\gamma$, $\alpha_2 = 1 + 2\gamma$. Прообразами вершин $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$ будут точки $a_1^{(0)} = 0$, $a_2^{(0)} = \pi$, $a_3^{(0)} = 2\pi$.

Формула Кристоффеля – Шварца примет вид

$$f(z) = c_1 \int_0^z \operatorname{ctg}^{2\gamma} \frac{\varsigma}{2} d\varsigma + c_2 .$$

Если угол $\gamma = -\dfrac{1}{4}$, то отображение записывается в явном виде

$$f(z) = c_1 \int_0^z \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\varsigma}{2}} d\varsigma + c_2 =$$

$$= c_3 \left[\ln \left(\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} - \sqrt{\sin z} \right) + \right.$$

$$\left. + \arcsin \left(\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2} \right) \right] + c_4 .$$

Из условия $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \Rightarrow +\infty} \big(f(z) - z \big) = 0$ получаем, что $c_3 = i - 1$, $c_4 = -\dfrac{\pi}{2} - i\big(\ln 2 - \pi\big)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копанева Л.С.* Экстремальные задачи в классе отображений с симметрией переноса // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 44–47.
2. *Александров И.А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Изв. вузов. Математика. 1999. № 6 (445). С. 15–18.
3. *Копанева Л.С.* Параметрическое представление отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 2001. С. 135–144.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 10 октября 2003 г.