

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НУЛЕВОЙ ПОЛНОЙ КРИВИЗНЫ ПЕРВОГО РОДА

Рассматриваются гладкие векторные поля без особых точек в некоторой области трёхмерного евклидова пространства. Доказано существование векторного поля, для которого ортогональное неголономное пфаффово многообразие [1] имеет одно семейство прямолинейных асимптотических. Определена широта класса таких векторных полей. Исследовано также строение векторного поля с неголономной плоскостью в качестве ортогонального ему многообразия Пфаффа.

Пусть $\bar{V}$ – гладкое векторное поле без особых точек в области $G \subset \mathbf{R}^3$, для которого полная кривизна первого рода K_1 обращается в нуль. Так как $K_1 = k_1 k_2$ (k_1, k_2 – главные кривизны первого рода), то возможны два случая: 1) $k_1=0, k_2 \neq 0$ (или всё равно, что $k_2=0, k_1 \neq 0$); 2) $k_1 = k_2 = 0$. Оба эти случая рассматриваются в данной работе. При исследовании используется ортонормированный подвижной репер $(M; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$,

при этом $M \in G, \bar{e}_3 = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|}$. Деривационные формулы репера имеют вид:

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \omega^i \bar{e}_i, \\ d\bar{e}_i &= \omega_i^j \bar{e}_j, \end{aligned}$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M , $\omega_i^j = -\omega_j^i$,

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j \\ (i, j, k &= 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Формы ω^i, ω_j^i являются главными, из них ω^i – базисные формы, поэтому

$$\omega_3^i = A_j^i \omega^j. \quad (1.1)$$

Совокупность всех интегральных кривых уравнения Пфаффа $\omega^3 = 0$ называется пфаффовым многообразием, ортогональным векторному полю $\{\bar{e}_3\}$ [1]. Если уравнение $\omega^3 = 0$ вполне интегрируемо, то пфаффово многообразие, им определяемое, называется голономным. В противном случае – неголономным (неголономное пфаффово многообразие называют также неголономной поверхностью [2]).

1. ОСНОВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Основные инварианты векторного поля $\{\bar{e}_3\}$ определяются формулами:

$$K_2 = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} - \text{полная кривизна второго рода}$$

(или гауссова кривизна); $H = -\frac{A_1^1 + A_2^2}{2}$ – средняя

кривизна; $\rho = A_2^1 - A_1^2$ – скаляр неголономности;

$K_1 = K_2 - \frac{\rho^2}{4}$ – полная кривизна первого рода [3].

Уравнения

$$\begin{cases} A_1^1(\omega^1)^2 + (A_2^1 + A_1^2)\omega^1\omega^2 + A_2^2(\omega^2)^2 = 0, \\ \omega^3 = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

определяют асимптотические линии пфаффова многообразия $\omega^3 = 0$. Уравнения

$$\begin{cases} A_1^2(\omega^1)^2 + (A_2^2 - A_1^1)\omega^1\omega^2 - A_2^1(\omega^2)^2 = 0, \\ \omega^3 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

– линии кривизны второго рода. Уравнения

$$\begin{cases} A_1^1\omega^1 + A_2^1\omega^2 + A_3^1\omega^3 = 0, \\ A_1^2\omega^1 + A_2^2\omega^2 + A_3^2\omega^3 = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

– эквидирекционные линии (линии, вдоль которых векторы поля $\{\bar{e}_3\}$ параллельны [1]). Для нормальной кривизны k_n кривой, принадлежащей $\omega^3 = 0$, имеет место формула

$$k_n = -A_1^1 \cos^2 \varphi - (A_2^1 + A_1^2) \cos \varphi \sin \varphi - A_2^2 \sin^2 \varphi, \quad (1.5)$$

где φ – угол между касательной к кривой и вектором $\bar{e}_1$. Главные кривизны первого рода – это экстремальные значения функции k_n . Полная кривизна первого рода K_1 равна произведению главных кривизн первого рода.

Известно, что если $K_1 = 0$, то через каждую точку $M \in G$ проходит либо одна асимптотическая линия, либо их бесконечно много. В последнем случае пфаффово неголономное многообразие $\omega^3 = 0$ называют неголономной плоскостью.

2. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НУЛЕВОЙ ПОЛНОЙ КРИВИЗНЫ ПЕРВОГО РОДА ОБЩЕГО ВИДА

Рассмотрим векторное поле, для которого $K_1 = 0$, но при этом только одна из главных кривизн первого рода равна нулю. Через каждую точку $M \in G$ в этом случае проходит лишь одна асимптотическая. Чтобы репер $\{M; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ стал каноническим, достаточно вектор $\bar{e}_1$ в точке M направить по касательной к асимптотической. Тогда

$$A_1^1 = 0, \quad A_2^1 + A_1^2 = 0, \quad A_2^2 \neq 0, \quad A_2^1 = \frac{\rho}{2}, \quad A_2^2 = -2H$$

и формулы (1.1) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \frac{\rho}{2} \omega^2 + a \omega^3, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2} \omega^1 - 2H \omega^2 + b \omega^3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $a = A_3^1, \quad b = A_3^2$.

Вектор $a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2$ – вектор кривизны линии тока векторного поля $\{\bar{e}_3\}$.

Внешнее дифференцирование системы (2.1) приводит к равенствам

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d\rho}{2} - a\rho\omega^1 + 9(ab - \rho H)\omega^3 - 2H\omega_2^1 \right) \wedge \omega^2 + \\
& + \left(da + \left(\frac{\rho^2}{4} - a^2 \right) \omega^1 + b\omega_2^1 \right) \wedge \omega^3 = 0, \\
& \left(-\frac{d\rho}{2} + b\rho\omega^2 + (ab + \rho H)\omega^3 - 2H\omega_2^1 \right) \wedge \omega^1 + \\
& + \left(-2dH + (b^2 + 4H^2 - \frac{\rho^2}{4})\omega^3 \right) \wedge \omega^2 + \\
& + (db - a\omega_2^1) \wedge \omega^3 = 0.
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2), применяя лемму Картана, находим

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{2} &= -\alpha_{11}\omega^1 + (b\rho - \alpha_{12})\omega^2 + \\
&+ (ab + \rho H - \alpha_{13})\omega^3 - 2H\omega_2^1, \\
2dH &= -\alpha_{12}\omega^1 - \alpha_{22}\omega^2 + (b^2 + 4H^2 - \frac{\rho^2}{4} - \alpha_{23})\omega^3, \\
db &= \alpha_{13}\omega^1 + \alpha_{23}\omega^2 + \alpha_{33}\omega^3 + a\omega_2^1.
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляем найденное значение $\frac{d\rho}{2}$ в первое равенство системы (2.2), затем применяем лемму Картана. В результате получим

$$\begin{aligned}
4H\omega_2^1 &= (-\alpha_{11} - a\rho)\omega^1 - \beta_{22}\omega^2 + (2ab - \alpha_{13} - \beta_{23})\omega^3, \\
da &= (a^2 - \frac{\rho^2}{4})\omega^1 + \beta_{23}\omega^2 + \beta_{33}\omega^3 - b\omega_2^1.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4), произведя соответствующие вычисления, находим

$$\begin{aligned}
\omega_2^1 &= \frac{1}{4H} [(-\alpha_{11} - a\rho)\omega^1 - \beta_{22}\omega^2 + (2ab - \alpha_{13} - \beta_{23})\omega^3], \\
dH &= -\frac{\alpha_{12}}{2}\omega^1 - \frac{\alpha_{22}}{2}\omega^2 + \left(\frac{b^2}{2} + 2H^2 - \frac{\alpha_{23}}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \omega^3, \\
d\rho &= (a\rho - \alpha_{11})\omega^1 + (\beta_{22} - 2\alpha_{12} + 2b\rho)\omega^2 + (\beta_{23} - \alpha_{13} + 2\rho H)\omega^3, \\
da &= [a^2 - \frac{\rho^2}{4} + \frac{b}{4H}(\alpha_{11} + a\rho)]\omega^1 + (\beta_{23} + \frac{b}{4H}\beta_{22})\omega^2 + \\
&+ [\beta_{33} + \frac{b}{4H}(\alpha_{12} + \beta_{23} - 2ab)]\omega^3, \\
db &= [\alpha_{13} - \frac{a}{4H}(\alpha_{11} + a\rho)]\omega^1 + (\alpha_{23} - \frac{a}{4H}\beta_{22})\omega^2 + \\
&+ [\alpha_{33} - \frac{a}{4H}(\alpha_{13} + \beta_{23} - 2ab)]\omega^3.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Для внешних дифференциалов базисных форм имеют место формулы

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= \frac{1}{4H}(\alpha_{11} + a\rho)\omega^1 \wedge \omega^2 - \left[\frac{1}{4H}(\alpha_{13} + \beta_{23} - 2ab) + \right. \\
&+ \left. \frac{\rho}{2} \right] \omega^2 \wedge \omega^3, \\
d\omega^2 &= \frac{1}{4H}\beta_{22}\omega^1 \wedge \omega^2 - \left[\frac{1}{4H}(\alpha_{13} + \beta_{23} - 2ab) + \right. \\
&+ \left. \frac{\rho}{2} \right] \omega^3 \wedge \omega^1 + 2H\omega^2 \wedge \omega^3, \\
d\omega^3 &= -\rho\omega^1 \wedge \omega^2 - b\omega^2 \wedge \omega^3 + a\omega^3 \wedge \omega^1.
\end{aligned} \quad (2.6)$$

В выбранном нами каноническом репере уравнения (1.2) – (1.5), определяющие асимптотические линии кривизны второго рода, эквидирекционные линии, нормальную кривизну кривых, принадлежащих $\omega^3 = 0$, принимают соответственно вид:

$$\omega^2 = 0, \omega^3 = 0; \quad (2.7)$$

$$\rho(\omega^1)^2 + 4H\omega^1\omega^2 + \rho(\omega^2)^2 = 0, \quad \omega^3 = 0; \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{2}\omega^2 + a\omega^3 &= 0, \\ -\frac{\rho}{2}\omega^1 - 2H\omega^2 + b\omega^3 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$k_n = 2H \sin^2 \varphi. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что экстремальные значения k_n

принимает при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, т.е. главные кривизны

первого рода k_{n1} и k_{n2} имеют следующие значения: $k_{n1} = 0$, $k_{n2} = 2H$. Отсюда следует, что одна из линий кривизны первого рода совпадает с асимптотической линией.

Рассмотрим линейчатые поверхности, описываемые прямыми, проходящими через точки линий кривизны первого рода в направлении векторов поля $\bar{e}_3$. Найдем горловые линии этих линейчатых поверхностей и их параметры распределения.

а) Для линейчатой поверхности, соответствующей той линии кривизны, которая совпадает с асимптотической ($\omega^2 = \omega^3 = 0$), имеем $\langle d\bar{r}, d\bar{e}_3 \rangle = 0$. То есть сама асимптотическая представляет собой горловую линию линейчатой поверхности, состоящей из прямых, проходящих через точки этой асимптотической в направлении векторов поля. Параметр распределения $p = \frac{2}{\rho}$.

б) Для второй линейчатой поверхности горловая линия определяется уравнением

$$\bar{R} = \bar{r} + \frac{2H}{\frac{\rho^2}{4} + 4H^2} \bar{e}_3,$$

а параметр распределения – формулой $\frac{\frac{\rho}{2}}{\frac{\rho^2}{4} + 4H^2}$.

При неголономном $\omega^3 = 0$ имеем

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{2} & a \\ -\frac{\rho}{2} & -2H & b \end{pmatrix} = 2,$$

это означает, что векторное поле $\{\bar{e}_3\}$ не имеет эквидирекционных поверхностей.

Количество линий кривизны второго рода зависит от значения инварианта $4H^2 - \rho^2$. При $\rho = 2H$ (или $\rho = -2H$) через всякую точку $M \in G$ проходит только одна линия кривизны второго рода, имеющая уравнения

$$\left. \begin{aligned} \omega^1 &= \omega^2, \\ \omega^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \left(\text{или} \begin{aligned} \omega^1 &= -\omega^2, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \right)$$

Таким образом, если через $\forall M \in G$ проходит только одна линия кривизны второго рода, то она делит пополам угол между линиями кривизны первого рода.

3. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ КЛАССА $K_1=0$ С ОДНИМ СЕМЕЙСТВОМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ

Если пфаффово многообразие $\omega^3 = 0$, ортогональное полю $\{\bar{e}_3\}$, голономно, то $K_1 = K_2$ есть гауссова кривизна его интегральной поверхности, проходящей через точку $M \in G$. Следовательно, при $K_1 = 0$ эта поверхность является развёртывающейся с прямолинейными образующими в качестве асимптотических. Вся область G в этом случае расслаивается на однопараметрическое семейство торсов. Существуют ли векторные поля класса $K_1 = 0$, для которых не голономное $\omega^3 = 0$ имеет прямолинейные асимптотические? Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема 1. *С произволом трёх функций двух аргументов существуют векторные поля класса $K_1 = 0$, для которых ортогональное не голономное пфаффово многообразие имеет прямолинейные асимптотические.*

Доказательство. Пусть асимптотические $\omega^2 = \omega^3 = 0$ – прямые линии, тогда $d\bar{e}_1 \parallel \bar{e}_1$ при $\omega^2 = \omega^3 = 0$.

Это возможно лишь тогда, когда $a_{11} + ar = 0$. Система (2.5) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} 4H\omega_2^1 + \beta_{22}\omega^2 + (\alpha_{13} + \beta_{23} - 2ab)\omega^3 &= 0, \\ 2dH + \alpha_{12}\omega^1 + \alpha_{22}\omega^2 + (\alpha_{23} + \frac{\rho^2}{4} - b^2 - 4H^2)\omega^3 &= 0, \\ d\rho - 2ar\omega^1 + (2\alpha_{12} - \beta_{22} - 2b\rho)\omega^2 + (\alpha_{13} - \beta_{23} - \\ - 2\rho H)\omega^3 &= 0, \\ da + (\frac{\rho^2}{4} - a^2)\omega^1 - (\beta_{23} + \frac{b}{4H}\beta_{22})\omega^2 + \\ + [\frac{b}{4H}(2ab - \alpha_{13} - \beta_{23}) - \beta_{33}]\omega^3 &= 0, \\ db - \alpha_{13}\omega^1 - (\alpha_{23} - \frac{a}{4H}\beta_{22})\omega^2 + [\frac{a}{4H}(\alpha_{13} + \beta_{23} - \\ - 2ab) - \alpha_{33}]\omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Замыкаем (3.1), получаем следующую систему внешних уравнений:

$$\begin{aligned} d\beta_{22} \wedge \omega^2 + (d\alpha_{13} + d\beta_{23}) \wedge \omega^3 + A_1\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ + B_1\omega^2 \wedge \omega^3 + C_1\omega^3 \wedge \omega^1 &= 0, \\ d\alpha_{12} \wedge \omega^1 + d\alpha_{22} \wedge \omega^2 + d\alpha_{23} \wedge \omega^3 + A_2\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ + B_2\omega^2 \wedge \omega^3 + C_2\omega^3 \wedge \omega^1 &= 0, \\ (2d\alpha_{12} - d\beta_{22}) \wedge \omega^2 + (d\alpha_{13} - d\beta_{23}) \wedge \omega^3 + A_3\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ + B_3\omega^2 \wedge \omega^3 + C_3\omega^3 \wedge \omega^1 &= 0, \\ (-d\beta_{23} - \frac{b}{4H}d\beta_{22}) \wedge \omega^2 - \frac{b}{4H}(d\alpha_{13} + d\beta_{23}) \wedge \omega^3 - \\ - d\beta_{33} \wedge \omega^3 + A_4\omega^1 \wedge \omega^2 + B_4\omega^2 \wedge \omega^3 + C_4\omega^3 \wedge \omega^1 &= 0, \\ d\alpha_{13} \wedge \omega^1 - d\alpha_{23} \wedge \omega^2 + \frac{a}{4H}d\beta_{22} \wedge \omega^2 + \frac{a}{4H}(d\alpha_{13} + \\ + d\beta_{23}) \wedge \omega^3 - d\alpha_{33} \wedge \omega^3 + A_5\omega^1 \wedge \omega^2 + B_5\omega^2 \wedge \omega^3 + \\ + C_5\omega^3 \wedge \omega^1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Положим

$$\begin{aligned} d\beta_{22} &= \lambda_{11}\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2 + \lambda_{13}\omega^3, \\ d\alpha_{13} &= \lambda_{21}\omega^1 + \lambda_{22}\omega^2 + \lambda_{23}\omega^3, \\ d\beta_{23} &= \lambda_{31}\omega^1 + \lambda_{32}\omega^2 + \lambda_{33}\omega^3, \\ d\alpha_{12} &= \mu_{11}\omega^1 + \mu_{12}\omega^2 + \mu_{13}\omega^3, \\ d\alpha_{22} &= \mu_{21}\omega^1 + \mu_{22}\omega^2 + \mu_{23}\omega^3, \\ d\alpha_{22} &= \mu_{31}\omega^1 + \mu_{32}\omega^2 + \mu_{33}\omega^3, \\ d\beta_{13} &= \nu_{11}\omega^1 + \nu_{12}\omega^2 + \nu_{13}\omega^3, \\ d\alpha_{33} &= \nu_{21}\omega^1 + \nu_{22}\omega^2 + \nu_{23}\omega^3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

По методу Кэлера [4] строим цепь интегральных элементов $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Для E_1 полагаем $\omega^2 = \omega^1 = 0$.

Имеем 8 независимых параметров $\lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{33}, \mu_{13}, \mu_{23}, \mu_{33}, \nu_{13}, \nu_{23}$, то есть $r_1 = 8$ (мы используем обозначения, принятые в [4]). Для E_2 полагаем $\omega^1 = 0$ и находим

$$\begin{aligned} \lambda_{22} &= \mu_{13} - \frac{1}{2}(B_1 + B_3), \\ \lambda_{32} &= \lambda_{13} - \mu_{13} + \frac{1}{2}(B_3 - B_1), \\ \mu_{32} &= \mu_{23} - B_2, \\ \nu_{13} &= \lambda_{33} + \frac{b}{4H}B_1 + B_4, \\ \nu_{22} &= \mu_{33} - \frac{a}{4H}B_1 + B_5. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) видим, что $r_2 = 3$. Следовательно, характер $s_1 = r_1 - r_2 = 5$.

Подставив (3.3) в (3.2), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= -A_1, \\ \mu_{21} &= \mu_{12} - A_2, \\ \mu_{31} &= \mu_{13} + C_2, \\ \mu_{11} &= -\frac{1}{2}(A_1 + A_3), \\ \lambda_{21} &= \frac{C_1 + C_3}{2}, \\ \lambda_{31} &= \frac{C_1 - C_3}{2}, \\ \nu_{11} &= \frac{b}{4H}C_1 + C_4, \\ \nu_{21} &= \lambda_{23} + \frac{a}{4H}C_1 - C_5, \\ bA_1 + 2H(2A_4 + C_3 - C_1) &= 0, \\ aA_1 + 2H(-2A_5 + B_1 + B_3 + 2C_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вычислив $A_1, A_4, A_5, B_1, B_3, C_1, C_2, C_3$, мы убеждаемся в том, что последние два равенства из (3.5) представляют собой тождества.

Мы построили правильную цепь $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ интегральных элементов. Следовательно, система (3.2) – в инволюции. Характеристическое число $r_3 = 0$. Характеры $s_2 = r_2 - r_3 = 3, s_3 = 0$. Согласно признаку Кэлера, если построена правильная цепь интегральных элементов, то интегральное многообразие существует с произволом, определяемым последним не равным нулю характером цепи [4]. Таким образом, мы доказали, что исследуемое векторное поле существует и определяется с произволом трёх функций двух аргументов. $\square$

4. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ, ДЛЯ КОТОРОГО ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПФАФФОВО МНОГООБРАЗИЕ ЯВЛЯЕТСЯ НЕГОЛОНОМНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

В этом случае всякая интегральная кривая уравнения $\omega^3 = 0$ – асимптотическая линия. Тогда из (1.2) следует $A_1^1 = A_2^2 = 0, A_1^2 = -A_2^1$. Средняя кривизна $H = 0$ и равенства (2.1) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_3^1 &= \frac{\rho}{2} \omega^2 + a \omega^3, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2} \omega^1 + b \omega^3. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Теорема 2. Существует единственное векторное поле, для которого ортогональное пфаффово многообразие является неголономной плоскостью.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\omega^3 = 0$ является неголономной плоскостью, то линии тока векторного поля $\{\bar{e}_3\}$ не могут быть прямыми. Поэтому поместим вектор $\bar{e}_1$ в соприкасающуюся плоскость линии тока, тогда $b = 0$ и формулы (4.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_3^1 &= \frac{\rho}{2} \omega^2 + a \omega^3, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2} \omega^1. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Дифференцируем (4.2) внешним образом и затем применяем лемму Картана. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{2} &= a\rho\omega^1 + \beta\omega^3, \\ da &= (a^2 - \frac{\rho^2}{4})\omega^1 + \beta\omega^2 + \lambda\omega^3, \\ a\omega_2^1 &= \beta\omega^1 + \frac{\rho^2}{4}\omega^2 + \gamma\omega^3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Дифференцирование равенств (4.3) с использованием формул (4.2) и (4.3) приводит нас к условиям $\beta = \lambda = 0, \gamma = \frac{a\rho}{2}$. И тогда система (4.3) представится в виде

$$\begin{aligned} d\rho &= 2a\rho\omega^1, \\ da &= (a^2 - \frac{\rho^2}{4})\omega^1, \\ a\omega_2^1 &= \frac{\rho^2}{4}\omega^2 + \frac{a\rho}{2}\omega^3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из первых двух уравнений системы (4.4) находим

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c}{t^2 + \frac{1}{4}}, \\ a &= \frac{ct}{t^2 + \frac{1}{4}}, \\ \omega^1 &= -\frac{dt}{c}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $c = \text{const} \neq 0$. Так как $d(\frac{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}{t} \omega^2) = 0$, то можно

положить $\frac{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}{t} \omega^2 = du$. Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} du. \quad (4.6)$$

Ищем функции λ_2, λ_3 , для которых выполнялось бы равенство

$$d(\lambda_2 \omega^2 + \lambda_3 \omega^3) = 0.$$

Такие функции существуют и равны

$$\lambda_2 = \frac{1}{2t\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Полагаем $\lambda_2 \omega^2 + \lambda_3 \omega^3 = dv$, и тогда

$$\omega^3 = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} dv - \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} du. \quad (4.7)$$

Из (4.4) и (4.2), используя (4.5) – (4.7), находим

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= \frac{c}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dv, \\ \omega_3^1 &= \frac{ct}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dv, \\ \omega_3^2 &= \frac{1}{2(t^2 + \frac{1}{4})} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующие производные формулы:

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= -\frac{dt}{c} \bar{e}_1 + \frac{tdu}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_2 + (\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} dv - \frac{du}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}) \bar{e}_3, \\ d\bar{e}_1 &= -\frac{cdv}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_2 - \frac{ctdv}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_3, \\ d\bar{e}_2 &= \frac{cdv}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_1 - \frac{dt}{2(t^2 + \frac{1}{4})} \bar{e}_3, \\ d\bar{e}_3 &= \frac{ctdv}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_1 + \frac{dt}{2(t^2 + \frac{1}{4})} \bar{e}_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Интегрируем систему (4.8). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_1}{dv} &= -\frac{c}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_2 - \frac{ct}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \bar{e}_3, \\ \frac{d^2\bar{e}_1}{dv^2} &= -c^2 \bar{e}_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cos(cv) + \bar{e}_2 \sin(cv), \quad (4.9)$$

где $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ – постоянные линейно независимые векторы.

Тогда

$$\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v} = \frac{c}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} (\bar{e}_1 \cos(cv) + \bar{e}_2 \sin(cv)).$$

Отсюда

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} (\bar{e}_1 \sin(cv) - \bar{e}_2 \cos(cv)) + \bar{f}(t). \quad (4.10)$$

Затем из (4.8) и (4.10) получаем

$$\frac{d\bar{f}(t)}{dt} = \frac{\bar{f}(t)}{4t(t^2 + \frac{1}{4})}$$

и находим

$$\overline{f(t)} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \overline{e}_3. \quad (4.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{e}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} (\overline{e}_1 \sin(cv) - \overline{e}_2 \cos(cv)) + \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \overline{e}_3, \\ \overline{e}_3 &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} (\overline{e}_1 \sin(cv) - \overline{e}_2 \cos(cv)) - \frac{1}{2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} \overline{e}_3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Постоянные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ образуют ортонормированный базис. Примем его за базис некоторой декартовой системы координат и найдём координаты x, y, z точки M в этой системе координат. Из (4.8) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{r}}{\partial t} &= -\frac{1}{c} (\overline{e}_1 \cos(cv) + \overline{e}_2 \sin(cv)), \\ \text{т.е.} \quad \overline{r} &= -\frac{1}{c} (\overline{e}_1 \cos(cv) + \overline{e}_2 \sin(cv))t + \overline{\varphi(u, v)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из (4.16) и первого уравнения системы (4.8) находим

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u} = \overline{e}_3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(u, v)} &= \overline{e}_3 u + \overline{\psi(v)}, \\ \frac{d\overline{\psi}}{dv} &= -\frac{1}{2} \overline{e}_3, \quad \psi = -\frac{1}{2} v \overline{e}_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\overline{r} = -\frac{t}{c} (\overline{e}_1 \cos(cv) + \overline{e}_2 \sin(cv)) + (u - \frac{1}{2} v) \overline{e}_3,$$

то есть

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{t}{c} \cos(cv), \\ y &= -\frac{t}{c} \sin(cv), \\ z &= u - \frac{1}{2} v. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} dt &= \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}, \\ dv &= \frac{xdy - ydx}{c(x^2 + y^2)}, \\ du &= dz + \frac{xdy - ydx}{2c(x^2 + y^2)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Подставляя dv и du в (4.1), мы получаем уравнение неголономной плоскости $\omega^3 = 0$ в некоторой неподвижной декартовой системе координат:

$$dz = 2c(x dy - y dx). \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что существует единственное векторное поле

$$\overline{V} (2cx, -2cy, -1),$$

для которого ортогональное пфаффово многообразие является неголономной плоскостью. Скаляр неголономности

$$\rho = \frac{c}{c^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}}.$$

Линии тока векторного поля $\overline{V}$ лежат на цилиндрах $x^2 + y^2 = a^2$ и представляют собой винтовые линии

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \alpha, \\ y &= a \sin \alpha, \\ z &= -\frac{\alpha}{2c}. \end{aligned} \right\} \quad \square$$

Итак, векторное поле $\overline{V}$, для которого ортогональное пфаффово многообразие, представляет собой неголономную плоскость, не имеет особых точек и состоит из касательных векторов винтовых линий, лежащих на круговых цилиндрах с общей осью l . Не только эти винтовые линии, но и ось l является линией тока. Экидирекционных поверхностей [1] поле $\overline{V}$ не имеет, а экидирекционные линии – прямые, параллельные l .

С векторным полем $\overline{V}$ инвариантно связаны два векторных поля: а) векторное поле единичных векторов $\overline{n}$ главных нормалей линий тока поля $\overline{V}$; б) векторное поле единичных векторов $\overline{b}$ бинормалей линий тока поля $\overline{V}$. Для этих полей прямая l является особой прямой. Ортогональные пфаффовы многообразия для полей $\overline{n}$ и $\overline{b}$ голономны.

Пфаффово многообразие, ортогональное полю $\overline{n}$, расслаивается на однопараметрическое семейство вложенных друг в друга круговых цилиндров с общей осью l . Это те цилиндры, на которых лежат линии тока поля $\overline{V}$. Линии тока поля $\overline{n}$ – прямые линии, лежащие в плоскостях, ортогональных прямой l , и в каждой такой плоскости образующие пучок с центром в особой точке, принадлежащей l . Поле $\overline{n}$ имеет экидирекционные поверхности. Они представляют собой пучок плоскостей с осью l .

Пфаффово многообразие, ортогональное полю $\overline{b}$, расслаивается на однопараметрическое семейство геликоидов. Линии тока поля $\overline{b}$ – это винтовые линии, лежащие на тех же цилиндрах, что и линии тока поля $\overline{V}$, но ортогональные последним. Экидирекционных поверхностей поле $\overline{b}$ не имеет. Его экидирекционными линиями являются прямые, параллельные l .

ЛИТЕРАТУРА

1. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
2. Роговой М.Р. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в n -мерном пространстве // Украинский геометрический сборник, вып. 5–6. Харьков, 1968. С. 126–138.
3. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

Статья представлена кафедрой геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 мая 2003 г.