

ОСОБЕННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ С s -СУММИРУЕМОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Приводятся условия устранимости особых точек отображений с s -суммируемой характеристикой

Пусть $f: U \setminus I \rightarrow R^n$ – отображение с s -суммируемой характеристикой [1], где U – область в R^n , $n = 3, 4, \dots$, I – замкнутое подмножество U . Точки $x \in I$ назовем особыми точками, а I – особым множеством отображения f .

Для семейства Γ кривых в R^n сферический модуль $M_p(\Gamma)$ порядка p определяется [1] как нижняя грань $\int_{R^n} \rho^p d\sigma_x$ по всем таким неотрицательным бо-

релевским функциям ρ , что $\int_{\gamma} \rho d\gamma_x \geq 1$ для любой

кривой $\gamma \in \Gamma$, где $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$, $d\gamma_x = \frac{dx}{1+|x|^2}$.

Указанные функции ρ называются допустимыми для семейства Γ . Пусть $\gamma: [0; 1] \rightarrow R^n$ – кривая в R^n . Дуга кривой γ – это сужение отображения γ на отрезок, содержащийся в $[0; 1]$. Если γ^* – кривая в $f(U \setminus I)$, то, как и в [2], поднятием в $U \setminus I$ называется такая кривая γ в $U \setminus I$, что $f \circ \gamma = \gamma^*$. Частичным поднятием γ^* называем поднятие ее дуги. Два частичных поднятия существенно различны, если $\Lambda_1(\gamma_1 \cap \gamma_2) = 0$, где $\Lambda_\alpha(S)$ – хаусдорфова α -мерная мера множества S .

Пусть $f: U \setminus I \rightarrow R^n$ – отображение с s -суммируемой характеристикой и $y \in R^n$. Рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma^*(t), t \in [0; 1]$, для которой $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma^*(t) = y$. Если существует такая спрямляемая кривая γ в U , что $f \circ \gamma = \gamma^*$ и $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x$, где $x \in \partial U$, то кривая γ^* называется асимптотической для точки x , γ – ее асимптотическим поднятием, а y – асимптотическим значением f в точке x .

Если I – особое множество отображения f , $I_1 \subset I$, то семейство асимптотических кривых для I (I_1) – это все асимптотические кривые для $x \in I$ ($x \in I_1$). Число $N(y, U \setminus I)$ равно числу прообразов y в $U \setminus I$ с учетом кратности при отображении f , а $N(U \setminus I) = \sup_{y \in R^n} N(y, U \setminus I)$.

Пусть $A \subset U$ – компактное подмножество и, как обычно, $\text{Cap}(A, U)$ – нижняя грань $\int_u |\Delta \phi|^n dV$ по всем неотрицательным функциям ϕ класса $W_n^1(U)$,

равным нулю на ∂U и единице на A . Хорошо известно [3], что равенство $\text{Cap}(A, U) = 0$ не зависит от U , и потому можно писать $\text{Cap} A = 0$.

Через $\Gamma_*(A, I_0)$ обозначим семейство кривых $\gamma^*(t)$ в $f(U \setminus I)$, которые допускают такие асимптотические поднятия $\gamma(t)$, что $\gamma(0) \in A$, а $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x \in I_0, I_0 \subset I$.

Теорема 1 (характеристическое свойство сферического модуля семейства асимптотических кривых).

Пусть $f: U \setminus I \rightarrow R^n$ – отображение с s -суммируемой характеристикой, $U \setminus I$ связно, $A \subset U \setminus I, I_0 \subset I, \Gamma_*(I_0)$ – семейство асимптотических кривых точек $x \in I_0$ и $\text{Cap} A > 0$. Тогда $M_{\frac{ns}{s+1}}(\Gamma_*(I_0)) = 0$ в том и только в том случае, когда $M_{\frac{ns}{s+1}}(\Gamma_*(A, I_0)) = 0$, где $s > 1$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Обозначим через $I_r, r > 0$, такую r -окрестность множества I , что $\text{Cap} G > 0$, где $G = A \cap (U \setminus I_{2r})$. Пусть функция ρ_* допустима для $\Gamma_*(A, I_0)$, причем $\int_{R^n} \rho_*^\alpha d\sigma_x < \varepsilon, \varepsilon > 0, \alpha = \frac{ns}{s+1}$. По-

скольку $M_\alpha(\Gamma_*(A, I_0)) = 0$, то число ε можно выбрать произвольно сколь угодно малым. Определим на $U \setminus I$ функцию

$$\rho(x) = \rho_*(f(x)) \lambda_f^{-1}(x),$$

где $\lambda_f(x) = |\nabla f(x)| \left((1+|x|^2) \left(1+|y|^2 \right) \right)^{\frac{s-1}{s}}$.

Легко доказать, что ρ допустима для семейства, состоящего из поднятий кривых из $\Gamma_*(A, I_0)$.

Обозначим через A_ε множество точек $x \in \partial I_r$, для которых найдется кривая γ , что $f \circ \gamma \in \Gamma_*(A, I_0)$, дуга γ' кривой γ , соединяющая G с точкой x , лежит в $U \setminus I_{r/2}$ и $\int_{\gamma'} \rho d\gamma_x \leq \frac{1}{2}$. В силу допустимости ρ , для любой кривой γ_1 , идущей из $x \in A_\varepsilon$ в I_0 , будем иметь $\int_{\gamma_1} \rho ds \geq \frac{1}{2}$, если $f \circ \gamma_1 \in \Gamma_*(I_0)$.

Пусть $N = N(U \setminus I_{r/2})$ и $D_\varepsilon = \partial I_r \setminus A_\varepsilon$. В силу определения множества D_ε , для любой кривой

$\gamma \in U \setminus I_{r/2}$, соединяющей G и D_ε , имеем $\int_\gamma \rho d\gamma_x \geq \frac{1}{2}$.

Оценку для функции ρ дает неравенство

$$M(\Gamma(G, D_\varepsilon)) \leq 2^n N^{\frac{s-1}{s}} K_s \varepsilon', \text{ где } \varepsilon' = c\varepsilon^{\frac{s-1}{s}}.$$

В самом деле, в силу определения сферического модуля, имеем

$$M(\Gamma(G, D_\varepsilon)) \leq 2^n \int_{R^n} \rho_*(f(x)) \lambda_f^{-1} d\sigma_x.$$

Применяя к правой части неравенство Гельдера с показателями $\rho = \frac{s-1}{s}$ и $q = s$ и учитывая, что f – отображение с s -суммируемой характеристикой, получаем

$$M(\Gamma(G, D_\varepsilon)) = M(f) K_s(f),$$

где

$$M(f) = \left(\int_{R^n} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(f(x)) J(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{s-1}{s}} \leq \\ \leq 2^n \left(N(f) \int_{R^n} \rho_*^{\frac{ns}{s-1}}(y) d\sigma_y \right)^{\frac{s-1}{s}} \leq 2^n N^{\frac{s-1}{s}} \varepsilon^{\frac{s-1}{s}}$$

$$\text{и} \quad K_s(f) = \left(\int_{U \setminus I} \left(\frac{\lambda_f^{-n}(x)}{J(x, f)^{\frac{s-1}{s}}} \right)^s d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq \\ \leq \left(\int_{U \setminus I} \left(\frac{\lambda_f(x)}{J(x, f)} \right)^s J(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq K_s.$$

С другой стороны, модуль порядка $\alpha = \frac{ns}{s+1}$ семейства кривых из $\Gamma_*(I_0)$, для которых существуют поднятия, идущие из A_ε в I_0 , и в силу допустимости функции ρ_* , удовлетворяющие неравенствам

$$\int_{\gamma(A_\varepsilon, I_0)} \rho_* d\gamma_x \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} K_s^{-\beta}, \beta = \frac{s+1}{n(s-1)},$$

можно оценить следующим образом:

$$M_\alpha(\Gamma(A_\varepsilon, I_0)) \leq \int_{R^n} 2^\alpha K_s^{\alpha\beta} \rho_*^\alpha d\sigma_x \leq 2^\alpha K_s^{\frac{s}{s-1}} \varepsilon.$$

Возьмем теперь монотонно убывающую последовательность

$$\varepsilon_k = \left(2^{k+n} \rho N^{\frac{s-1}{s}} K_s \right)^{\frac{s}{s-1}}, k = 1, 2, \dots$$

Тогда последовательность

$$\varepsilon'_k = \left(\frac{1}{c} 2^{k+n} \rho N^{\frac{s-1}{s}} K_s \right)^{-1}, k = 1, 2, \dots$$

сходится к нулю.

Рассмотрим множества

$$A_p = \cup A_{\varepsilon_k} \cup D_p = \cap D_{\varepsilon_k} = \partial I_r \setminus A_p.$$

Имеем

$$M\left(\Gamma\left(D_p, G, U \setminus I_{r/2}\right)\right) = \lim_{k \rightarrow 0} 2^n N^{\frac{s-1}{s}} K_s \varepsilon'_k = 0.$$

Так как $M_\alpha\left(\bigcup_{i=1}^\infty \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty M_\alpha \Gamma(i)$, то модуль по-

рядка $\alpha = \frac{ns}{s+1}$ кривых из $\Gamma_*(I_0)$, допускающих поднятия, которые пересекают A_p , не превосходит $p^{\frac{s}{1-s}}$. Действительно, в силу свойства 2 из [1], имеем

$$M_\alpha(\Gamma(A_p, I_0)) \leq \sum_{k=1}^\infty 2^\alpha K_s^{\frac{s}{s-1}} \varepsilon_k,$$

$$M_\alpha(\Gamma(A_p, I_0)) \leq \sum_{k=1}^\infty 2^\alpha K_s^{\alpha\beta} \left(2^{k+n} \rho N^{\frac{s-1}{s}} K_s \right)^{-\frac{s}{s-1}} = \\ = p^{\frac{s}{1-s}} N^{-1} \sum_{k=1}^\infty 2^{\alpha \frac{(k+n)s}{s-1}}.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^\infty 2^{\alpha \frac{(k+n)s}{s-1}}$ является сходящимся геометрическим рядом

$$2^{\frac{2ns}{s^2-1}} \sum_{k=1}^\infty 2^{\frac{-k}{s-1}},$$

то

$$M_\alpha(\Gamma(A_p, I_0)) \leq p^{\frac{s}{s-1}}.$$

Возьмем теперь множества $\tilde{D} = \bigcup_{\beta=1}^\infty D_\beta$ и

$\tilde{A} = \bigcap_{p=1}^\infty A_p$. Аналогично предыдущему имеем

$$M(\Gamma(G, \tilde{D})) = 0 \text{ и } M_{\frac{ns}{s+1}}(\Gamma_*(\tilde{A}, I_0)) = 0, \text{ и, кроме то-}$$

го, $\tilde{D} \cup \tilde{A} = \partial I_r$.

Покажем теперь, что $M(\Gamma(\tilde{D})) = 0$, где $\Gamma(\tilde{D})$ – семейство кривых, соединяющих точки $x \in U \setminus \left(I_{r/2} \cup \tilde{D} \right)$ с $\tilde{D}$. Так как $M(\Gamma(G, \tilde{D})) = 0$, то, следуя [2. Т. 2], можно выбрать функцию $\rho \in L_n(R^n)$, для которой $\int_\gamma \rho d\gamma_x = \infty$ по любой кривой

$\gamma \in \Gamma(G, \tilde{D})$. Как и в [4], введем функцию

$$r_\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot d_1(x, \partial U \cup G \cup \tilde{D}), \text{ где } 0 < \varepsilon < 1, \text{ а}$$

$d_1 = \min(d, 1)$, и определим $\tilde{\rho}_\varepsilon(x)$ формулой

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \int_{B(0,1)} \rho(x+r_\varepsilon y) d\sigma_y & \text{при } y \in B(0,1), \\ 0 & \text{при } x \notin U \setminus I. \end{cases}$$

Так как и в [4] можно показать, что $\int_{\gamma} \tilde{\rho}(x) d\gamma_x = \infty$ для $\gamma \in \Gamma(G, \tilde{D})$ и что $\tilde{\rho}_\varepsilon(x)$ непрерывна $Q = U \setminus (I_{r/2} \cup G \cup \tilde{D})$. Пусть C – множество точек $x \in Q$, для каждой из которых найдется такая кривая $\gamma \in \Gamma(A, x)$, что $\int_{\gamma} \tilde{\rho} d\gamma_x < \infty$. Так как ρ локально ограничена, то C открыто, а $M(\Gamma(C, \tilde{D})) = 0$, поскольку $\int_{\gamma'} \tilde{\rho} d\gamma_x < \infty$ по любой кривой $\gamma' \in \Gamma(C, \tilde{D})$.

Пусть $C \neq \emptyset$. Покажем, что C замкнуто в Q . Если $x \in \partial G$, то возьмём шар $B(x, r_1)$, где $r_1 < d(x, \partial Q)$. Пусть точка $x' \in C \cap B(x, r_1)$. Существует такая кривая $\gamma \in \Gamma(G, x')$, что $\int_{\gamma} \tilde{\rho} d\gamma_x < \infty$. Соединим x и x' отрезком в I . Так как $\tilde{\rho}_\varepsilon$ непрерывна, то она ограничена в $B(x, r_1)$. Следовательно, $\int_l \tilde{\rho} d\gamma_x < \infty$, и поэтому $\int_{\gamma} \tilde{\rho} d\gamma_x < \infty$. Значит $x \in C$.

Обозначим через Q_i связную компоненту Q . Множество $F = Q \setminus C$ тоже открыто и замкнуто. Поэтому Q_i целиком лежит либо в F , либо в C . Если $F_i = F \cap Q_i = \emptyset$, то сферический модуль кривых $\Gamma(Q_i, \tilde{D}) = 0$. Если $F_i \neq \emptyset$, выберем шар $B(x, 2\delta) \subset F_i$. Тогда $\int_{\gamma} \tilde{\rho} d\gamma_x = \infty$, где $\gamma \in \Gamma(F_i, G, U \setminus I_{r/2})$. Существует такая кривая, что $\text{Cap}(G \cap F_i) > 0$. Построим, как и раньше, функцию $\bar{\rho}$, но $\tilde{D}$ заменим на $B(x, 2\delta)$, ε возьмём меньше δ , а $r_\varepsilon = \varepsilon d_1(x, \partial U \cup I_{r/2} \cup G)$. Так как $\bar{\rho}$ непрерывна в шаре $B(x, 2\delta)$ и $B(x, 2\delta) \subset F_i$, то $\bar{\rho}$ будет непрерывной в $U \setminus (I_{r/2} \cup G)$ и $\bar{\rho} \in L_n(R^n)$. Кроме того, $\int_{\gamma} \bar{\rho} d\gamma_x = \infty$ для $\gamma \in \Gamma(G, B(x, \delta))$.

Пусть W – множество точек, которые нельзя соединить с $B(x, \delta)$ спрямляемой кривой, не пересекающей G . Множество W замкнуто в силу того, что если $x \notin W$, то найдется $r > 0$, такое, что, $B(x', r) \cap G = \emptyset$. Очевидно, G принадлежит W и $M(\Gamma(W, B(x, \delta))) = 0$. Если $x' \notin W$ и $\gamma \in \Gamma(x, W)$, то $\int_{\gamma} \bar{\rho} d\gamma_x = \infty$, иначе можно соединить x' с $B(x, \delta)$ спрямляемой кривой γ' . Из непрерывности $\bar{\rho}$ и, сле-

довательно, ее ограниченности на компакте γ' получим $\int_{\gamma'} \bar{\rho} d\gamma_x < \infty$, что противоречит условию:

$$\int_{\gamma_1} \bar{\rho} d\gamma_x = \infty \text{ для } \gamma_1 \in \Gamma(F, W), \text{ где } \gamma_1 = \gamma' + \gamma. \text{ Поэтому}$$

модуль семейства кривых $\Gamma(W, F_i \setminus W) = 0$, т.е. $\text{Cap} W = 0$. Отсюда получаем $\text{Cap} A = 0$ и $F = \emptyset$. Видим, что, $C = Q$. Отсюда следует, что $\int_{\gamma} \bar{\rho} d\gamma_x = \infty$ для любых $x \in U \setminus (I_r \cup D)$ и $\gamma \in \Gamma(x, \tilde{D})$, т.е. $M(\Gamma(\tilde{D})) = 0$.

Так как r можно выбрать произвольно, то рассмотрим последовательность $r_k = 1/k$. Заметим, что любая кривая $\gamma^* \in \Gamma_*(I_0)$ имеет поднятия, начинающиеся в $U \setminus I_{r_k}$ при некотором k . Более того, в силу связности $U \setminus I$, можно выбрать k настолько большим, что начало этой кривой попадает в связную компоненту $U \setminus I_{r_k}$, которая содержит часть множества A нулевой емкости. Это поднятие пересекает $\tilde{A}$ или $\tilde{D}$. В силу доказанных утверждений и теоремы 1[1], видим, что в первом случае $M_\alpha(\Gamma_*(\tilde{A}, I_0)) = 0$, а во втором $M(\Gamma(\tilde{D})) = 0$, а следовательно, $M_\alpha(\Gamma_*(\tilde{D}, I_0)) = 0$. Отсюда следует $M_\alpha(\Gamma_*(I_0)) = 0$.

Лемма 1. Пусть α_1 и α_2 – две произвольные точки в области $U, U_0 \subset U$ – подобласть, содержащая эти точки. Тогда существует квазиизометрия $f: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$, обладающая свойствами $f(\alpha_1) = \alpha_2$, $f(x) = x$, если $x \in \bar{U} \setminus U_0$.

Доказательство (см. лемму 1 [2]).

Теорема 2. Пусть $F_0, F_1 \subset U$ связные, замкнутые относительно U множества, не вырождающиеся в точку. Тогда при $n-1 < \alpha \leq n$ выполнено неравенство

$$M_\alpha(\Gamma(F_0, F_1; U)) > 0.$$

Доказательство. Если $\bar{F}_0 \cap \bar{F}_1 \neq \emptyset$, то модуль кривых семейства $\Gamma(F_0, F_1; U)$ бесконечен. Поэтому далее будем считать $\bar{F}_0 \cap \bar{F}_1 = \emptyset$. Фиксируем точку $\alpha_0 \in F_0$ и рассмотрим шаровой слой $D_{R,r} = \{x: r < |x - \alpha_0| < R\}$, лежащий в U , такой, что $F_0 \cap \{x: |x - \alpha_2| \geq R\} \neq \emptyset$. В шаре $\{x: |x - \alpha_0| \leq r\}$ возьмем точки α'_1, α_1 , $\alpha'_1 \neq \alpha_1$, и пусть $U_0 \subset U$ – подобласть, содержащая α_1 , но не содержащая α_0 , и такая, что F_1 имеет точки как внутри U_0 , так и вне ее. Отметим произвольную точку $\alpha_1 \in F_1 \cap U_0$ и в соответствии с леммой 1 рассмотрим квазиизометрию $f: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$, для которой $f(\alpha_1) = \alpha'_1$ и $f(x) = x$, если $x \in \bar{U} \setminus U_0$.

Обозначим через $E' = f(E)$ образ множества E при отображении f . Легко видеть, что $F'_0 \cup D_{R,r}$ и $F'_1 \cap D_{R,r}$ имеют связные компоненты, соединяющие граничные сферы шарового слоя. Используя квазиинвариантность сферического модуля при квазиизометриях, имеем

$$\begin{aligned} M_\alpha(\Gamma(F_0, F_1; U)) &\geq \frac{1}{k} M_\alpha(\Gamma(F'_0, F'_1; U)) \geq \\ &\geq \frac{1}{k} M_\alpha(\Gamma(F'_0 \cap D_{R,r}, F'_1 \cap D_{R,r}; U)) \geq c(n, \alpha, R, r) > 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\text{Cap}_\beta(A_0, A_1; D_{R,r}) \geq b(n, \beta)(R^{n-\beta} - r^{n-\beta}),$$

где $n-1 < \beta < n$, $A_0, A_1 \subset D_{R,r}$ – континуумы, соединяющие граничные сферы шарового слоя.

Лемма 2. Пусть F_1, F_2, F_3 – непустые множества в области U и $\Gamma_{ij} = \Gamma(F_i, F_j; U)$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда для любого $n-1 < \alpha < n$ сферический модуль

$$\begin{aligned} M_\alpha(\Gamma_{12}) &\geq 3^{-\alpha} \min\{M_\alpha(\Gamma_{13}), M_\alpha(\Gamma_{23}), \\ &\inf M_\alpha(\Gamma(|\gamma_{13}|, |\gamma_{23}|; U))\} \end{aligned}$$

где $|\gamma| = \text{locus } \gamma$.

Доказательство проводится подобно доказательству теоремы 3.11 [4]. Выберем функцию ρ , допустимую для семейства кривых Γ_{12} . Если неравенство

$$\int_{\gamma_{13}} \rho d\gamma_x \geq \frac{1}{3}$$

выполнено для любой спрямляемой кривой $\gamma_{13} \in \Gamma_{13}$ или если неравенство

$$\int_{\gamma_{23}} \rho d\gamma_x \geq \frac{1}{3}$$

выполнено для любой спрямляемой кривой $\gamma_{23} \in \Gamma_{23}$, то либо $3\rho \wedge \Gamma_{13}$, либо $3\rho \wedge \Gamma_{23}$, откуда следует, что

$$\int_{R^n} \rho^\alpha d\sigma_x \geq 3^{-\alpha} \min\{M_\alpha(\Gamma_{13}), M_\beta(\Gamma_{23})\}.$$

Если для некоторых спрямляемых кривых $\gamma_{13} \in \Gamma_{13}$ и $\gamma_{23} \in \Gamma_{23}$ указанные неравенства не выполнены, то для любой спрямляемой кривой $\beta \in \Gamma(|\gamma_{13}|, |\gamma_{23}|; U)$ справедливо неравенство

$$\int_\beta \rho d\gamma_x > \frac{1}{3}$$

и, следовательно,

$$\int_{R^n} \rho^\alpha d\sigma_x \geq 3^{-\alpha} M_\alpha(\Gamma(|\gamma_{13}|, |\gamma_{23}|; U)).$$

Поскольку функция $\rho \wedge \Gamma_{12}$ выбрана произвольно и верны либо первое, либо второе неравенства, то лемма доказана.

Лемма 3. Пусть F_1, F_2, F_3 – множества в области U , содержащей в себе шаровой слой $B^n(b) \setminus B^n(b)$, $0 < a < b < \infty$, причем $F_3 \subset B^n(a)$. Пусть Γ_{ij} такая же, как в предыдущей лемме. Если

выполнено одно из следующих условий:

$$F_i \subset CB^n(b) \text{ для } i = 1, 2;$$

и для F_2 выполнено условие

$$d(F_i) \geq 2b \text{ для } i = 1, 2,$$

то для $\alpha > n-1$ имеем

$$M_\alpha(\Gamma_{12}) \geq 3^{-\alpha} \min\{M_\alpha(\Gamma_{13}), M_\alpha(\Gamma_{23}), c_n \log\left(\frac{b}{a}\right)\},$$

где $c_n > 0$ – константа, как в лемме 2 [6].

Доказательство следует из [1. Т. 2] и леммы 2.

Теорема 3. Пусть $\Phi = \{F\}$ – семейство связных, замкнутых относительно области U множеств $F \subset U$, таких, что $\inf_{F \in \Phi} d(F) > 0$. Тогда верно неравенство

$$\inf_{F \in \Phi} M_\alpha \Gamma(A, F; U) > 0$$

при $n-1 < \alpha \leq n$ либо имеет место для всякого невырожденного континуума $A \subset U$, либо не имеет места ни для какого из континуумов $A \subset U$.

Доказательство. Пусть A и A^* – произвольная пара невырожденных континуумов в U и выполнено, например, неравенство

$$M_\alpha(\Gamma(A, F; U)) \geq \delta > 0$$

для любого $F \in \Phi$. Надо убедиться, что

$$\inf_{F \in \Phi} M_\alpha \Gamma(A^*, F; U) > 0.$$

Сначала предположим, что $A \cap A^* \neq \emptyset$. Выберем $r > 0$ так, чтобы для любой точки $a \in A$ замкнутый шар $\overline{B^n(a, 2r)} = \{x : |x - a| \leq 2r\}$ содержался в U , и выполнялось

$$0 < 4r < \min\left\{\inf_{F \in \Phi} d(F), |A, A^*|\right\},$$

где $|A, A^*|$ – расстояние между A и A^* . Пусть $A_1, A_2, \dots, A_p$ – конечное покрытие континуума A замкнутыми шарами радиусом r и с центрами в точках $a_i \in A_i$. Обозначим через $\delta_i = M_\alpha(\Gamma(A_i, A^*; U))$. По теореме 2, $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, p$. Выберем произвольно $F \in \Phi$, имеем

$$\begin{aligned} 0 < \delta \leq M_\alpha(\Gamma(A, F; U)) &\leq M_\alpha\left(\Gamma\bigcup_{i=1}^p A_i, F; U\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p M_\alpha(\Gamma(A_i, F; U)), \end{aligned}$$

значит при некотором i выполнено

$$M_\alpha(\Gamma(A_i, F; U)) \geq \frac{\delta}{p}.$$

Фиксируем это i . Покажем, что выполнено неравенство

$$M_\alpha(\Gamma(A^*, F; U)) \geq 3^{-\alpha} \min\left\{\frac{\delta}{p}, \delta_1, \dots, \delta_p, c_n \log 2\right\},$$

каково бы ни было $F \in \Phi$, где $c_n > 0$, как в лемме 3.

В самом деле, поскольку $A^* \cap B^n(a_i, 2r) = \emptyset$ и $d(F) \geq 4r$, то, применяя лемму 3 с $F_1 = A^*, F_2 = F, F_3 = A_i$, имеем

$$M_\alpha \left(\Gamma \left(A^*, F; U \right) \right) \geq 3^{-\alpha} \min \left\{ \delta_i, \frac{\delta}{p}; c_n \log 2 \right\}.$$

Пусть $A \cap A^* \neq \emptyset$. Если $U \setminus (A \cup A^*) \neq \emptyset$ и, следовательно, содержит континуум A' , то можно предыдущие рассуждения применить вначале к A, A' и затем к A' и A^* . Если $U \setminus (A \cup A^*) = \emptyset$, то можно, полагая $A \neq R^n \neq A^*$, выбрать A_1 и A_1^* так, чтобы множества $A \cap A_1$, $A_1 \cap A_1^*$, $A_1^* \cap A^*$ были пусты, и применить предыдущие рассуждения к парам A, A_1 ; A_1, A_1^* и A_1^*, A^* . Это и завершает доказательство теоремы.

Теорема 4. Пусть $f: U \setminus I \rightarrow R^n$ – отображение с s -ограниченной характеристикой, где I – замкнутое подмножество в U , $\dim I \leq n-2$ и Γ_* – семейство асимптотических кривых для точек $x \in I$. Если

$$M_\alpha(T_*) = 0, \quad \alpha = \frac{ns}{s+1}, \quad s > n-1$$

и $\text{Cap}(R^n \setminus f(U \setminus I)) > 0$, то f продолжается непрерывно на U .

Доказательство. Предположим, что это не так. Пусть $x \in I$ и последовательности $x_i \rightarrow x$, $x'_i \rightarrow x$, а $q(f(x_i), f(x'_i)) \geq a > 0$, где $q(x, y)$ – сферическое расстояние. В силу условия $\dim I \leq n-2$, существует кривая $\gamma_i \in \Gamma(x_i, x'_i)$, причем $d(\gamma_i) < 2d(x_i, x'_i)$. Обозначим через F множество $R^n \setminus f(U \setminus I)$. Из теоремы 3 имеем $M_\alpha(\Gamma(F, \gamma_i^*)) \geq \delta > 0$. С другой стороны, поднятие γ кривой $\gamma^* \in \Gamma(F, \gamma_i^*)$ выходит либо на ∂U , либо на I . Во втором случае кривая $\gamma^* \in \Gamma_*$, и сферический модуль порядка α таких кривых – нуль, а модуль кривых, которые выходят на ∂U , как следует из теоремы 1 [1], стремится к нулю. Таким образом, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Подобный результат был получен в [5] при условии $\text{Cap} I = 0$ вместо $M_{\frac{ns}{s+1}}(\Gamma_*) = 0$ [5–8]. И для отображений с ограниченным в среднем искажением в [9]. Если $\text{Cap} I = 0$, то из теоремы 1 [1] следует, что сферический модуль $M_{\frac{ns}{s+1}}(\Gamma_*) = 0$. Однако первый и четвертый примеры в [1, 2] показывают, что обратное неверно. В этих примерах $\text{Cap} I > 0$, так как $\Lambda_\alpha(I) > 0$ при некотором $\alpha > 0$, а $M_{\frac{ns}{s+1}}(\Gamma_*) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малютина А.Н., Баталова Н.Н., Кривошеева И.И. Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во. Том. ун-та, 2001.
2. Полецкий Е.А. О стирании особенностей квазиконформных отображений // Мат. сб. 1973. Т. 92(134). № 2(10). С. 242–256.
3. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8. № 3. С. 629–658.
4. Асеев В.В. Об одном свойстве модуля // ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 3. С. 513–514.
5. Martio O., Rickman S., Vaisala J.M. Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Fenn. 1971. 465 p.
6. Vaisala J. Revolvable sets for quasiconformal mappings // J. Math. and Mech. 1969. V.19. No. 1. P. 49–51.
7. Миклюков И. Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // ДАН СССР. 1969. Т. 188. № 3. С. 525–527.
8. Шабат В. К теории квазиконформных отображений в пространстве // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1045–1048.
9. Малютина А.Н., Романова Е.Н. О некоторых свойствах отображений с ограниченным в среднем искажением // Вестник ТГУ. Сер. Математика, кибернетика, информатика. 2000. № 269. С. 56–59.

Статья представлена кафедрой теории функций и лабораторией математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 30 апреля 2003 г.