УДК 519.872:681.03

Н.Ю. Марголис, А.А. Назаров

ЛОКАЛЬНАЯ ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СМО

В качестве математической модели сети случайного доступа, управляемой статическим протоколом с оповещением о конфликте, рассматривается однолинейная система массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов (ИПВ). Для исследования переходных режимов в предлагаемой математической модели применяется модифицированный метод асимптотического анализа изменения числа заявок в ИПВ. Получено дифференциальное уравнение, определяющее функцию асимптотического среднего нормированного процесса изменения числа заявок в ИПВ. Показано, что при определенных значениях загрузки системы это уравнение имеет две точки покоя, одна из которых является устойчивым, а другая – неустойчивым решением. Найден диффузионный процесс авторегрессии, аппроксимирующий асимптотическое отклонение состояний модели от среднего. Установлено, что в окрестности устойчивой точки покоя этот процесс является стационарным.

Среди локальных компьютерных сетей связи доминирующее место занимают сети случайного доступа, такие, как «Ethernet» и «Aloha». В этих сетях при возрастании загрузки канала связи отмечается существенная неустойчивость функционирования [1]. В сетях случайного доступа, управляемых статическими протоколами, как правило, отсутствует стационарный режим работы даже при достаточно малых величинах загрузки канала связи. Тем не менее, такие сети могут функционировать стабильно достаточно продолжительное время при некоторых значениях загрузки. Исследованию математической модели таких сетей и посвящена данная работа. Показано, что асимптотическое отклонение состояний СМО от среднего можно аппроксимировать диффузионным процессом авторегрессии, то есть процессом, у которого коэффициент переноса линейно зависит от его состояния, а коэффициент диффузии остается постоянной величиной. Для этого процесса существует финальное распределение вероятностей, и он назван локальной аппроксимацией процесса изменения состояний СМО. Установлено, что в окрестности точки стабилизации этот процесс является однородным стационарным.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим СМО, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром ρ. Обозначим k номер состояния прибора. Прибор может находится в одном из трех состояний: свободен ($k=0$), занят обслуживанием заявки ($k=1$), на приборе реализуется этап оповещения о конфликте ($k=2$). Вновь поступившая заявка, заставшая прибор свободным, немедленно начинает обслуживаться. Если за время ее обслуживания другие заявки не поступали, то эта заявка, завершив обслуживание, покидает систему. Если во время обслуживания поступает другая заявка, то обслуживаемая и поступившая заявки попадают в конфликт и на приборе начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов, из которого вновь обращаются к прибору для повторения обслуживания через интервал времени, распределенный экспоненциально с параметром γ. Обозначим i число заявок в ИПВ. Будем считать, что время обслуживания заявок рекуррентное с функцией распределения $B(s)$, а длина интервала оповещения о конфликте имеет функцию распределения $A(s)$. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением экспоненциальных распределений с параметрами $\mu=1$ для времени обслуживания и $\mu_1=1/a$ для длины этапа оповещения о конфликте. Состояния рассматриваемой СМО определим вектором (k,i), изменение во времени которого образует дискретный однородный марковский процесс $\{k(t),\, i(t)\}$ с неограниченным числом состояний. При любом наборе значений параметров ρ, a, γ для рассматриваемой СМО не существует стационарного режима. Рассмотрим нестационарное распределение вероятностей состояний процесса $\{k(t),\, i(t)\}$:

$$P_k(i,t)=P\{k(t)=k,\ i(t)\}=i\},\ k=0,1,2,\ i=0,1,\dots\ .$$

Применяя стандартный Δt-метод исследования СМО, получим систему уравнений

$$P_0(i,\ t+\Delta t)=(1-(\rho+i\gamma)\Delta t)\ \ P_0(i,t)+$$
$$+\Delta t\ \ P_1(i,t)+\frac{1}{a}\Delta t\ \ P_2(i,t)+o(\Delta t);$$
$$P_1(i,t+\Delta t)=(1-(\rho+i\gamma+1)\Delta t)\ \ P_1(i,t)+$$
$$+\rho\Delta t\ \ P_0(i,t)+(i+1)\gamma\Delta t\ \ P_0(i+1,t)+o(\Delta t);$$
$$P_2(i,t+\Delta t)=(1-(\rho+\frac{1}{a})\Delta t)P_2(i,t)+$$
$$+\rho\Delta t(P_2(i-1,t)+P_1(i-2,t))+$$
$$+(i-1)\gamma\ \ \Delta t\ \ P_1(i-1,t)+o(\Delta t),$$

из которой при $\Delta t\to 0$ имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial\ t}+(\rho+i\ \ \gamma)P_0(i,t)=P_1(i,t)+\frac{1}{a}P_2(i,t);\\ \frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t}+(\rho+i\gamma+1)P_1(i,t)=\rho P_0(i,t)+\\ +(i+1)\gamma P_0(i+1,t);\\ \frac{\partial P_2(i,t)}{\partial\ t}+(\rho+\frac{1}{a})P_2(i,t)=\rho P_2(i-1,t)+\rho P_1(i-2,t)+\\ +(i-1)\gamma P_1(i-1,t).\end{gathered}\tag{1}$$

Система уравнений (1) однозначно определяет распределение вероятностей $P_k(i,t),\ k=0,1,2$, состояний СМО и относится к классу систем дифференциально-конечно-разностных уравнений с переменными коэффициентами. Аналитических методов решения таких систем нет, поэтому проведем ее асимптотический анализ [2] в условиях большой задержки, то есть при $\gamma\to 0$.

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЗАЯВОК В ИПВ

Для нахождения асимптотического среднего числа заявок в ИПВ обозначим $\varepsilon=\gamma$ и рассмотрим величины

$$\tau=t\cdot\varepsilon\ ;\ i\cdot\varepsilon=x\ ;\ \frac{1}{a}P_k(i,t)=\pi_k(x,\tau,\varepsilon)\ .$$

Тогда для определения величин

$$\pi_k(x,\tau,\varepsilon),\ k=0,1,2,$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial\ \pi_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+(\rho+x)\ \pi_0(x,\tau,\varepsilon)=\pi_1(x,\tau,\varepsilon)+\\
&\qquad+\frac{1}{a}\pi_2(x,\tau,\varepsilon);\\
&\varepsilon\frac{\partial\pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+(\rho+x+1)\,\pi_1(x,\tau,\varepsilon)=\\
&=\rho\,\pi_0(x,\tau,\varepsilon)+(x+\varepsilon)\,\pi_0(x+\varepsilon,\tau,\varepsilon);\\
&\varepsilon\ \frac{\partial\ \pi_2(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\left(\rho+\frac{1}{a}\right)\ \pi_2(x,\tau,\varepsilon)=\\
&=\rho\ \ \pi_2(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon)+\rho\ \ \pi_1(x-2\varepsilon,\tau,\varepsilon)+\\
&\quad+(x-\varepsilon)\ \ \pi_1(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon).
\end{aligned}\tag{2}$$

Обозначив $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\pi_k(x,\tau,\varepsilon)=\pi_k(x,\tau),\ \rho+x=G$, перейдем в системе (2) к пределу при $\varepsilon\to 0$. Получится следующая система алгебраических уравнений относительно величин $\pi_k(x,\tau),\ k=0,1,2$:

$$\begin{aligned}
&G\pi_0(x,\tau)=\pi_1(x,\tau)+\frac{1}{a}\pi_2(x,\tau);\\
&(G+1)\pi_1(x,\tau)=G\pi_0(x,\tau);\\
&\frac{1}{a}\pi_2(x,\tau)=G\pi_1(x,\tau).
\end{aligned}\tag{3}$$

В силу однородности системы (3) ее решение можно записать в виде

$$\pi_k(x,\tau)=R_k\pi(x,\tau),\ \ k=0,1,2,\tag{4}$$

где

$$R_0=\frac{G+1}{aG^2+2G+1};\quad R_1=\frac{G}{aG^2+2G+1};\quad R_2=\frac{aG^2}{aG^2+2G+1};\tag{5}$$

$$\pi(x,\tau)=\pi_0(x,\tau)+\pi_1(x,\tau)+\pi_2(x,\tau).$$

В системе (2) функции $\pi_k(x\pm\varepsilon,\tau,\varepsilon),\ k=0,\ 1,\ 2,$ разложим в ряд по степеням ε с точностью до слагаемых первого порядка, после чего сложим почленно все уравнения системы. В результате получится

$$\varepsilon\frac{\partial\pi(x,\varepsilon,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\{x\pi_0(x,\tau)-\rho\pi_2(x,\tau)-$$

$$-(2\rho+x)\pi_1(x,\tau)\}+o(\varepsilon).$$

Подставляя сюда вместо $\pi_k(x,\tau)$ выражения из формулы (4) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим равенство

$$\frac{\partial\pi(x,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho-R_1(G))\pi(x,\tau)\},$$

которое совпадает с вырожденным уравнением Фоккера-Планка [3] для плотности вероятностей $\pi(x,\tau)$ диффузионного процесса $x(\tau)$ с коэффициентом переноса $\rho-R_1(G)$ и нулевым коэффициентом диффузии. Следовательно, процесс $x(\tau)$ является детерминированной функцией, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x'(\tau)=\rho-R_1(G),\tag{6}$$

где $G=\rho+x(\tau)$, а $R_1(G)$ определяется одним из равенств (5). Функция $x(\tau)$ имеет смысл асимптотического ($\varepsilon\to 0$) среднего значения нормированного числа заявок $\varepsilon i(t)$ в ИПВ для достаточно больших моментов времени $t=\tau/\varepsilon$. Величины R_k, $k=0,\ 1,\ 2$, определяемые (5), имеют смысл распределения вероятностей состояний $k(t)$ канала связи в тех же асимптотических условиях, что и выше.

Очевидно, при $\rho<\max\limits_{G\geq\rho}R_1(G)$ дифференциальное уравнение (9) имеет две точки покоя x_1,x_2, $0<x_1<x_2$, определяемые корнями G_1,G_2 уравнения

$$R_1(G)=\frac{G}{aG^2+2G+1}=\rho\ ,\quad x_1=G_1-\rho,\ x_2=G_2-\rho.$$

В силу того, что при $x<x_1$ производная $x'(\tau)>0$ и процесс $x(\tau)$ возрастает, а при $x_1<x<x_2$ производная $x'(\tau)<0$ и процесс $x(\tau)$ убывает, точка x_1 является точкой стабилизации процесса $x(\tau)$. Множество значений процесса $x(\tau),\ 0\leq x(\tau)<x_2$, назовем областью стабильного функционирования сети связи. В этой области $\lim\limits_{\tau\to\infty}x(\tau)=x_1$.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОЦЕСС ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СМО

Для более детального исследования процесса изменения состояний СМО возьмем $\gamma=\varepsilon^2$ и в системе уравнений (1) выполним замену

$$t\varepsilon^2=\tau;\ \ i\varepsilon^2=x(\tau)+\varepsilon y;\ \ \frac{1}{\varepsilon}P_k(i,t)=H_k(y,\tau,\varepsilon),$$

где $x(\tau)$ – решение уравнения (6). Тогда для определения функций $H_k(y,\tau,\varepsilon),\ k=0,1,2,$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\frac{\partial H_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon\ \ x'(\tau)\frac{\partial H_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+(\rho+x(\tau)+\\
&+\varepsilon y)H_0(y,\tau,\varepsilon)=H_1(y,\tau,\varepsilon)+\frac{1}{a}H_2(y,\tau,\varepsilon);\\
&\varepsilon^2\frac{\partial H_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon\ \ x'(\tau)\frac{\partial H_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+(\rho+x(\tau)+\\
&+\varepsilon y+1)H_1(y,\tau,\varepsilon)=\rho H_0(y,\tau,\varepsilon)+\\
&+(x(\tau)+\varepsilon(y+\varepsilon))H_0(y,\tau,\varepsilon);\\
&\varepsilon^2\frac{\partial H_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+(\rho+\frac{1}{a}H_2(y,\tau,\varepsilon)=\\
&=\rho H_2(y-\varepsilon,\tau,\varepsilon)+\rho H_1(y-2\varepsilon,\tau,\varepsilon)+\\
&+(x(\tau)+\varepsilon(y-\varepsilon))H_1(y-\varepsilon,\tau,\varepsilon).
\end{aligned}\tag{7}$$

Систему (7) будем решать в три этапа. На первом этапе обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ H_k(y,\tau,\varepsilon)=H_k(y,\tau)\ ,\ x(\tau)+\rho=G$$

и в системе (7) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. После этого получится система линейных алгебраических уравнений относительно $H_k(y,\tau)$, аналогичная системе (3), поэтому можно взять

$$H_k(y,\tau) = R_k \; H(y,\tau),$$

где $H(y,\tau) = H_0(y,\tau) + H_1(y,\tau) + H_2(y,\tau)$, а величины R_k определяются равенствами (5).

На втором этапе в системе (7) функции $H_k(y \pm \varepsilon,\tau,\varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon)$ и решения этой системы $H_k(y,\tau,\varepsilon)$ будем искать в виде

$$H_k(y,\tau,\varepsilon) = R_k H(y,\tau) + \varepsilon h_k(y,\tau) + o(\varepsilon). \qquad (8)$$

Тогда для определения функций $h_k(y,\tau)$ получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$Gh_0 - h_1 - \frac{1}{a}h_2 = x'(\tau)R_0\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y} - yR_0 H(y,\tau);$$

$$(G+1)h_1 - Gh_0 = x'(\tau)R_1\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y} + y(R_0 - $$
$$-R_1)H(y,\tau) + x(\tau)R_0\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y};$$

$$\frac{1}{a}h_2 - Gh_1 = x'(\tau)R_2\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y} + yR_1 H(y,\tau) - (\rho R_2 + $$
$$+(2\rho + x(\tau))R_1)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y},$$

которая имеет решение, так как в силу равенства (6) ранг основной матрицы этой системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы. Это решение можно записать в виде

$$h_0(y,\tau) = \frac{G+1}{G}h_1(y,\tau) - \frac{R_0 - R_1}{G}yH(y,\tau) - $$
$$-\frac{1}{G}(x'(\tau)R_1 + x(\tau)R_0)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}; \qquad (9)$$

$$h_2(y,\tau) = aGh_1(y,\tau) + aR_1 yH(y,\tau) + a\;(x'(\tau)R_2 - \rho R_2 - $$
$$-(2\rho + x(\tau))R_1)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}.$$

На третьем этапе в системе (7) функции $H_k(y \pm \varepsilon,\tau,\varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$ и, сложив все три полученных уравнения, придем к равенству

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(x(\tau) + $$
$$+\varepsilon y)H_0(y,\tau,\varepsilon) - \rho H_2(y,\tau,\varepsilon) - (2\rho + x(\tau) + $$
$$+\varepsilon y)H_1(y,\tau,\varepsilon)\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{x(\tau)H_0(y,\tau,\varepsilon) + \rho H_2 + $$
$$+(4\rho + x(\tau))H_1(y,\tau,\varepsilon)\} + o(\varepsilon^2).$$

Обозначим

$$h(y,\tau) = h_0(y,\tau) + h_1(y,\tau) + h_2(y,\tau)$$

и, подставляя в последнее равенство разложение (8), после несложных преобразований получим соотношение

$$\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y}\{x'(\tau)h(y,\tau) + x(\tau)h_0(y,\tau)\} - $$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\{\rho h_2(y,\tau) + (2\rho + x(\tau))h_1(y,\tau)\} - $$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\{(R_1 - R_0)yH(y,\tau)\} + \frac{1}{2}\{x(\tau)R_0 + \rho R_2 + $$
$$+(4\rho + x(\tau))R_1\}\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2},$$

в котором $h_0(y,\tau)$ и $h_2(y,\tau)$ заменим их выражениями из формул (9). В результате получим уравнение для $H(y,\tau)$:

$$\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{AyH(y,\tau)\} + \frac{B^2}{2}\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}, \qquad (10)$$

где с учетом того, что $x(\tau) = G - \rho$, $x'(\tau) = \rho - R_1$, величины A и B^2 могут быть записаны в виде

$$A = A(G) = R_1(G)\frac{1 - 2R_0(G)}{G}, \qquad (11)$$

$$B^2 = B^2(G) = (G-\rho)R_0(G) + \rho R_2(G) + (3\rho + G)R_1(G) + $$
$$+2aR_1(G)[\rho R_2(G) + (\rho + G)R_1(G) - $$
$$-(\rho - R_1(G))R_2(G)] + \qquad (12)$$
$$+\frac{2}{G}(R_1(G) - G)[(\rho - R_1(G))R_1(G) + (G-\rho)R_0(G)].$$

Уравнение (10) является уравнением Фоккера – Планка для плотности вероятностей $H(y,\tau)$ некоторого диффузионного процесса авторегрессии, который мы обозначим $y(\tau)$. Коэффициенты переноса и диффузии этого процесса определяются формулами (11) и (12). Отметим, что величины A и B^2, определяемые асимптотическим средним $x(\tau)$, вообще говоря, зависят от текущего момента времени τ и постоянны лишь для точек покоя $x(\tau) = x_1$, $x(\tau) = x_2$.

Процесс авторегрессии $y(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения [5]

$$dy(\tau) = A(\tau)d\tau + B(\tau)dw(\tau), \qquad (13)$$

где $w(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, а коэффициенты $A(\tau)$, $B(\tau)$ определяются по формулам (11) и (12) при заданном асимптотическом среднем $x(\tau)$. Решим уравнение (13). Для этого рассмотрим случайный процесс

$$u(\tau) = y(\tau)\exp\left\{-\int_0^\tau A(s)ds\right\}.$$

Найдем дифференциал процесса $u(\tau)$ по формуле Ито [5]:

$$du(\tau) = -A(\tau)u(\tau)d\tau + \exp\left\{-\int_0^\tau A(s)ds\right\}dy(\tau) = $$
$$= B(\tau)\exp\left\{-\int_0^\tau A(s)ds\right\}dw(\tau).$$

Следовательно, процесс $y(\tau)$ имеет вид

$$y(\tau)=e^{\int_0^\tau A(s)ds}\left\{y(0)+\int_0^\tau B(v)e^{-\int_0^v A(s)ds}dw(v)\right\}. \quad (14)$$

В формуле (14), как обычно, $y(0)$ – заданное начальное значение решения стохастического дифференциального уравнения (13), статистически независимое от значений винеровского процесса $w(\tau)$.

Формула (14) полностью определяет случайный процесс $y(\tau)$. В частности, если начальное значение $y(0)$ имеет нормальное распределение, то процесс $y(\tau)$ является гауссовским и для него из формулы (14) нетрудно найти математическое ожидание, корреляционную функцию, все многомерные распределения вероятностей и любые вероятностно-временные характеристики.

Процесс $y(\tau)$ можно использовать для анализа изменения состояний исходной модели следующим образом. В силу замены $i\varepsilon^2=x(\tau)+\varepsilon y$ процесс

$$z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y(\tau) \quad (15)$$

характеризует нормированный процесс $\varepsilon^2 i(t)$ изменения состояний СМО в окрестности асимптотического среднего $x(\tau)$. Так как согласно (15) процесс $z(\tau)$ равен сумме асимптотического среднего и малых отклонений, определяемых процессом авторегрессии $y(\tau)$, коэффициенты переноса и диффузии которого также определяются асимптотическим средним $x(\tau)$, то будем называть $z(\tau)$ локальной аппроксимацией процесса изменения состояний СМО.

Для процесса $z(\tau)$ нетрудно определить все характеристики, обычно представляющие интерес при проектировании сетей связи. Эти характеристики будут достаточно точными в окрестности асимптотического среднего, в качестве которого целесообразно брать устойчивую точку покоя $x(\tau)=x_1$. В этом случае величины A, B^2 постоянны и процесс $z(\tau)$ становится однородным. Нетрудно показать, что для него существует финальное распределение вероятностей, поэтому, если в качестве начального распределения взять финальное, то процесс $z(\tau)$ будет стационарным случайным процессом. Однако поскольку время пребывания процесса $z(\tau)$ в области стабильного функционирования $0\le z(\tau)\le x_2$ определяется его значениями не только в окрестности точки x_1, но и вне этой окрестности, то представление (15) требует определенной модификации, позволяющей получить аппроксимацию для любых состояний исходной математической модели.

Обозначим

$$f(G)=\rho-R_1(G). \quad (16)$$

Тогда
$$f'(G)=(\rho-R_1(G))'=\frac{aG^2-1}{aG^2+2G+1}=$$
$$=\frac{R_1}{G}(R_1+R_2-R_0)=\frac{R_1(G)}{G}(1-2R_0(G))=A(G).$$

Найдем дифференциал процесса $z(\tau)$:

$$dz(\tau)=x'(\tau)\ d\tau+\varepsilon\ dy(\tau).$$

Подставляя в правой части этого равенства $f(G(\tau))$ вместо $x'(\tau)$ и выражение для $dy(\tau)$ из (13), получим

$$dz(\tau)=\left(f(G)+\varepsilon yf'(G)\right)d\tau+\varepsilon B(G)dw(\tau), \quad (17)$$

где $B(G)$ определяется равенством (12). Так как $G=\rho+x(\tau)$, то

$$f(G)+\varepsilon yf'(G)=f(G+\varepsilon y)+o(\varepsilon)=f(\rho+z(\tau))+o(\varepsilon),$$
$$B(G)=B(\rho+z(\tau)-\varepsilon y(\tau))=B(\rho+z(\tau))+O(\varepsilon).$$

Таким образом, случайный процесс $z(\tau)$ с точностью до бесконечно малой $o(\varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dz(\tau)=f(\rho+z(\tau))d\tau+\varepsilon\ B(\rho+z(\tau))dw(\tau).$$

В этом уравнении выполним замену

$$G(\tau)=\rho+z(\tau). \quad (18)$$

Теперь процесс $G(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dG(\tau)=f(G(\tau))d\tau+\varepsilon\ B(G(\tau))dw(\tau). \quad (19)$$

Так как процессы $G(\tau)$ и $z(\tau)$ отличаются лишь постоянным слагаемым ρ, то процесс $G(\tau)$ обладает всеми свойствами процесса $z(\tau)$. Вид уравнения (19) означает, что $G(\tau)$ – однородный диффузионный процесс с коэффициентом переноса $f(G)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2B^2(G)$. Очевидно, процесс $G(\tau)$ не является процессом авторегрессии в силу нелинейной зависимости его коэффициента переноса от состояний процесса. Более того, коэффициент диффузии процесса $G(\tau)$ зависит от его состояний. В значениях процесса $G(\tau)$ область стабильного функционирования СМО определяется множеством $\rho\le G\le G_2$, где G_2 – больший из двух корней уравнения $R_1(G)=\rho$ при выполнении условия $\rho<\max\limits_G R_1(G)$. В силу малости коэффициента диффузии процесса $G(\tau)$ изменение его значений определяется главным образом коэффициентом переноса $f(G)$, причем значения диффузионного процесса $G(\tau)$ в течение достаточно продолжительного времени концентрируются в окрестности точки G_1 до тех пор, пока процесс $G(\tau)$ находится в области стабильного функционирования. Полученные результаты позволяют находить время стабильного функционирования неустойчивых сетей случайного доступа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шварц М.* Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. М.: Наука, 1992. 598 с.
2. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 158 с.
3. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 363 с.
4. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 465 с.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 312 с.