УДК 368:519

Г.М. Кошкин, Я.Н. Лопухин

ОЦЕНИВАНИЕ НЕТТО-ПРЕМИИ В КОЛЛЕКТИВНОМ СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ

В работе рассматривается задача оценивания нетто-премии в условиях коллективного страхования жизни. Находятся функционалы нетто-премий для известных актуарных распределений и строятся их параметрические оценки. Синтезируются непараметрические оценки подстановки и кусочно-гладкие аппроксимации нетто-премий, исследуются их свойства. Решается задача оптимизации кусочно-гладких аппроксимаций. С помощью статистического моделирования проводится сравнительный анализ оценок при конечных объемах выборок.

Под страхованием жизни принято понимать предоставление страховщиком в обмен на уплату страховых премий гарантии выплатить определенную сумму денег (страховую сумму) страхователю в случае смерти застрахованного или его дожития до определенного срока [1].

Страховой рынок представляет собой совокупность экономических отношений между страховыми компаниями и их клиентами. Специфическим товаром страхового рынка является страховая защита – услуга, предоставляемая страховыми организациями.

Как и всякий товар, страховая услуга имеет свою потребительную стоимость и цену. Потребительная стоимость страховой услуги состоит в обеспечении страховой защиты. В случае наступления страхового события эта страховая защита материализуется в форме страхового возмещения, покрытия убытков пострадавшего лица на условиях договора страхования или в форме страхового обеспечения в страховании жизни. Стоимость страховой услуги (или ее цена) выражается в страховом взносе (тарифе, премии), которую страхователь уплачивает страховщику. Страховая премия устанавливается при подписании договора и остается неизменной в течение срока его действия, если иное не оговорено условиями договора.

Величина премии должна быть достаточна, чтобы:
- покрыть ожидаемые претензии в течение страхового периода;
- создать страховые резервы;
- покрыть издержки страховой компании на ведение дел;
- обеспечить определенный размер прибыли.

Цена страховой услуги, как и всякая рыночная цена, колеблется под влиянием спроса и предложения. Нижняя граница цены определяется равенством между поступлениями платежей от страхователей и выплатами страхового возмещения и страховых сумм по договорам плюс издержки страховой компании. При таком уровне цены страховая компания не получает никакой прибыли по страховым операциям. Естественно, что страхование таких рисков себя не оправдывает.

Верхняя граница цены страховой услуги определяется двумя факторами:
- размерами спроса на нее;
- величиной банковского процента по вкладам.

При достаточно высоком спросе на данную страховую услугу, когда есть массовая потребность в страховании, а число компаний невелико и все они предлагают примерно одинаковые условия страхования, есть возможность в течение какого-то времени поддерживать высокий уровень страховых премий. Однако по мере насыщения страхового рынка со стороны предложения страховых услуг это становится опасным. Столкнувшись с завышением тарифов в одной компании, клиент уйдет в другую. Поэтому на страховом рынке, как и на любом товарном рынке, существует тенденция выравнивания уровней страховых тарифов.

Банковский процент оказывает существенное влияние на страховую деятельность по двум направлениям. Во-первых, тенденции динамики банковского процента в сравнении со страховыми тарифами определяют решения клиента по поводу того, как ему противостоять своим рискам. Вполне возможно, что ссуда, взятая в банке, или накопление в нем денег для самофинансирования могут быть выгоднее, чем страхование. Поэтому страховые компании вынуждены соизмерять размеры страховых тарифов с банковским процентом.

Во-вторых, деньги, полученные страховой компанией в виде страховых платежей и временно свободные до момента выплаты страховых возмещений, не лежат втуне. Они могут и должны использоваться страховщиком в коммерческих целях, инвестироваться в ценные бумаги, в недвижимость, предоставляться в кредит, т. е. приносить инвестиционный доход [2].

Страховая премия как цена страховой услуги имеет определенную структуру, ее отдельные элементы должны обеспечивать финансирование всех функций страховщика. Основными компонентами страховой премии являются: нетто-премия, надбавка на покрытие расходов страховой компании и надбавка на прибыль.

Величина страховой суммы, как правило, выбирается самим страхователем. Ее естественным верхним ограничителем является стоимость страхуемого имущества, и возможности влияния страховщика на этот фактор очень ограничены. Нетто-премию, в соответствии с принципом эквивалентности, рассматривают как ожидаемую величину выплаты, предназначенную для покрытия ущербов. Она представляет собой основную часть брутто-премии (страховой премии), и ее можно выразить как произведение страховой суммы на коэффициент, отражающий степень риска страховщика (нетто-ставку).

Важнейшей задачей в обосновании страховой премии является расчет нетто-премии. Главная проблема состоит в неопределенности ущерба в момент калькуляции, которая должна быть выполнена таким образом, чтобы с высокой вероятностью покрыть в будущем возможные ущербы и обеспечить гарантии выполнения страховых обязательств [3]. Поэтому эффективность финансовой деятельности страховой компании зависит от правильного расчета нетто-премии для различных категорий и возрастных групп населения. Для разрешения этих трудностей была создана актуарная математика – научное направление, основанное на математических методах и моделях в страховании.

ФУНКЦИОНАЛЫ НЕТТО-ПРЕМИЙ

Будем говорить о продолжительности жизни как о случайной величине X. Функция $S(x)=1-F(x)=P(X>x)$ называется функцией выживания и определяет вероятность того, что новорожденный доживет до возраста x лет. Введем обозначения: $f(x)=-S'(x)=F'(x)$ – плотность распределения случайной величины X; $\mu_x=\dfrac{f(x)}{S(x)}$ – интенсивность смертности; $T(x)=X-x$ – остаточное время жизни. Распределением случайной величины $T(x)$ является условное распределение $X-x$ при $X>x$. Плотность $f_x(t)$ остаточного времени жизни $X-x=T(x)$ вычисляется по формуле

$$f_x(t)=\frac{f(x+t)}{S(x)},\ 0\le t\le\infty \qquad [3. С. 16].$$

Согласно основам финансовой математики, некоторая сумма s, например, рублей спустя t лет превратится в $s\,e^{\delta t}$, где δ – процентная ставка. Начнем с долгосрочного индивидуального страхования, простейшим примером которого является полное страхование жизни. В этом случае человек платит страховой компании сумму p, а компания соглашается выплачивать наследникам застрахованного сумму b после его смерти. Хотя премия p гораздо меньше, чем b, компания все-таки получит требуемую сумму b, так как плата за страховку p производится в момент заключения договора, а выплата b – позже. За время $T(x)$ деньги превратятся в сумму $p\,e^{\delta T(x)}$, и доход страховой компании от заключения договора составит $p\,e^{\delta T(x)} - b$.

Чтобы иметь требуемую сумму b в момент смерти застрахованного, страховой компании необходимо получить от него $b\,e^{-\delta T(x)}$ в момент заключения договора. В экономических категориях величина $b\,e^{-\delta T(x)}$ выражает современную или дисконтированную величину будущей страховой выплаты. Так как она является случайной величиной, то, естественно, в качестве нетто-премии взять ее среднее значение [3] $b\,E\{e^{-\delta T(x)}\}$, где E – символ математического ожидания или среднего.

В актуарной науке величина страхового пособия b принимается за единицу измерения денежных сумм, а нетто-премия при полном страховании жизни, равная $E\{e^{-\delta T(x)}\}$, обозначается $\overline{A}_x$:

$$\overline{A}_x = E\{e^{-\delta T(x)}\} = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_x(t)\,dt = \frac{1}{S(x)}\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x+t)\,dt = $$
$$= \frac{1}{S(x)}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,dF(x+t)\,. \qquad (1)$$

После замены переменных $x+t=U$ приведем функционал (1) к виду

$$\overline{A}_x = \frac{1}{S(x)}\int_0^\infty e^{-\delta(U-x)} I(U>x)\,dF(U) = \frac{\Phi(x,\delta)}{S(x)}\,, \qquad (2)$$

где $I(A)$ – индикатор множества A.

Теперь перейдем к случаю коллективного страхования жизни, для которого полезной абстракцией является понятие статуса. Рассмотрим m индивидуумов с возрастами $(x_1,\ldots,x_m) \doteq \mathrm{x}$. Предстоящее время жизни k-го индивидуума обозначим через $T(x_k) = X - x_k$. Совокупности m чисел $T(x_1),\ldots,$ $T(x_m)$ поставим в соответствие статус U со своей продолжительностью жизни $T(U)$.

Двумя самыми распространенными статусами являются статус совместной жизни и статус выживания последнего [4].

Статус совместной жизни обозначается $U := x_1 : \cdots : x_m$ и считается разрушенным, если наступила смерть хотя бы одного из индивидуумов, т.е. $T(U) = \min(T(x_1),\ldots,T(x_m))$. Понятно, что

$$P\{T(U)>t\} = P\{\min(T(x_1),\ldots,T(x_m))>t\} =$$
$$= P\{T(x_1)>t,\ldots,T(x_m))>t\}\,.$$

По аналогии со случаем индивидуального страхования (1) нетто-премия выразится формулой

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m} = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{x_1:\cdots:x_m}(t)\,dt\,,$$

где плотность распределения статуса $x_1 : \cdots : x_m$

$$f_{x_1:\cdots:x_m}(t) = \frac{d}{dt}\bigl(1 - P\{\min(T(x_1),\ldots,T(x_m))>t\}\bigr) =$$
$$= \left(-\frac{S(x_1+t)}{S(x_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{S(x_m+t)}{S(x_m)}\right)_t^{/} = \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t)\prod_{j\ne i} S_{x_j}(t)\,.$$

Здесь $S_x(t) = \dfrac{S(x+t)}{S(x)}$ – функция выживания случайной величины $T(x)$.

Таким образом,

$$\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\sum_{i=1}^m f_{x_i}(t)\prod_{j\ne i} S_{x_j}(t)\right)dt\,. \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что нетто-премия для статуса $x_1 : \cdots : x_m$ меньше суммы нетто-премий $\overline{A}_{x_1},\ldots,\overline{A}_{x_m}$, так как $S_{x_i}(t) \le 1$ для $i = \overline{1,m}$.

По аналогии с (2) нетто-премия

$$\overline{A}_{x_1:\ldots:x_m} = \frac{1}{S(x)}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,dP\{0<\min(X_1-x_1,\ldots,X_m-x_m)\le t\} =$$
$$= \frac{\Phi(x,\delta)}{S(x)}\,, \qquad (4)$$

где $S(x) = P\{\min(X_1-x_1,\ldots,X_m-x_m)>0\}$ – функция выживания статуса $x_1 : \cdots : x_m$.

Статус выживания последнего обозначается $U := \overline{x_1 : \cdots : x_m}$ и считается разрушенным, если все представители коллектива умерли, т.е.

$$T(U) = \max(T(x_1),\ldots,T(x_m))\,.$$

В этом случае

$$P\{T(U)\le t\} = P\{\max(T(x_1),\ldots,T(x_m))\le t\} =$$
$$= P\{T(x_1)\le t,\ldots,T(x_m)\le t\}\,,$$

и по аналогии с (1)

$$\overline{A}_{\overline{x_1:\ldots:x_m}} = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}(t)\,dt\,,$$

$$f_{\overline{x_1:\ldots:x_m}}(t) = \frac{d}{dt}\bigl(P\{\max(T(x_1),\ldots,T(x_m))\le t\}\bigr) =$$
$$= \left(\frac{S(x_1)-S(x_1+t)}{S(x_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{S(x_m)-S(x_m+t)}{S(x_m)}\right)_t^{/} =$$
$$= \sum_{i=1}^m f_{x_i}(t)\prod_{j\ne i} F_{x_j}(t)\,.$$

Окончательно получаем

$$\overline{A}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\sum_{i=1}^m f_{x_i}(t)\prod_{j\ne i} F_{x_j}(t)\right)dt\,. \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что нетто-премия для статуса $\overline{x_1 : \cdots : x_m}$ меньше суммы нетто-премий $\overline{A}_{x_1}, \ldots, \overline{A}_{x_m}$, так как $F_{x_i}(t) \le 1$ для $i = \overline{1, m}$.

По аналогии с (2)

$$\overline{A}_{\overline{x_1 : \ldots : x_m}} = \frac{1}{\overline{S}(x)} \int_0^\infty e^{-\delta t} dP\{0 < \max(X_1 - x_1, \ldots, X_m - x_m) \le t\} =$$

$$= \frac{\overline{\Phi}(x, \delta)}{\overline{S}(x)}, \tag{6}$$

где $\overline{S}(x) = P\{\max(X_1 - x_1, \ldots, X_m - x_m) > 0\}$ – функция выживания статуса $\overline{x_1 : \cdots : x_m}$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕТТО-ПРЕМИЙ

Иногда упрощения расчетов и теоретического анализа аппроксимируют эмпирические данные о функции выживания или интенсивности смертности с помощью простых аналитических формул.

Модель де Муавра. Простейшее приближение было введено в 1729 г. де Муавром, который предположил, что время жизни равномерно распределено на интервале (0, ω), где ω – предельный возраст. Введем для удобства обозначение

$$I_x(a, b] = \begin{cases} 1, \textit{если } x \in (a, b], \\ 0, \textit{если } x \notin (a, b]. \end{cases}$$

В этом случае плотности распределения и функции выживания соответственно задаются формулами

$$f(x) = \frac{I_x(0, \omega)}{\omega}, \; S(x) = I_x(-\infty, \omega) - \frac{x\, I_x(0, \omega)}{\omega},$$

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{I_t(0, \omega - x)}{\omega - x},$$

$$S_x(t) = I_t(-\infty, \omega - x) - \frac{t\, I_t(0, \omega - x)}{\omega - x}.$$

Теперь, подставив последние два выражения в (3) и (5), получим значения нетто-премий рассмотренных выше статусов жизни.

Если параметр ω модели неизвестен, то для случайной m-мерной выборки объема n

$$(X_{11}, \ldots, X_{m1}), \ldots, \; (X_{1n}, \ldots, X_{mn})$$

функция правдоподобия

$$L(X, \omega) = \frac{1}{\omega^{nm}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} I(0 < X_{ij} < \omega),$$

и, следовательно, асимптотически несмещенная оценка максимального правдоподобия для ω равна

$$\hat{\omega} = \max(X_{11}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{1n}, \ldots, X_{mn}).$$

Модель Мейкхама. В 1860 г. Мейкхам предложил приближать интенсивность смертности μ_x функцией вида $A + B e^{\alpha x}$, где параметр A учитывает риски жизни, связанные с несчастными случаями (которые мало зависят от возраста), а слагаемое $B e^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность. В этой модели

$$S(x) = \exp\left\{-A x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right\},$$

$$f(x) = \left[A + B e^{\alpha x}\right] \exp\left\{-A x - \frac{B(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha}\right\},$$

$$f_x(t) = \left(A + B e^{\alpha(x+t)}\right) \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right],$$

$$S_x(t) = \exp\left[-At - \frac{B}{\alpha}\left(e^{\alpha(x+t)} - e^{\alpha x}\right)\right].$$

Вычисление функционалов нетто-премий (3) и (5) для модели Мейкхама проведем методом трапеций. Если параметры A, B, α неизвестны, то они находятся из решения системы уравнений, составленной согласно методу моментов:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}\left(\exp[\alpha x] - 1\right)\right] dx = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \\ \int_0^\infty 2x \exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}\left(\exp[\alpha x] - 1\right)\right] dx = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij}\right)^2, \\ \int_0^\infty 3x^2 \exp\left[-Ax - \frac{B}{\alpha}\left(\exp[\alpha x] - 1\right)\right] dx = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij}\right)^3. \end{cases}$$

Модель Вейбулла. Вейбулл в качестве функции интенсивности смертности μ_x предложил использовать функцию $\frac{\alpha}{\sigma^\alpha} x^{\alpha - 1}$, α ,σ >0. Здесь

$$S(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha\right], \; f(x) = \frac{\alpha}{\sigma^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\alpha\right],$$

$$f_x(t) = \alpha \left(\frac{x+t}{\sigma}\right)^{\alpha - 1} \exp\left[-\frac{(x+t)^\alpha - x^\alpha}{\sigma^\alpha}\right],$$

$$S_x(t) = \exp\left[-\frac{(x+t)^\alpha - x^\alpha}{\sigma^\alpha}\right].$$

Вычисление функционалов нетто-премий (3) и (5) для модели Вейбулла также проводится с помощью метода трапеций. Если параметры α и σ неизвестны, то в соответствии с методом моментов они находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \\ \sigma^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij}\right)^2, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПОДСТАНОВКИ НЕТТО-ПРЕМИЙ

Часто на практике параметрические модели актуарной математики не описывают адекватно наблюдаемую совокупность продолжительностей жизней

$$(X_{11}, \ldots, X_{m1}), \ldots, (X_{1n}, \ldots, X_{mn}). \tag{6'}$$

Также могут возникнуть проблемы с выбором подходящего распределения X и для новых видов страхования. Трудности синтеза оценок нетто-премий в таких ситуациях преодолеваются, если задачу решать в условиях непараметрической априорной неопределенности. В работах [5,6] в качестве оценки функционала (2) по независимым наблюдениям $X_1,...,X_n$ рассматривалась непараметрическая статистика вида

$$\hat{\bar{A}}_x = \frac{1}{n S_n(x)} \sum_{i=1}^{n} e^{-\delta (X_i - x)} I(X_i > x) = \frac{\Phi_n(x,\delta)}{S_n(x)}. \quad (7)$$

Здесь $\Phi_n(x,\delta)$ – оценка функционала $\Phi(x,\delta)$; $S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i > x)$ – эмпирическая функция выживания.

В [5] была найдена главная часть среднеквадратической ошибки (СКО) оценки (7) и показана ее асимптотическая нормальность.

В работах [7 – 9] был рассмотрен случай коллективного страхования двух индивидуумов (m = 2). Были сформулированы и доказаны теоремы об асимптотической несмещенности и нормальности непараметрических оценок подстановки нетто-премий и найдены главные части СКО этих оценок.

Пусть наблюдаемая совокупность (6') есть случайная выборка объема n. Оценим функции распределения

$$P\{\min(X_1 - x_1, \ldots, X_m - x_m) \le t\},$$
$$P\{\max(X_1 - x_1, \ldots, X_m - x_m) \le t\}$$

и функции выживания $S(x)$, $\bar{S}(x)$ непараметрическими оценками

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) \le t),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\max(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) \le t),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) > 0),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\max(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) > 0)$$

соответственно. Тогда

$$\hat{\bar{A}}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \frac{1}{S_n(\mathrm{x})} \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-\delta t} d\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(0 < \min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) \le t)\right) =$$
$$= \frac{1}{S_n(\mathrm{x})}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\bar{\delta}(t - \min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m))dt =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta \min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m)} \times$$
$$\times \frac{I(\min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) > 0))}{S_n(x)} = \frac{\Phi_n(x,\delta)}{S_n(x)}, \quad (8)$$
$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\delta, x) s_i(x)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i(x)},$$

$$\hat{\bar{A}}_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}} = \frac{1}{\bar{S}_n(x)} \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-\delta t} d\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(0 < \max(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) \le t)\right) =$$
$$= \frac{1}{\bar{S}_n(x)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\bar{\delta}(t - \max(X_{1i} - x_1, ..., X_{mi} - x_m))dt =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\delta \max(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m)} \times$$
$$\times \frac{I(\max(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) > 0))}{\bar{S}_n(\mathrm{x})} =$$
$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi_i}(\mathrm{x},\delta)\overline{s_i}(\mathrm{x})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{s_i}(\mathrm{x})} = \frac{\bar{\Phi}_n(\mathrm{x},\delta)}{\bar{S}_n(\mathrm{x})}, \quad (9)$$

где $\bar{\delta}(x)$ – дельта-функция Дирака,

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\min(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) > 0)$$

и $$\overline{S_n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\max(X_{1i} - x_1, \ldots, X_{mi} - x_m) > 0)$$

– эмпирические функции выживания.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ НЕТТО-ПРЕМИЙ

Отметим, что оценки (8) и (9) имеют недостаток: если $S_n(x) = 0$, $\bar{S}_n(x) = 0$, то возникает неопределенность $\frac{0}{0}$, и оценки становятся неработоспособными (особенно это существенно для статуса совместной жизни).

Этот недостаток преодолевается с помощью оценок кусочно-гладких аппроксимаций:

$$\tilde{\bar{A}}_{x_1:\cdots:x_m} = \frac{\hat{\bar{A}}_{x_1:\cdots:x_m}}{\left(1 + \eta_n\left(\hat{\bar{A}}_{x_1:\cdots:x_m}\right)^\tau\right)^\rho}; \quad (10)$$

$$\tilde{\bar{A}}_{\overline{x_1:\ldots:x_m}} = \frac{\hat{\bar{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}}{\left(1 + \eta_n\left(\hat{\bar{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}\right)^\tau\right)^\rho}, \quad (11)$$

где $\tau > 0,\ \rho > 0,\ \tau\rho \ge 1,\ \eta_n = O(n^{-1})$.

СВОЙСТВА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК НЕТТО-ПРЕМИЙ

Приведем необходимые обозначения, определение и теоремы 1 – 3 согласно [10, 11]: функция

$$H(\varphi): R^s \to R^1,$$

где $$\varphi = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x))$$

– s-мерная ограниченная функция;

$$H_j(\varphi) = \frac{\partial H(\varphi)}{\partial \varphi_j},\ j = \overline{1,s},$$

$$\nabla H(\varphi) = (H_1(\varphi), \ldots, H_2(\varphi));$$

T – символ транспонирования; $t_n=(t_{1n},\ldots,t_{sn})$ – s-мерная векторная статистика с компонентами

$$t_{jn}=t_{jn}(x)=t_{jn}(x,X_1,\ldots,X_n)\,,\ j=\overline{1,s}\,;$$

$\|t_n\|=\sqrt{t_{1n}^2+\ldots+t_{sn}^2}$ – евклидова норма вектора t_n; $t=t(x)=(t_1(x),\ldots,t_s(x))$ – ограниченная вектор-функция; $\Rightarrow$ – символ слабой сходимости (сходимость по распределению) последовательности случайных величин или векторов; $N\{\mu,\sigma\}$ – s-мерная случайная величина, распределенная нормально со средним $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_s)$ и симметричной ковариационной матрицей $\sigma=\|\sigma_{ij}\|$, $0<\sigma_{jj}=\sigma_{jj}(x)<\infty$, $j=\overline{1,s}$, N и N^+ – множества натуральных и четных натуральных чисел соответственно.

Определение. Функция $H(z):R^s\to R^1$ и последовательность функций $\{H(t_n)\}$ принадлежат классу $\mathrm{N}_{\nu,s}(t)$, если

1) существует ε-окрестность

$$\left\{z:|z_i-t_i|<\varepsilon;\ i=\overline{1,s}\right\},$$

в которой функция $H(z)$ и все ее частные производные до ν-го порядка включительно непрерывны и ограничены;

2) для всевозможных значений величин $X_1,\ldots,X_n$ последовательность $\{|H(t_n)|\}$ мажорируется числовой последовательностью

$$C_0 d_n^{\gamma}\,,\ d_n\uparrow\infty\,,\ n\to\infty\,,\ 0\le\gamma<\infty\,.$$

Теорема 1 [10]. Пусть 1) $H(z)$, $\{H(t_n)\}\in\mathrm{N}_{2,s}(t)$; 2) $E\|t_n-t\|^i=O(d_n^{-i/2})$ $i=1,2$. Тогда для любого $k\in N$

$$\left|E\left[H(t_n)-H(t)\right]^k-E\left[\nabla H(t)(t_n-t)\right]^k\right|=$$

$$=O(d_n^{-(k+1)/2})\,. \tag{12}$$

Сформулируем теорему, аналогичную по смыслу теореме 1, для кусочно-гладких аппроксимаций. Обозначим

$$\tilde\psi(z,\eta)=\frac{H(z)}{\left(1+\eta|H(z)|^{\tau}\right)^{\rho}},$$

где $\tau>0$, $\rho>0$, $\rho\tau\ge1$, $\eta>0$. Введем для пары (τ,k) и $l\in N$ множество

$$T(l)=\left\{(\tau,k):\tau(l)=2k/(l-k-1),\right.$$

$$\left.l\ge l_0=[3,k=1;2k,k\ge2,k\in N]\right\}.$$

Теорема 2 [10]. Пусть 1) $H(z)$, $\{H(t_n)\}\in\mathrm{N}_{2,s}(t)$; 2) $E\|t_n-t\|^i=O(d_n^{-i/2})$; 3) $\eta=\eta_n=\tilde C n^{-1}$, $0<\tilde C<\infty$; 4) $H(t)\ne0$ или $\tau\in N^+$. Тогда для любых $(\tau,k)\in T(l)$

$$\left|E\left[\tilde\psi(t_n,\eta)-H(t)\right]^k-E\left[\nabla H(t)(t_n-t)\right]^k\right|=O(d_n^{-(k+1)/2})\,.$$

Теорема 3 [11]. Если для некоторой числовой последовательности $q_n\uparrow\infty$ случайный вектор $q_n(t_n-\varphi)\Rightarrow N_s\{\mu,\sigma\}$, функция $H(t)\in N_{1,s}(\varphi)$, $\nabla H(t)\ne0$, то случайная величина

$$q_n(H(t_n)-H(t))\Rightarrow N_1\left\{\nabla H(\varphi)\mu^T,\nabla H(\varphi)\sigma\nabla H^T(\varphi)\right\}.$$

Для непараметрических оценок подстановки (5) и (6) справедливы следующие результаты.

Теорема 4. Если непрерывная функция выживания $S(x)\ne0$, то оценка нетто-премии $\hat{\bar A}_{x_1:x_2:\cdots:x_m}$ является асимптотически несмещенной, а ее СКО

$$u^2(\hat{\bar A}_{x_1:x_2:\cdots:x_m})=\frac{\Phi(x,2\delta)S(x)-\Phi^2(x,\delta)}{n\,S^3(x)}+O\left(n^{-3/2}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1, в обозначениях которой

$$s=2,\ t_n=(t_{1n},t_{2n})\,,$$

где

$$t_{1n}=\Phi_n(x,\delta)\,,\ t_{2n}=S_n(x)\,,$$

$$H(t_n)=\frac{t_{1n}}{t_{2n}}=\frac{\Phi_n(x,\delta)}{S_n(x)}=\hat{\bar A}_{x_1:x_2:\cdots:x_m}\,,$$

$$t=(t_1,t_2)=(\Phi(x,\delta),S(x))\,,$$

$$H(t)=\frac{t_1}{t_2}=\bar A_{x_1:x_2:\cdots:x_m}\,,\ d_n=n\,.$$

Далее, согласно лемме 3.1 из [12], имеем

$$E|\Phi_n(x,\delta)-\Phi(x,\delta)|^i=O\left(n^{-i/2}\right),$$

$$E|S_n(x)-S(x)|^i=O\left(n^{-i/2}\right).$$

Пусть в соотношении (12) $k=1$. Тогда

$$E\left\{\hat{\bar A}_{x_1:\cdots:x_m}\right\}=\bar A_{x_1:\cdots:x_m}+\frac{1}{S(x)}E\{\Phi_n(x,\delta)-\Phi(x,\delta)\}-$$

$$-\frac{\Phi(x,\delta)}{S^2(x)}E\{S_n(x)-S(x)\}+O\left(\frac1n\right).$$

Так как функции $\Phi(x,\delta)$ и $S(x)$ непрерывны относительно своих аргументов $x_1,x_2,\ldots,x_m$ то

$$E\{\Phi_n(x,\delta)\}=\Phi(x,\delta)\,,\ E\{S_n(x)\}=S(x)$$

и

$$E\left\{\hat{\bar A}_{x_1:\cdots:x_m}\right\}=\bar A_{x_1:\cdots:x_m}+O\left(\frac1n\right),$$

т.е. $\hat{\bar A}_{x_1:\cdots:x_m}$ – асимптотически несмещенная оценка.

Теперь, положив $k=2$, с учетом несмещенности $\Phi_n(x,\delta)$ и $S_n(x)$, получаем

$$u^2(\hat{\bar A}_{x_1:\cdots:x_m})=\frac{1}{S^2(x)}D\{\Phi_n(x,\delta)\}+\frac{\Phi^2(x,\delta)}{S^2(x)}D\{S_n(x)\}-$$

$$-2\frac{\Phi(x,\delta)}{S^2(x)}\mathrm{cov}\{\Phi_n(x,\delta),S_n(x)\}+O\left(n^{-3/2}\right). \tag{13}$$

Учитывая случайность выборки (6’), найдем выражения для дисперсий и ковариации:

$$D\{\Phi_n(x,\delta)\} = D\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x,\delta)\right\} = \frac{1}{n}D\{\varphi_1(x,\delta)\} =$$

$$= \frac{1}{n}(E\{\varphi_1(x,2\delta)\} - E^2\{\varphi_1(x,\delta)\}) =$$

$$= \frac{1}{n}(\Phi(x,2\delta) - \Phi^2(x,\delta)),$$

$$D\{S_n(x)\} = D\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i(x)\right\} = \frac{1}{n}S(x)(1-S(x)),$$

$$\operatorname{cov}\{\Phi_n(x,\delta), S_n(x)\} = \frac{1}{n}\operatorname{cov}\{\varphi_1(x,\delta), s_1(x)\} =$$

$$= \frac{1}{n}\Phi(x,\delta)(1-S(x))$$

Подставляя полученные выражения в (13), приходим к утверждению доказываемой теоремы.

Теорема 5. Если непрерывная функция выживания $\overline{S}(x) \neq 0$, то оценка нетто-премии $\hat{\hat{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}$ является асимптотически несмещенной, а ее СКО

$$u^2(\hat{\hat{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}) = \frac{\overline{\Phi}(x,2\delta)\overline{S}(x) - \overline{\Phi}^2(x,\delta)}{n\overline{S}^3(x)} + O\left(n^{-3/2}\right).$$

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

Аналогичные по смыслу результаты справедливы и для кусочно-гладких аппроксимаций (10) и (11).

Теорема 6. Если непрерывная функция выживания $S(x) \neq 0$, $\eta_n = \tilde{C}n^{-1}$, $\tilde{C} < \infty$, то оценка нетто-премии $\tilde{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}$ является асимптотически несмещенной, а ее СКО $u^2(\tilde{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}) = \dfrac{\Phi(x,2\delta)S(x) - \Phi^2(x,\delta)}{nS^3(x)} + O\left(n^{-3/2}\right).$

Теорема 7. Если непрерывная функция выживания $\overline{S}(x) \neq 0$, $\eta_n = \tilde{C}n^{-1}$, $\tilde{C} < \infty$, то оценка нетто-премии $\tilde{\hat{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}$ является асимптотически несмещенной, а ее СКО $u^2(\tilde{\hat{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}) = \dfrac{\overline{\Phi}(x,2\delta)\overline{S}(x) - \overline{\Phi}^2(x,\delta)}{n\overline{S}^3(x)} + O\left(n^{-3/2}\right).$

Доказательства теорем 6 и 7 основаны на использовании теоремы 2 и проводятся аналогично доказательствам теорем 4 и 5.

При определенных условиях оценки подстановки (8) и (9) распределены асимптотически нормально

Теорема 8. Если непрерывная функция выживания $S(x) \neq 0$, то

$$\sqrt{n}\left[\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m} - A_{x_1:\cdots:x_m}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N_1\left\{0, \frac{\Phi(x,2\delta)S(x) - \Phi^2(x,\delta)}{nS^3(x)}\right\}.$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 3 имеем

$$\nabla H(\varphi) = (H_1, H_2),\ H_1 = \frac{\partial H(t)}{\partial t_1} = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{S(x)},$$

$$H_2 = -\frac{t_1}{t_2^2} = -\frac{\Phi(x,\delta)}{S^2(x)},\ q_n = \sqrt{n}.$$

Так как $S(x) \neq 0$, то функция $H(t) \in N_{2,S}(t)$. Далее,

$$E\{S_n(x)\} = S(x),\ E\{\Phi_n(x,\delta)\} = \Phi(x,\delta),$$

т.е. $\mu^T = 0$; $\sigma_{11} = \Phi(x,2\delta) - \Phi^2(x,\delta)$,

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \Phi(x,\delta)(1-S(x)),\ \sigma_{22} = S(x)(1-S(x)).$$

Поэтому

$$\nabla H(t)\mu^T = 0,\ \nabla H(t)\sigma\nabla H^T(t) =$$

$$= \frac{\Phi(x,2\delta)S(x) - \Phi^2(x,\delta)}{S^3(x)}.$$

Теорема 9. Если непрерывная функция выживания $\overline{S}(\mathrm{x}) \neq 0$, то

$$\sqrt{n}\left[\hat{\hat{A}}_{\overline{x_1:\cdots:x_m}} - A_{\overline{x_1:\cdots:x_m}}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N_1\left\{0, \frac{\overline{\Phi}(x,2\delta)\overline{S}(x) - \overline{\Phi}^2(x,\delta)}{n\overline{S}^3(x)}\right\}.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 8.

ОПТИМИЗАЦИЯ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОЦЕНОК НЕТТО-ПРЕМИЙ

Отметим, что формально оценка кусочно-гладкой аппроксимации нетто-премии статуса $x_1:\cdots:x_m$ для случая $\rho = 1$ получается методом регуляризации А.Н.Тихонова из минимума сглаживающегося функционала $Q = [\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m} - \hat{A}_{x_1:\cdots:x_m}]^2 + \alpha\,\hat{\hat{A}}^2_{x_1:\cdots:x_m}$:

$$\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}(\alpha) = \arg\min_{\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}} Q = \frac{\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m}}{1+\alpha}. \qquad (14)$$

Смещение, дисперсия и СКО $\tilde{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}(\alpha)$ соответственно задаются выражениями:

$$b(\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}) = E\{\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}\} - \overline{A}_{x_1:\cdots:x_m} =$$
$$= \frac{b(\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m}) - \alpha\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m}}{1+\alpha},$$

$$D\{\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}\} = \frac{D\{\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m}\}}{(1+\alpha)^2},\ u^2(\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m}) =$$

$$= \frac{u^2(\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m}) - 2\alpha b(\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m})\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m} + \alpha^2\overline{A}^2_{x_1:\cdots:x_m}}{(1+\alpha)^2}.$$

Сравнивая оценку (9) и выражение (14), получаем, что при $\rho = 1$

$$\alpha = \eta\left|\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m}\right|^{\tau}. \qquad (15)$$

Выразив α из уравнения $\dfrac{\partial u^2(\hat{\hat{A}}_{x_1:\cdots:x_m})}{\partial\alpha} = 0$, с привлечением (15) получим

$$\alpha^* = \frac{u^2(\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m}) + b(\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m})\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m}}{\overline{A}^2_{x_1:\cdots:x_m} + b(\hat{A}_{x_1:\cdots:x_m})\overline{A}_{x_1:\cdots:x_m}}.$$

Таким образом, каждому значению оцениваемой функции $\overline{A}_{x_1:\dots:x_m}$ отвечает оптимальное значение параметра

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{u^2(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}) + b(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\overline{A}_{x_1:\dots:x_m}}{\left|\overline{A}_{x_1:\dots:x_m}\right|^{\tau}[\overline{A}^2_{x_1:\dots:x_m} + b(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\overline{A}_{x_1:\dots:x_m}]}, \quad (16)$$

и оптимальная оценка равна

$$\hat{\overline{\overline{A}}}_{x_1:\dots:x_m}(\eta_{\text{opt}}) = \frac{\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}}{1+\eta_{\text{opt}}\left|\overline{A}_{x_1:\dots:x_m}\right|^{\tau}}.$$

Теорема 10. Если непрерывная функция выживания $S(x) \neq 0$, то оценка нетто-премии $\hat{\overline{\overline{A}}}_{x_1:\dots:x_m}(\eta_{\text{opt}})$ является асимптотически несмещенной**,** а ее СКО
$u^2(\hat{\overline{\overline{A}}}_{x_1:\dots:x_m}(\eta_{\text{opt}})) = \dfrac{\Phi(x,2\delta)S(x) - \Phi^2(x,\delta)}{n S^3(x)} + O\left(n^{-3/2}\right).$

Поскольку $\eta_{\text{opt}} = \tilde{C}\, n^{-1}$, $0 < \tilde{C} < \infty$, доказательство теоремы 10 аналогично доказательству теоремы 4 [7].

При $\rho = 1$ и $\tau = 4$ оптимальная последовательность η_{opt} примет вид

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{u^2(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}) + b(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\overline{A}_{x_1:\dots:x_m}}{\overline{A}^6_{x_1:\dots:x_m} + b(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\overline{A}^5_{x_1:\dots:x_m}}. \quad (17)$$

Рассмотрим задачу построения оценок оптимальных последовательностей (16) и (17). Например, в качестве оценки (17) можно взять:

$$\hat{\eta}_{\text{opt}} = \frac{\hat{u}^2(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}) + \hat{b}(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}}{\hat{\overline{A}}^6_{x_1:\dots:x_m} + \hat{b}(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\hat{\overline{A}}^5_{x_1:\dots:x_m}}.$$

Оценку главной части СКО найдем, используя теоремы [10]:

$$\hat{u}^2(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}) = \frac{\Phi_n(x,2\delta)S_n(x) - \Phi_n^2(x,\delta)}{n S_n^3(x)} +$$
$$+\frac{1}{S_n^4(x)n^3}\left[\left(-\frac{1}{S_n(x)} + 2 - S_n(x)\right)\Phi_n^2(x,\delta) + \right.$$
$$+\Phi_n(x,2\delta)\left(1-S_n(x)\right)^2 + (n-1)\left(1-S_n(x)\right)\times$$
$$\left.\times\left(S_n(x)\Phi_n(x,2\delta) - \Phi_n^2(x,\delta)\right)\right].$$

Оценку смещения непараметрической оценки подстановки нетто-премии $\hat{b}(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})$ можно получить по методу Кенуя, основанному на последовательном удалении одной из точек $(X_{1i},\dots X_{mi})$, $i = \overline{1,n}$, и пересчете оценки по оставшейся выборке. Удаление точки $(X_{1i},\dots X_{mi})$ из совокупности данных приводит к соответствующему пересчитанному значению статистики

$$\hat{\overline{A}}_{(i)} = \frac{\frac{1}{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}\varphi_i(x,\delta)s_i(x) + \frac{1}{n-i}\sum_{j=i+1}^{n}\varphi_i(x,\delta)s_i(x)}{\frac{1}{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}s_i(x) + \frac{1}{n-i}\sum_{j=i+1}^{n}s_i(x)}.$$

Пусть $\hat{\overline{A}}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^{n}\hat{\overline{A}}_{(i)}$. Тогда

$$\hat{b}(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}) = (n-1)(\hat{\overline{A}}_{(\cdot)} - \hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}).$$

Эта оценка смещения имеет порядок $O(n^{-2})$ [13].

Рассмотрим свойства оценки

$$\hat{\overline{\overline{A}}}_{x_1:\dots:x_m}(\hat{\eta}_{\text{opt}}) = \frac{\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}}{1+\hat{\eta}_{\text{opt}}\left|\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}\right|^{\tau}}, \quad (18)$$

где $\hat{\eta}_{\text{opt}} = \dfrac{\hat{u}^2(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}) + \hat{b}(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m}}{\hat{\overline{A}}^6_{x_1:\dots:x_m} + \hat{b}(\hat{\overline{A}}_{x_1:\dots:x_m})\hat{\overline{A}}^5_{x_1:\dots:x_m}}$.

Поскольку условие $\hat{\eta} = \hat{\eta}_n = \tilde{C}\, n^{-1}$, $0 < \tilde{C} < \infty$ выполняется, то теорема 5 справедлива и для $\hat{\overline{\overline{A}}}_{x_1:\dots:x_m}(\hat{\eta}_{\text{opt}})$.

При оптимизации параметров кусочно-гладкой аппроксимации оценки нетто-премии в случае $\overline{x_1:\dots:x_m}$ следует использовать

$$\hat{\overline{\overline{A}}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}}(\hat{\eta}_{\text{opt}}) = \frac{\hat{\overline{A}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}}}{1+\hat{\eta}_{\text{opt}}\left|\overline{A}_{\overline{x_1:\dots:x_m}}\right|^{\tau}}, \quad (19)$$

где $\hat{\eta}_{\text{opt}} = \dfrac{\hat{u}^2(\hat{\overline{A}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}}) + \hat{b}(\hat{\overline{A}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}})\hat{\overline{A}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}}}{\hat{\overline{A}}^6_{\overline{x_1:\dots:x_m}} + \hat{b}(\hat{\overline{A}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}})\hat{\overline{A}}^5_{\overline{x_1:\dots:x_m}}}$,

$$\hat{u}^2(\hat{\overline{\overline{A}}}_{\overline{x_1:\dots:x_m}}(\hat{\eta}_{\text{opt}})) = \frac{\overline{\Phi}_n(x,2\delta)\overline{S}_n(x) - \overline{\Phi}_n^2(x,\delta)}{n\overline{S}_n^3(x)} + \frac{1}{\overline{S}_n^4(x)n^3}\times$$
$$\times\left[\left(-\frac{1}{\overline{S}_n(x)} + 2 - \overline{S}_n(x)\right)\overline{\Phi}_n^2(x,\delta) + \overline{\Phi}_n(x,2\delta)\left(1-\overline{S}_n(x)\right)^2 + \right.$$
$$\left.+(n-1)\left(1-\overline{S}_n(x)\right)\left(\overline{S}_n(x)\overline{\Phi}_n(x,2\delta) - \overline{\Phi}_n^2(x,\delta)\right)\right],$$

а смещение находится аналогично по методу Кенуя.

РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На базе пакета прикладных программ Mathcad2001 с помощью статистического моделирования проводился сравнительный анализ свойств параметрических оценок нетто-премий для моделей де Муавра, Мейкхама, Вейбулла и непараметрических оценок нетто-премий (оценок подстановки (8), (9) и кусочно-гладких аппроксимаций (18), (19)).

Рассматривался случай коллективного страхования трех индивидуумов (m = 3). Случайные выборки $(X_{11}, X_{21}, X_{31}),\dots,(X_{1n}, X_{2n}, X_{3n})$ объемов n = 10, 50, 100 и 500 моделировались из распределения Мейкхама с параметрами A = 0,0007, B = 0,00005, $\alpha = \ln(10^{0,04})$.

Рассмотренные оценки нетто-премий сравним с помощью эмпирических СКО, вычисляемых по формулам

$$u_n^2(\hat{\bar{A}}_{x_1:x_2:x_3}) = \frac{1}{w^3} \sum_{i,j,k=1}^{w} \left(\hat{\bar{A}}_{ijk} - \bar{A}_{ijk} \right)^2 ,$$

$$u_n^2(\hat{\bar{A}}_{\overline{x_1:x_2:x_3}}) = \frac{1}{w^3} \sum_{i,j,k=1}^{w} \left(\hat{\bar{A}}_{\overline{ijk}} - \bar{A}_{\overline{ijk}} \right)^2 ,$$

где $w = 90$.

Результаты статистического моделирования, представленные в таблице, усредняются по 50 выборкам.

n	10	50	100	500
$u_n^2(\bar{A}_{x_1:x_2:x_3}(\hat{\omega}))$	0,026124	0,021034	0,0209453	0,019734
$u_n^2(\bar{A}_{x_1:x_2:x_3}(\hat{A},\hat{B},\hat{\alpha}))$	0,003335	0,001988	0,001072	0,000731
$u_n^2(\bar{A}_{x_1:x_2:x_3}(\hat{\alpha},\hat{\sigma}))$	0,020123	0,010941	0,007512	0,006419
$u_n^2(\hat{\bar{A}}_{x_1:x_2:x_3})$	0,015587	0,003418	0,001038	0,000452
$u_n^2(\tilde{\bar{A}}_{x_1:x_2:x_3})$	0,005658	0,001731	0,000635	0,000137
$u_n^2(\bar{A}_{\overline{x_1:x_2:x_3}}(\hat{\omega}))$	0,022876	0,018965	0,018435	0,018010
$u_n^2(\bar{A}_{\overline{x_1:x_2:x_3}}(\hat{A},\hat{B},\hat{\alpha}))$	0,002513	0,001234	0,000936	0,000534
$u_n^2(\bar{A}_{\overline{x_1:x_2:x_3}}(\hat{\alpha},\hat{\sigma}))$	0,015273	0,009543	0,006073	0,005921
$u_n^2(\hat{\bar{A}}_{\overline{x_1:x_2:x_3}})$	0,012945	0,002387	0,000816	0,000241
$u_n^2(\tilde{\bar{A}}_{\overline{x_1:x_2:x_3}})$	0,003123	0,000965	0,000413	0,000114

Значения эмпирической СКО для модели де Муавра (1 и 6 строка в таблице) показывают, что данная модель неадекватно описывает процесс смертности индивидуумов, поскольку использует нереалистичное предположение о постоянстве кривой смертей.

Модель Мейкхама уже при малых объемах выборок дает на порядок лучшие результаты по сравнению с указанными выше моделями; это объясняется тем, что выборки были сгенерированы как раз из распределения Мейкхама. Однако при объемах выборок n>100 значительного улучшения в качестве оценивания не наблюдается.

Модель Вейбулла, хотя и проигрывает модели Мейкхама, но дает лучшие результаты, чем модель де Муавра. Оценивание параметров модели Вейбулла гораздо проще, чем у модели Мейкхама.

Важно отметить, что кусочно-гладкие аппроксимации (18), (19) имеют меньшие эмпирические СКО по сравнению с непараметрическими оценками подстановки (8), (9) соответственно. Эта особенность наиболее ярко проявляется при малых объемах выборок.

Отметим, что, согласно [14], при смене распределения непараметрические оценки проявляют адаптивность, причем при объемах выборок, больших некоторого критического значения, они по критерию эмпирических СКО начинают превосходить параметрические оценки, каждая из которых ориентирована на наилучший результат только для своего распределения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа предлагает решение проблемы оценивания нетто-премии в страховании жизни человека в условиях коллективного страхования. Были получены следующие результаты:

1) Выведены формулы для нахождения численных значений функционалов нетто-премий статусов совместной жизни и выживания последнего, (3) и (5), в моделях де Муавра, Мейкхама и Вейбулла и построены оценки параметров для этих распределений.

2) Синтезированы оценки функционалов нетто-премий (3) – (6) в случае непараметрической априорной неопределенности (оценки (9) – (12)), сформулированы и доказаны теоремы об асимптотической несмещенности непараметрических оценок подстановки нетто-премий (9), (10) и их кусочно-гладких аппроксимаций (11), (12). Найдены главные части СКО непараметрических оценок (9) – (12). Показана асимптотическая нормальность оценок (9), (10).

3) Проведена оптимизация параметров кусочно-гладкой аппроксимации оценок нетто-премий (11), (12) методом регуляризации Тихонова.

4) Проведен сравнительный анализ при конечных объемах выборок с помощью статистического моделирования оценок нетто-премий.

По результатам работы предлагаются рекомендации по расчетам нетто-премий в страховании жизни:

1) в случае неизвестных законов распределения продолжительностей жизней человеческих индивидуумов предпочтительнее использовать непараметрические оценки нетто-премии;

2) если объем выборки небольшой $n \le 100$, то лучшие результаты дают кусочно-гладкие аппроксимации (как более точные оценки), при больших объемах выборки можно использовать непараметрические оценки подстановки (как более простые в вычислениях);

3) при коллективном страховании с увеличением числа индивидуумов в группе m применение непараметрических оценок нетто-премий приводит к более ощутимым выигрышам в точности оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисов С.Э.* Личное страхование. М.: Финансы и статистика, 1996. 94 с.
2. *Основы* страховой деятельности. М.: Изд-во БЕК, 2001. 768 с.
3. *Фалин Г.И.*, *Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994, 86 с.
4. *Bowers N.L.*, *Gerber H.U.*, *Hickman J.C.*, *et al.* Actuarial Mathematics. Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
5. *Koshkin G. M.* On Estimation of Distribution Functionals in the Complex Models of Insurance under Uncertainty Conditions // Proceedings of the Conference CSIT (August 17–22, 1999). Erevan: National Academy of Science of Armenia. 1999. P.138–142.
6. *Кошкин Г.М.*, *Лопухин Я.Н.* Сравнительный анализ параметрических и непараметрических оценок нетто-премий // Тез. докл. Сибирской науч.-практич. конф. (18–19 ноября 2000 г., Анжеро-Судженск). Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2000. Ч.1. С.57–59.
7. *Lopukhin Ya.N.*, *Koshkin G.M.* On estimation of net premium in collective life insurance // The 5th Korea-Russian International Symposium on Science and Technology (June 26 – July 3, 2001, Tomsk, Russia). Proceedings. KORUS 2001. V.2. Tomsk: Tomsk Polytechnic University, 2001. P.296–299.
8. *Koshkin G.M.*, *Lopukhin Ya.N.* Estimation of Net Premiums in Collective Models of Life Insurance // XIth Annual International AFIR Colloquium (September 6-7, 2001). Toronto, Canada: Canadian Institute of Actuaries, 2001. P.447–457.

9. *Koshkin G.M.*, *Lopukhin Ya.N.* Nonparametric Estimation of Net Premiums in Collective Insurance // Computer Data Analysis and Modeling: Robustness and Computer Intensive Methods: Proceedings of the Sixth International Conference (September 10-14, 2001, Minsk). V.1: A-K / Ed. by Prof. Dr. S. Aivazyan, Prof. Dr. Yu. Kharin and Prof. Dr. H.Rieder. Minsk: BSU, 2001. P.236–241.
10. *Кошкин Г.М.* Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 3. С. 604–618.
11. *Добровидов А.В.*, *Кошкин Г.М.* Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, 1997. 336 с.
12. *Ибрагимов И.А.*, *Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.
13. *Эфрон Б.* Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М.: Финансы и Статистика, 1988. 262 с.
14. *Кошкин Г.М.*, *Лопухин Я.Н.* Сравнение параметрических и непараметрических оценок нетто-премий в коллективном страховании // Новые технологии и комплексные решения: наука, образование, производство. Материалы Всерос. науч.-практич. конф. (19 октября 2001 г., Анжеро-Судженск). Часть II (Математика). Анжеро-Судженск: Изд-во Кем. ун-та, 2001. С.39–42.

Статья представлена кафедрой теоретической кибернетики Томского государственного университета и отделом проблем информатизации ТНЦ СО РАН, поступила в научную редакцию 9 июля 2003 г.