УДК 512.541

И.Л. Фаустова

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 2, ОБЛАДАЮЩИЕ АВТОМОРФИЗМОМ ПОРЯДКА 4 ИЛИ 6

В данной статье описаны квазиразложимые абелевы группы без кручения ранга 2, обладающие автоморфизмом порядка 4 (или порядка 6).

Известно, что если G – группа ранга 2 и φ – ее автоморфизм конечного порядка, то этот порядок равен 2, 3, 4 или 6 [1]. Согласно [2], если порядок φ отличен от 2, то группа G является однородной. Ставится задача – описать такие группы.

Данная статья посвящена квазиразложимым абелевым группам без кручения ранга 2, обладающим автоморфизмом порядка 4 (или 6).

Напомним, что подгруппа A группы G без кручения произвольного ранга квазиравна G, если фактор-группа G/A ограничена, то есть существует такое натуральное n, что $nG \subseteq A \subseteq G$.

Группа G называется квазиразложимой, если она содержит в себе квазиравную подгруппу, разложимую в прямую сумму ненулевых подгрупп.

Пусть G – однородная квазиразложимая группа без кручения ранга 2 нулевого типа, обладающая автоморфизмом φ порядка 4 (или 6). Согласно [3. С. 136], G – вполне разложимая группа, а следовательно, G будет просто свободной группой. Легко видеть, что если $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, то отображение $a \to b$, $b \to -a$, индуцирует автоморфизм φ порядка 4 группы G. Аналогично, отображение $a \to b$, $b \to -a+b$, индуцирует автоморфизм порядка 6. Естественно, возникает вопрос: если G – свободная группа ранга 2 и φ – произвольный ее автоморфизм порядка 4 (или 6), то существует ли такое разложение группы $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, что $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = -a$ (соответственно, $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = -a+b$)? Другими словами, будут ли любые два автоморфизма порядка 4 (или 6) свободной группы ранга 2 сопряжены в группе всех автоморфизмов?

Лемма 1. Пусть G – свободная группа ранга 2 и φ – автоморфизм группы G порядка 4. Тогда существуют такие элементы a' и b' из G, что

$$G = \langle a' \rangle \oplus \langle b' \rangle \text{ и } \varphi(a') = b', \text{ а } \varphi(b') = -a'.$$

Доказательство. Так как G – свободная группа, то G имеет вид

$$G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle.$$

Пусть φ – автоморфизм порядка 4, и относительно этого разложения он задается матрицей вида $\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}$. Базис $\{a', b'\}$, такой, что $G = \langle a' \rangle \oplus \langle b' \rangle$ и $\varphi(a') = b'$, $\varphi(b') = -a'$, существует тогда и только тогда, когда существует такая целочисленная матрица $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ с определителем, равным ± 1, что выполняется равенство

$$T \begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

и в этом случае $a' = t_{11}a + t_{21}b$, $b' = t_{12}a + t_{22}b$.

Таким образом, доказательство сводится к отысканию вышеуказанной целочисленной матрицы T. Равенство (1) эквивалентно следующему равенству:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Так как порядок φ равен 4, то $\varphi^2 = -\varepsilon$.

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

поэтому $\qquad l = -m, \; m^2 + 1 = -nk. \qquad (3)$

Перемножая матрицы в равенстве (2), имеем

$$\begin{pmatrix} t_{11}m + t_{12}k & t_{11}n - t_{12}m \\ t_{21}m + t_{22}k & t_{21}n - t_{22}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{21} & t_{22} \\ -t_{11} & -t_{12} \end{pmatrix},$$

что эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} t_{11}m + t_{12}k = t_{21}, \\ t_{11}n - t_{12}m = t_{22}, \\ t_{21}m + t_{22}k = -t_{11}, \\ t_{21}n - t_{22}m = -t_{12}. \end{cases}$$

Таким образом, доказательство свелось к отысканию такого целочисленного решения этой системы, чтобы определитель матрицы T был равен ± 1. Запишем матрицу коэффициентов этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix} m & k & -1 & 0 \\ n & -m & 0 & -1 \\ 1 & 0 & m & k \\ 0 & -1 & n & -m \end{pmatrix}.$$

Используя (3), легко показать, что ранг этой матрицы равен 2. Находим общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{11} = -mt_{21} - kt_{22}, \\ t_{12} = -nt_{21} + mt_{22}, \end{cases}$$

где t_{21}, t_{22} – свободные неизвестные.

Тогда матрица T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} -mt_{21} - kt_{22} & -nt_{21} + mt_{22} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что свободным неизвестным t_{21}, t_{22} всегда можно придать такие целые значения, что $|T| = \pm 1$, то есть

$$-mt_{21}t_{22} - kt_{22}^2 + nt_{21}^2 - mt_{21}t_{22} = \pm 1.$$

Это уравнение можно рассмотреть как квадратное уравнение $nt_{21}^2 - 2mt_{22}t_{21} - kt_{22}^2 \mp 1 = 0$ относительно t_{21} или как квадратное уравнение

$-kt_{22}^2 - 2mt_{21}t_{22} + nt_{21}^2 \mp 1 = 0$ относительно t_{22}. Задача свелась к тому, чтобы показать, что эти уравнения всегда имеют целочисленное решение, и тогда $|T| = \pm 1$. Легко видеть, что достаточно рассмотреть одно из этих уравнений и ограничиться случаем $|T| = 1$.

Итак, найдем решение уравнения

$$nt_{21}^2 - 2mt_{22}t_{21} - (kt_{22}^2 + 1) = 0 .$$

С учетом условия $m^2 + 1 = -nk$ решения уравнения находятся по формуле

$$T = \frac{mt_{22} \pm \sqrt{n - t_{22}^2}}{n} . \quad (4)$$

Из равенства $m^2 + 1 = -nk$ получаем, что $-nk$ представимо в виде суммы квадратов двух чисел. Из теории чисел известно, что тогда n и $-k$ представимы в виде суммы двух квадратов.

Пусть $\quad n = u^2 + v^2 ,\ -k = s^2 + t^2 . \quad (5)$

Тогда $\quad m^2 + 1 = (us + vt)^2 + (ut - vs)^2 . \quad (6)$

В (4) t_{22} можно положить равным либо v, либо u.

Пусть $t_{22} = v$. Определим значение t_{21}. Из условия (6) и из единственности представления числа в виде суммы двух квадратов вытекает, что существуют следующие возможности:

$$m = us + vt ,\ 1 = ut - vs ,\ t_{22} = v ,$$

тогда

$$T_1 = \frac{mt_{22} + \sqrt{n - t_{22}^2}}{n} = \frac{(us + vt)v + \sqrt{u^2 + v^2 - v^2}}{u^2 + v^2} =$$

$$= \frac{usv + v^2 t + u^2 t - u^2 t + u}{u^2 + v^2} = \frac{t(u^2 + v^2) + u(vs - ut + 1)}{u^2 + v^2} = t,$$

свободным неизвестным t_{21}, t_{22} можно придать следующие значения $t_{22} = v$, $t_{21} = t$, и тогда $t_{11} = -mt - kv$, $t_{12} = -nt + mv$;

$$m = us + vt ,\ 1 = -ut + vs ,\ t_{22} = v , \text{ тогда } T_2 = t ;$$

$$m = -us - vt ,\ 1 = ut - vs ,\ t_{22} = v , T_2 = t , \text{ тогда } T_2 = -t;$$

$$m = -us - vt ,\ 1 = -ut + vs ,\ t_{22} = v , \text{ тогда } T_1 = t .$$

То же самое нужно проверить, поменяв значения m и 1, а также рассмотрев случай $t_{22} = u$. Во всех случаях получаем, что существуют такие целые значения t_{21}, t_{22}, что $|T| = \pm 1$. Лемма доказана.

Итак, для случая, когда автоморфизм φ порядка 4, показано, что всегда существует такая целочисленная матрица T с определителем, равным ± 1, что выполняется равенство (1).

Аналогичное утверждение справедливо для φ порядка 6. А именно, имеет место

Лемма 2. Пусть G – свободная группа ранга 2 и φ – автоморфизм группы G порядка 6. Тогда существуют такие элементы a' и b' из G, что

$$G = \langle a' \rangle \oplus \langle b' \rangle \text{ и } \varphi(a') = b' , \text{ а } \varphi(b') = -a' + b .$$

Доказательство этой леммы проводится аналогичным образом. Заметим только, если порядок φ равен 6, то $\varphi^2 = \varphi - \varepsilon$. Тогда в данном случае условие (3) имеет вид

$$l = 1 - m ,\ m^2 - m + 1 = -nk .$$

Вследствие этого принципиально изменятся условия (5) и (6). А именно,

$$n = x^2 - xy + y^2 ,\ -k = z^2 - zt + t^2 . \quad (5')$$

Легко проверить, что

$$(x^2 - xy + y^2)\ (z^2 - zt + t^2) =$$

$$= (xz - xt - yz)^2 - (xz - xt - yz)(xz - yt) + (xz - yt)^2 .$$

Следовательно,

$$m^2 - m + 1 =$$

$$= (xz - xt - yz)^2 - (xz - xt - yz)(xz - yt) + (xz - yt)^2 . \quad (6')$$

Как следствие этих лемм имеет место

Теорема 3. Пусть G – квазиразложимая группа без кручения ранга 2, внутренний тип $IT(G)$ которой не содержит символов ∞, и пусть G обладает автоморфизмом порядка 4 (или 6). Тогда G вполне разложима, и для любого автоморфизма φ порядка 4 (или 6) существует такое разложение группы $G = \langle a \rangle_* \oplus \langle b \rangle_*$, что $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = -a$ (соответственно, $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = -a + b$).

Доказательство. Поскольку G обладает автоморфизмом порядка 4 (или 6), то она однородная [2]. Так как внутренний тип $IT(G)$ не содержит символов ∞, то из [4] следует, что $G \cong R \otimes_Z G_0$, где R – группа ранга 1 и $\operatorname{type} R = IT(G)$, а G_0 – квазиразложимая группа нулевого типа, а как уже отмечалось выше, она будет просто свободной группой. Поскольку G_0 – свободная группа, то она всегда обладает автоморфизмами порядка 4 (или 6). Следовательно, и группа G обладает такими автоморфизмами.

То, что для любого φ порядка 4 (или 6) существует указанное разложение группы $G_0 = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, следует из лемм 1 и 2. А тогда $(R \otimes \langle a \rangle) \oplus (R \otimes \langle b \rangle)$ будет искомым разложением группы G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожухов С.Ф.* Регулярно полные абелевы группы// Изв. вузов. Матем. 1980. № 12. С. 14–19.
2. *Кожухов С.Ф.* Группы автоморфизмов регулярно полных абелевых групп без кручения / Томский ун-т. Томск, 1977. 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.07.77, № 2790.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.
4. *Warfield R.B.* Homomorfism and duality for tor-sion free groups // Math. Z. 1968. No. 107. P. 189–200.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 15 октября 2003 г.