УДК 658.512

Ю.И. Параев

ЗАДАЧА ПРОИЗВОДСТВА, ХРАНЕНИЯ И СБЫТА ТОВАРА КАК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА

Динамическая задача управления процессом производства, хранения и сбыта товара рассматривается как кооперативная игра или как двухкритериальная задача оптимального управления. Предполагается, что товаропроизводитель управляет процессом производства, а покупатель – процессом покупки. Найдено решение задачи. Получены необходимые условия, при которых товаропроизводитель и покупатель имеют положительную прибыль.

Возможность использования математических методов для исследования экономических процессов в сильной степени зависит от разработанности, сложности и адекватности соответствующих математических моделей. В последнее время появились работы, связанные с так называемым динамическим маркетингом, когда экономические процессы описываются дифференциальными уравнениями. Так, в [1] приведена динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса. В [2] эта модель получила дальнейшее развитие. В [3] для модели, предложенной в [1], решена задача оптимального производства, хранения и сбыта товара. В [4] эта же задача решена с учетом того, что темп продажи зависит от количества средств у покупателя.

В рассматриваемой в этих работах математической модели взаимодействие между товаропроизводителем и покупателем определяется темпом продажи, который зависит от цены товара, назначаемой производителем, от количества товара у того и другого, а также от коэффициента покупательной способности. При этом роль покупателя товара является пассивной. Однако можно предположить, что от покупаемого товара он получает какую-то выгоду. Например, он может использовать товар как сырье для своего производства или просто перепродавать его по новой цене. Поэтому покупатель может выбирать такую политику покупки, чтобы максимизировать свою выгоду. Вследствие этого можно поставить двухкритериальную задачу управления. Подобная задача решена в [5,6], где предполагается, что товаропроизводитель управляет процессом производства и назначает цену товара, а покупатель определяет коэффициент покупательной способности. В настоящей работе проводится дальнейшее обобщение задачи. Предполагается, что товаропроизводитель управляет процессом производства и назначает цену товара. Покупатель товара имеет возможность перепродавать его, за счет чего он и получает свою выгоду. Другими словами, покупатель управляет процессами покупки и перепродажи и устанавливает цену перепродажи товара. При этом оба участника сделки стремятся максимизировать свою выгоду. Вследствие этого возникает двухкритериальная или игровая задача.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $x(t)$ – количество товара на складе у производителя, $z(t)$ – количество товара на складе у покупателя. Процесс изменения этих величин можно описать уравнениями

$$\dot{x} = u - P_1, \qquad x(0) = 0, \tag{1.1}$$

$$\dot{z} = P_1 - P_2, \qquad z(0) = 0, \tag{1.2}$$

где $u(t)$ – темп производства; $P_1(t)$ – темп покупки; $P_2(t)$ – темп перепродажи товара, т.е. $u(t)\Delta t$ – количество товара, произведенного за время Δt; $P_1(t)\Delta t$ и $P_2(t)\Delta t$ – количество товара, купленного и перепроданного за это же время. Из смысла задачи переменные $x(t)$ и $z(t)$, а также все вводимые ниже параметры должны быть неотрицательными.

Пусть весь процесс продолжается в течение некоторого конечного интервала времени $[0,T]$, и пусть c_1 и c_2 – цены единицы покупаемого и перепродаваемого товара соответственно. Себестоимость производимого товара принимается за 1. Если c_1=1, то товар покупается по себестоимости. Прибыли товаропроизводителя (игрок 1) и покупателя-перекупщика (игрок 2) соответственно равны

$$J_1 = \int_0^T (c_1 P_1 - u - k_1 x)dt,$$

$$J_2 = \int_0^T (c_2 P_2 - c_1 P_1 - k_2 z)dt, \tag{1.3}$$

где k_1 и k_2 – затраты на хранение единицы товара у игрока 1 и 2 соответственно. Предполагается, что цены c_1 и c_2 постоянны, причем цену c_1 устанавливает игрок 1 (возможно по согласованию с другим игроком), а цену c_2 – какое-то третье лицо. При этом предполагается, что перепродажа любого количества товара по цене c_2 игроку 2 гарантирована.

Дальнейшая постановка задачи связана с выбором функций $P_1(t)$ и $P_2(t)$. В определенной аналогии с [1,3] эти функции выберем в виде

$$P_1(t) = x(t)v(t),\ P_2(t) = z(t)w(t),$$

где $v(t)$ – скорость покупки единицы товара; $w(t)$ – скорость перепродажи единицы товара. Далее будем считать, что

$$0 \le u(t) \le u_0,\ 0 \le v(t) \le v_0,\ 0 \le w(t) \le w_0\ , \tag{1.4}$$

где u_0 – максимально возможный темп производства; v_0 и w_0 – какие-то максимальные значения скоростей покупки и перепродажи. Последние на практике могут зависеть от скорости оформления необходимых документов, скорости перевозки товара и т.п.

Основная задача: для игрока 1 нужно выбрать такое управление $u(t)$ на интервале $[0,T]$, при котором максимален функционал J_1, а для игрока 2 – выбрать такие управления $v(t)$ и $w(t)$ на этом же интервале времени, при которых максимален функционал J_2.

Поставленную задачу можно рассматривать как кооперативную игру или как двухкритериальную задачу оптимального управления. Если товар не производится ($u(t)\equiv 0$), то $J_1 = J_2 = 0$. Если товар производится ($u(t)\ne 0$), но не покупается ($v(t)\equiv 0$), то $J_1<0$, $J_2 = 0$. Если товар покупается ($v(t) \ne 0$), но не перепродается, то $J_2<0$. Таким образом, нужно найти такое решение задачи, когда оба игрока получают положительную прибыль, так как в противном случае один из них просто не будет участвовать в сделке. Поэтому далее, говоря о существовании решения основной задачи, будем иметь в виду решение, когда $J_1>0$ и $J_2>0$, что, в свою очередь, предполагает, что товар производится, покупается и перепродается. Параметры задачи T, c_1, c_2, u_0 , v_0, w_0, k_1, k_2 предполагаются заданными, но нужно найти ограничения на их значения, когда решение задачи существует в указанном смысле.

Предварительно решим с помощью принципа максимума Понтрягина следующие частные задачи.

Задача 1. При заданной функции $v(t)$ ($\neq 0$) найти такую функцию $u(t)$ на интервале времени $[0,T]$ с учетом ограничения (1.4), при которой функционал J_1 максимален.

Задача 2. При заданной функции $u(t)$ ($\neq 0$) найти такие функции $v(t)$ и $w(t)$ на интервале времени $[0,T]$ с учетом ограничения (1.4), при которых функционал J_2 максимален.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Для уравнения (2.1) и функционала J_1 составляется функция Гамильтона

$$H_1(x,p,u) = p(u - P_1) - c_1 P_1 + u + k_1 x =$$
$$= u(p + 1) + (k_1 - vp - c_1 v)\, x,$$

где $p(t)$ – вспомогательная переменная. Минимум функции H_1 по u с учетом (1.4) достигается при

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p(t)+1 > 0, \\ u_0 & \text{при} \quad p(t)+1 < 0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

При этом переменная $p(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot p = -\frac{\partial H_1}{\partial x} = (p + c_1)v - k_1, \qquad p(T) = 0. \qquad (2.2)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$p(t) = c_1[e^{-\int_t^T v(t)\,dt} - 1] + k_1 \int_t^T e^{-\int_t^{\xi} v(t)\,dt} d\xi. \qquad (2.3)$$

Для решения данной задачи необходимо существование функции $p(t)$. Естественно предположить, что должно выполняться условие

$$p(0) < -1, \qquad (2.4)$$

т.е. производство в момент t=0 включается. Иначе можно просто уменьшить интервал $[0,T]$. Далее функция $p(t)$ должна перейти из этого значения в значение $p(T)$=0. Следовательно, должен существовать момент времени t_1, когда

$$p(t_1) = -1 \qquad (2.5)$$

и после которого функция $p(t)$ лежит выше уровня –1. Это требование накладывает условия на параметры задачи, которые будут обсуждаться ниже. Если (3.4) выполняется, то, как следует из (1.1), $x(t)$>0 для t>0.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2

Для уравнений (1.1) и (1.2) и функционала J_2 составляется функция Гамильтона

$$H_2(x, z, p_1, p_2, v, w)=$$
$$= p_1(u - P_1) + p_2 (P_1 - P_2) - c_2 P_2 + c_1 P_1 + k_2 z =$$
$$= up_1 + xvh_1 - zwh_2 + k_2 z\,,$$

где $\quad h_1(t) = p_2(t) - p_1(t) + c_1, \quad h_2(t) = p_2(t) + c_2.$

Здесь $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – вспомогательные переменные. Если $x(t)$>0, то минимум функции H_2 по v с учетом (1.4) достигается при

$$v^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad h_1(t) > 0, \\ v_0 & \text{при} \quad h_1(t) < 0. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Если $z(t) > 0$, то минимум функции H_2 по w с учетом (1.4) достигается при

$$w^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad h_2(t) < 0, \\ w_0 & \text{при} \quad h_2(t) > 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

При этом переменные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\dot p_1 = -\frac{\partial H_2}{\partial x} = -v^* h_1, \qquad p_1(T) = 0; \qquad (3.3)$$

$$\dot p_2 = -\frac{\partial H_2}{\partial z} = w^* h_2 - k_2, \qquad p_2(T) = 0. \qquad (3.4)$$

Для решения задачи необходимо существование функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$.

Как видно из (3.2), функция $w^*(t)$ зависит от переменной $h_2(t)$, которая, согласно (3.4), удовлетворяет уравнению

$$\dot h_2 = w^* h_2 - k_2, \qquad h_2(T) = c_2. \qquad (3.5)$$

Записав решение этого уравнения в виде, аналогичном (1.3), можно получить, что на всем интервале $[0,T]$ $h_2(t)$ >0. Отсюда следует, что на всем интервале $[0,T]$ $w^*(t) \equiv w_0$. При этом

$$h_2(t) = d_2 e^{w_0(t-T)} + \frac{k_2}{w_0}, \qquad (3.6)$$

где $d_2 = c_2 - k_2/w_0$. Таким образом, игроку 2 выгодно перепродавать товар с максимальной скоростью на всем интервале $[0,T]$.

Из (3.1) видно, что процесс покупки является релейным, т.е. либо товар не покупается, либо покупается с максимальной скоростью. Этот процесс определяется поведением функции $h_1(t)$. Из (3.3) и (3.4) получаем, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\dot h_1 = v^* h_1 + w_0 h_2 - k_2, \qquad h_1(T) = c_1 > 0. \qquad (3.7)$$

Как уже отмечалось, для решения задачи товар должен покупаться, т.е. должен существовать какой-то интервал времени, когда $h_1(t)$<0. С другой стороны, вблизи точки T функция $h_1(t)$>0. Поэтому должен существовать некоторый интервал времени $(t_2\,,T]$, где $h_1(t)$>0, и, следовательно, где $v^*(t)$=0 и товар не покупается. При этом момент t_2 должен определяться из условия

$$h_1(t_2) = 0. \qquad (3.8)$$

Решение уравнения (3.7) на этом интервале равно

$$h_1(t) = c_1 - d_2 + d_2 e^{-w_0(T-t)}.$$

Поэтому из (3.8) получаем

$$e^{-w_0(T-t_2)} = 1 - \frac{c_1}{d_2}$$

или

$$t_2 = T + \frac{1}{w_0}\ln\left(1 - \frac{c_1}{d_2}\right). \qquad (3.9)$$

Предположим далее, что параметры задачи таковы, что $t_2>0$. Рассмотрим интервал $[0, t_2]$, где должно быть $h_1(t)<0$. Предположим противное, т.е. что существует момент $t'\in[0, t_2]$ такой, что $h_1(t')>0$. Но тогда из (3.7) с учетом (3.1) следует, что производная функции $h_1(t)$ положительна и эта функция должна возрастать, что противоречит требованию $h_1(\tau_2)=0$. В результате получаем следующее решение задачи 2:

$$v^*(t)=\begin{cases} v_0 & \text{при} \quad 0<t<t_2, \\ 0 & \text{при} \quad t_2<t<T, \end{cases} \qquad (3.10)$$

т.е. на интервале $[0, t_2]$ происходит покупка товара, причем с максимальной скоростью. На интервале $[t_2,T]$ товар не покупается. Это хорошо объясняется тем, что покупателю не выгодно приобретать лишний товар, чтобы не нести затраты на его покупку и хранение. В то же время перепродажа товара происходит на всем интервале $[0,T]$, причем с максимальной скоростью w_0.

4. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Используем последние результаты для решения основной задачи. Пусть параметры задачи таковы, что $t_2>0$. Подставляя (3.10) в (2.3), получаем

$$p(t)=\begin{cases} d_1(e^{v_0(t-t_2)}-1)+k_1(T-t_2)e^{v_0(t-t_2)} & \text{при } 0<t<t_2, \\ k_1(T-t) & \text{при } t_2<t<T, \end{cases} \qquad (4.1)$$

где $d_1=c_1-b_1$, $b_1=k_1/v_0$. Поскольку момент t_1 выключения производства определяется из (2.5), то, подставляя (4.1) в (2.5), получаем, что всегда $t_1<t_2$ и t_1 находится из условия

$$p(t_1)=d_1(e^{v_0(t_1-t_2)}-1)+k_1(T-t_2)e^{v_0(t_1-t_2)}=-1.$$

Отсюда получаем

$$e^{v_0(t_1-t_2)}=\frac{d_1-1}{d_1+k_1(T-t_2)} \qquad (4.2)$$

или
$$t_1=t_2+\frac{1}{v_0}\ln\left[\frac{d_1-1}{d_1+k_1(T-t_2)}\right]. \qquad (4.3)$$

Подставляя сюда t_2 из (3.9), получаем

$$t_1=T+\frac{1}{v_0}\ln R, \qquad (4.4)$$

где
$$R=\frac{(d_1-1)(1-\dfrac{c_1}{d_2})^q}{d_1-b_1\ln(1-\dfrac{c_1}{d_2})^q}, \qquad q=\frac{v_0}{w_0}.$$

Окончательный результат: если решение основной задачи существует, то на интервале времени $[0, t_1]$ происходит производство, покупка и перепродажа товара; на интервале $[t_1,t_2]$ товар не производится, а только покупается и перепродается; на интервале $[t_2,T]$ товар не производится и не покупается, а только перепродается. При этом значения t_1 и t_2 определяются согласно (3.9) и (4.4).

5. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Таким образом, для решения задачи необходимо, чтобы существовали такие моменты времени t_1 и t_2, что $0<t_1<t_2<T$. Из (3.9) и (4.4) следует, что для существования таких моментов времени аргументы логарифмов должны быть положительными и меньше 1. Это сразу дает неравенство

$$1+b_1<c_1<d_2. \qquad (5.1)$$

Отсюда, в частности, необходимо: $c_1>1$, т.е. товар должен продаваться выше себестоимости; $c_2>c_1$, т.е. цена перепродажи должна быть больше цены покупки; $c_1v_0>k_1$ и $c_2w_0>k_2$, т.е. доходы от продажи и перепродажи единицы товара должны превосходить затраты на их хранение.

Требования, чтобы $t_1, t_2>0$, приводят к неравенствам

$$d_2>\frac{c_1}{1-e^{-w_0T}} \quad \text{и} \quad R>e^{-v_0T}. \qquad (5.2)$$

Пусть все параметры задачи заданы, кроме цены c_1, которую выбирает игрок 1. В этом случае функция R становится функцией только одного аргумента c_1. Тогда можно найти интервал допустимых значений цены c_1, при которых выполняется последнее неравенство. Как показывает анализ, функция $R(c_1)$ является выпуклой и её максимум всегда лежит в интервале $[1+b_1,d_2]$. При этом $R(1+b_1)=R(d_2)=0$. На рис.1 приведен типичный график этой функции. Видно, что допустимые значения цены c_1 лежат в интервале $[c', c'']$, где c' и c'' – корни уравнения

$$R(c_1)=e^{-v_0T}, \qquad (5.3)$$

если они существуют. При этом всегда $1+b_1<c'<c''<d_2$. Из рис.1 также видно, что для значений c_1, лежащих вне этого интервала, значения t_1 отрицательны. Если функция $R(c_1)$ не пересекает уровень $\exp(-v_0T)$, то интервал $[c', c'']$ не существует и задача не имеет решения. Следовательно, необходимым и достаточным условием существования решения основной задачи является условие

$$\max_{c_1} R(c_1)>e^{-v_0T}. \qquad (5.4)$$

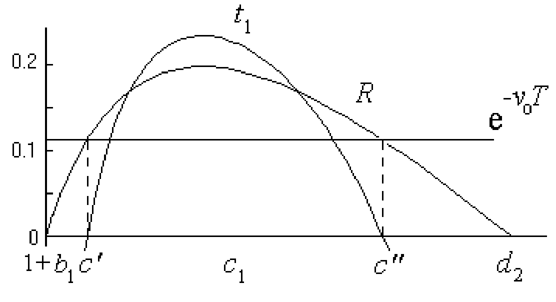

Рис. 1

Однако найти точку максимума функции $R(c_1)$ сложно. Поэтому (5.4) приближенно можно заменить неравенством

$$R(\overline{c}_1) > e^{-v_0 T}, \qquad (5.5)$$

где $\overline{c}_1 = (1 + b_1 + d_2)/2$ – середина интервала $[1+b_1, d_2]$. Обоснованием этого может быть то, что, как показывает анализ, функция $R(c_1)$ достаточно плоская в окрестности своего максимума. Если (5.5) выполняется, то и (5.4) заведомо выполняется.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть необходимые условия выполняются. Тогда полученное решение основной задачи содержит только кусочно-постоянные управления. Поэтому решение уравнений (1.1) и (1.2) и вычисление функционалов не вызывает затруднений.

Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} u_0 \dfrac{1 - e^{-v_0 t}}{v_0} & \text{при} \quad 0 < t \le t_1, \\ x(t_1) e^{-v_0 (t - t_1)} & \text{при} \quad t_1 < t \le t_2, \\ x(t_2) & \text{при} \quad t_2 < t \le T. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Решение уравнения (1.2) имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} u_0 \left(\dfrac{1 - e^{-w_0 t}}{w_0} - G(t) \right) & \text{при } 0 < t \le t_1, \\ z(t_1) e^{-w_0 (t - t_1)} + v_0 x(t_1) G(t - t_1) & \text{при } t_1 < t \le t_2, \\ z(t_2) e^{-w_0 (t - t_2)} & \text{при } t_2 < t \le T, \end{cases} \qquad (6.2)$$

где
$$G(t) = \frac{e^{-v_0 t} - e^{-w_0 t}}{w_0 - v_0}.$$

Если $v_0 = w_0$ $(q = 1)$, то $G(t) = t e^{-v_0 t}$.

Общее количество произведенного товара равно $u_0 t_1$. Количества проданного и перепроданного игроками 1 и 2 товара соответственно равны

$$S_1 = \int_0^T P_1(t) dt = \int_0^{t_2} [u - \dot{x}] dt = u_0 t_1 - x(t_2),$$

$$S_2 = \int_0^T P_2(t) dt = \int_0^T [P_1 - \dot{z}] dt = S_1 - z(T). \qquad (6.3)$$

Далее

$$X = \int_0^T x(t) dt = \frac{S_1}{v_0} + x(t_2)(T - t_2),$$
$$Z = \int_0^T z(t) dt = \frac{S_2}{w_0}. \qquad (6.4)$$

Подставляя (6.3) и (6.4) в (1.3), получаем

$$J_1 = c_1 S_1 - u_0 t_1 - k_1 X = (d_1 - 1)\, u_0 t_1 - x(t_2)(d_1 + k_1(T - t_2)),$$

$$J_2 = c_2 S_2 - c_1 S_1 - k_2 Z = (d_2 - c_1) S_1 - d_2 z(T). \qquad (6.5)$$

Если моменты времени t_1 и t_2 определяются согласно (3.9) и (4.4), то из (6.1) и (6.2) можно получить, что

$$x(t_2) = x(T) = \left(\frac{d_1 - 1}{d_1 + k_1(T - t_2)}\right) x(t_1),$$
$$z(T) = \left(1 - \frac{c_1}{d_2} + \frac{k_2(T - t_2)}{d_2}\right) z(t_2). \qquad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.5),получаем окончательно

$$J_1 = (d_1 - 1)(u_0 t_1 - x(t_1)),$$
$$J_2 = (d_2 - c_1)(S_1 - z(t_2)). \qquad (6.7)$$

Этот же результат можно получить, если максимизировать функционал J_1 в (6.5) по моменту времени t_1, а функционал J_2 в (6.5) – по моменту времени t_2. Другими словами, для полученной структуры управлений игрок 1 выбирает момент времени t_1 так, чтобы максимизировать J_1 , а игрок 2 – момент времени t_2 так, чтобы максимизировать J_2.

Если необходимые условия выполняются, то оба функционала (6.7) оказываются положительными. Действительно, левые сомножители положительны в силу (5.1). Общее количество произведенного товара равно $u_0 t_1$. Поскольку на интервале $[0, t_1]$ часть товара продается, то $u_0 t_1 > x(t_1)$. Общее количество купленного товара равно S_1. Поскольку на интервале $[0, t_2]$ часть товара перепродается, то $S_1 > z(t_2)$.

На рис. 2 приведены $x(t)$, $z(t)$, а также текущие значения функционалов $J_1(t)$ и $J_2(t)$ (при T=3, c_1=2, c_2=4, u_0=1, k_1=k_2=0). Видно, что в начале интервала $[0,T]$ эти функционалы отрицательны, т.е. сначала оба игрока несут убытки.

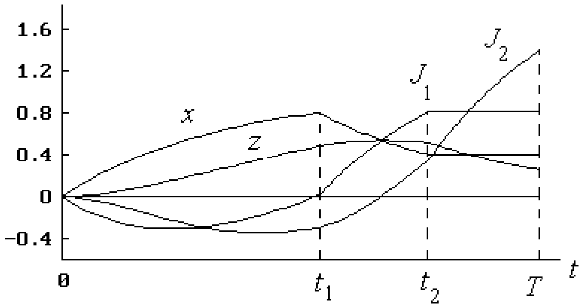

Рис. 2

На рис. 3 приведена зависимость функционалов J_1 и J_2 от цены c_1 при $q = 1$, $u_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$ и разных значениях параметра $v_0 T$. Здесь сплошные кривые соответствуют J_1, пунктирные – J_2. Кривые *1* соответствуют значению $v_0 T = 1{,}75$, кривые *2* – $v_0 T = 2$, кривые *3* – $v_0 T = 2{,}25$.

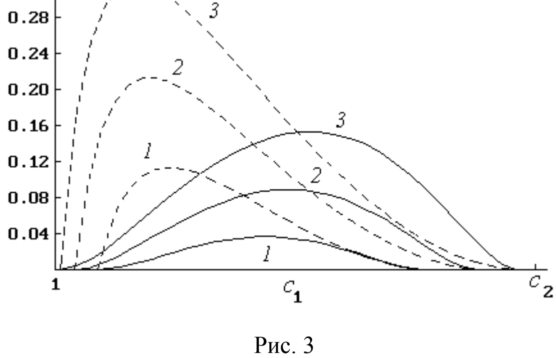

Рис. 3

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученное решение задачи зависит от многих параметров. Отметим наиболее главные результаты.

Параметр u_0 не влияет на решение задачи, так как переменные $x(t)$ и $z(t)$ и значения функционалов J_1 и J_2 оказываются пропорциональными u_0.

Длины интервалов $[t_1, t_2]$ и $[t_2,T]$ не зависят от T, т.е. при увеличении T увеличивается только интервал $[0, t_1]$, когда товар производится. Длина интервала $[t_1, t_2]$ зависит только от величины R и скорости покупки v_0. Длина интервала $[t_2,T]$ зависит только от отношения c_1/d_2 и скорости перепродажи w_0.

Решение зависит от произведений v_0T и w_0T. Увеличение этих параметров приводит к увеличению функционалов J_1 и J_2. Однако для этих параметров существуют нижние границы, при значениях ниже которых функционалы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ оказываются отрицательными. Эти границы получаются из (5.2) и (5.5):

$$w_0T > -\ln(1-\frac{c_1}{1-d_2}) \quad \text{и} \quad v_0T > -\ln R(\overline{c}_1).$$

Анализ этих неравенств показывает, что при малых значениях d_2 интервал $[0,T]$ должен быть достаточно большим и наоборот. В частности, следует, что для получения обеими игроками положительных прибылей на малом интервале $[0,T]$ необходимы достаточно большие скорости покупки и перепродажи и большая цена c_2.

У обоих игроков остается нереализованный товар $x(T)$ и $z(T)$. Это объясняется тем, что доход от продажи и перепродажи товара пропорционален количеству товара на складах. Поэтому эти величины должны быть достаточно большими.

Из рис. 3 видно, что функционалы J_1 и J_2 имеют максимумы в разных точках, что характерно для многокритериальных задач. В терминах теории игр интервал $[c', c'']$ есть переговорное множество. Поэтому при выборе цены c_1 игрок 1 должен учитывать интересы другого игрока. Можно проверить, что интервал $[c', c'']$ увеличивается с ростом v_0T и убывает с ростом затрат на хранение k_1, k_2. Из этого рисунка также видно, что при малых v_0T (кривые *1*) $J_1<J_2$, т.е. прибыль перекупщика больше прибыли товаропроизводителя, что встречается на практике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в задаче управления процессом производства и сбыта товара рассмотрена роль покупателя. Введено предположение, что от покупаемого товара покупатель может иметь свою прибыль. В результате получается двухкритериальная задача оптимального управления, для которой найдено решение и необходимые и достаточные условия его существования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // Изв.РАН. ТиСУ. 1998. № 1. С.144–148.
2. *Горский А.А., Локшин Б.Я.* Математическая модель процесса производства и продажи для управления и планирования производства //Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8. № 1.С.39–45.
3. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв.РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С.103–107.
4. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Вестник ТГУ. 2000. № 271. С.152–155.
5. *Параев Ю.И.* Решение двухкритериальной задачи оптимального производства и сбыта товара // Вестник ТГУ. Приложение. 2002. № 1(1). С.167–172.
6. *Параев Ю.И.* Двухкритериальная задач оптимального производства и сбыта товара // Изв.РАН. ТиСУ. 2003. № 1. С.138-141.

Статья представлена кафедрой прикладной математики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 1 сентября 2003 г.