УДК 519.2

А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК В НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕМАРКОВСКОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Для процесса изменения числа заявок в нестационарной немарковской бесконечнолинейной системе массового обслуживания найдены его математическое ожидание и ковариационная функция, показано, что при возрастании загрузки системы последовательность таких процессов сходится к гауссовскому.

В работе [1] в качестве математических моделей страховых компаний, кредитно-депозитных организаций, Пенсионного фонда и многих других экономических и социально-экономических систем предлагается рассматривать бесконечнолинейные системы массового обслуживания (СМО). Например, количество возможных договоров между клиентами и кредитно-депозитной организацией практически неограниченно. Сроки, на которые заключаются договоры, имеют весьма широкий спектр продолжительностей, поэтому достаточно адекватно могут моделироваться некоторой случайной величиной с заданной функцией распределения $B(x)$ их значений. Поток клиентов, обращающихся в кредитно-депозитную организацию, имеет явно стохастический характер и, как показывает статистические исследования реальных данных, его можно моделировать потоками Пуассона с заданной интенсивностью $\lambda(t)$.

Таким образом, математической моделью многих экономических систем может служить бесконечнолинейная СМО, на вход которой поступает пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$. Обслуживание каждым прибором рекуррентное с одинаковой для всех приборов функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания.

СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В работе [1] показано, что распределение $P(i, t)$ вероятностей того, что в момент t в системе обслуживается i заявок, имеет вид пуассоновского распределения

$$P(i,\ t)=\frac{\varphi^{i}(t)}{i!}e^{-\varphi(t)}, \tag{1}$$

где функция $\varphi(t)$ определяется следующим образом

$$\varphi(t)=\int_0^\infty \lambda(t-x)[1-B(x)]dx\ . \tag{2}$$

Известно, что

$$\mathrm{M}\,i(t)=\varphi(t), \tag{3}$$

$$\mathrm{M}\,i^2(t)=\varphi^2(t)+\varphi(t)\ . \tag{4}$$

То есть среднее число $\mathrm{M}\,i(t)$ и дисперсия этого числа $D\ i(t)$ имеют вид

$$\mathrm{M}\,i(t)=D\ i(t)=\varphi(t)=\int_0^\infty \lambda(t-x)[1-B(x)]dx\ . \tag{5}$$

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Не менее важной характеристикой случайного процесса является его корреляционная функция

$$R(t,\ t+\tau)=\mathrm{M}\{i(t)\,i(t+\tau)\}, \tag{6}$$

которая совместно с функцией математического ожидания достаточно хорошо, а для гауссовских – полностью определяют случайный процесс.

Найдем функцию $R(t,\ t+\tau)$ для рассматриваемой СМО в случае детерминированного обслуживания продолжительности b, т.е., когда

$$B(x)=\begin{cases}0, \text{ если } & x\le b,\\ 1, \text{ если } & x>b.\end{cases}$$

в этом случае функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t)=\int_0^b \lambda(t-x)dx=\int_{t-b}^{t}\lambda(s)ds=\Lambda(t-b,\ t)\ . \tag{7}$$

Отметим, что эта величина совпадает со средним значением числа заявок входящего потока, поступивших на интервале $(t-b,\ t)$. Заметим, что при $\tau\ge b$ значения $i(t)$ и $i(t+\tau)$ рассматриваемого случайного процесса стохастически независимы, поэтому

$$R(t,\ t+\tau)=\mathrm{M}\{i(t)\,i(t+\tau)\}=\mathrm{M}\,i(t)\,\mathrm{M}\,i(t+\tau)=$$
$$=\varphi(t)\,\varphi(t+\tau)=\Lambda(t-b,\ t)\,\Lambda(t-b+\tau,\ t+\tau)\ . \tag{8}$$

Поэтому рассмотрим $\tau<b$ и определим два случайных процесса, обозначив $n(t,\ t+\tau)$ – число заявок входящего потока, поступивших в систему на интервале $(t,\ t+\tau)$, $m(t,\ t+\tau)$ – число заявок, завершивших обслуживание в течение интервала времени $(t,\ t+\tau)$.

Очевидно имеет место равенство

$$i(t+\tau)=i(t)+n(t,\ t+\tau)-m(t,\ t+\tau),$$

следовательно

$$R(t,\ t+\tau)=\mathrm{M}\{i(t)[i(t)+n(t,\ t+\tau)-m(t,\ t+\tau)]\}=$$
$$=\mathrm{M}\,i^2(t)+\mathrm{M}\{i(t)\ \ n(t,\ t+\tau)\}-\mathrm{M}\{i(t)\,m(t,\ t+\tau)\}, \tag{9}$$

где $i(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметрами $\varphi(t)=\Lambda(t-b,\ t)$, поэтому первое слагаемое в (9) определяется равенством (4).

Вид второго слагаемого найти нетрудно, учитывая то, что, в силу свойства отсутствия последействия для пуассоновского потока, величины $i(t)$ и $n(t,t+\tau)$ стохастически независимы, поэтому

$$\mathrm{M}\{i(t)\,n(t,\ t+\tau)\}=\mathrm{M}\,i(t)\,\mathrm{M}\,n(t,\ t+\tau)=$$
$$\varphi(t)\,\Lambda(t,\ t+\tau)=\Lambda(t-b,\ t)\,\Lambda(t,\ t+\tau)\ . \tag{10}$$

Для нахождения третьего слагаемого в (9) поступим следующим образом.

Отметим, что для рассматриваемой СМО имеет место следующее равенство:

$$m(t,\ t+\tau)=n(t-b,\ t-b+\tau),$$

поэтому

$$\mathrm{M}\{i(t)\,m(t,\ t+\tau)\}=\mathrm{M}\{i(t)\,n(t-b,\ t-b+\tau)\}=$$
$$=\mathrm{M}\{i(t)\,\mathrm{M}[n(t-b,\ t-b+\tau)\,|\ i(t)]\}\ .$$

Здесь в силу равенства случайных событий

$$\{\omega:\ i(t)=i\}=\{\omega:\ n(t-b,t)=i\}$$

можно записать

$$=\mathrm{M}\{n(t-b,\ t-b+\tau)\,|\ i(t)\}=$$

$$=\mathrm{M}\{\ n(t-b,\ t-b+\tau)\,|\ n(t-b,t)=i(t)\}=$$

$$i(t)\frac{\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)}{\Lambda(t-b,\ t)},$$

следовательно

$$\mathrm{M}\{i(t)\,m(t,\ t+\tau)\}=\mathrm{M}\,i^2(t)\frac{\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)}{\Lambda(t-b,\ t)}=$$

$$=\frac{\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)}{\Lambda(t-b,\ t)}\left(\varphi^2(t)+\varphi(t)\right)=$$

$$=\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)\left[\Lambda(t-b,\ t)+1\right]. \qquad (11)$$

Подставляя (4), (7), (10), (11) в (9), получим

$$R(t,\ t+\tau)=\varphi^2(t)+\varphi(t)+\Lambda(t-b,\ t)\ \Lambda(t,\ t+\tau)-$$
$$-\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)\left[\Lambda(t-b,\ t)+1\right]=$$
$$=\Lambda^2(t-b,\ t)+\Lambda(t-b,\ t)+\Lambda(t-b,\ t)\Lambda(t,\ t+\tau)-$$
$$-\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)\Lambda(t-b,\ t)-\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)=$$
$$=\Lambda(t-b,\ t)\left[\Lambda(t-b,\ t)+\Lambda(t,\ t+\tau)-\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)\right]+$$
$$+\Lambda(t-b,\ t)-\Lambda(t-b,\ t-b+\tau)=$$
$$=\Lambda(t-b,\ t)\Lambda(t-b+\tau,\ t+\tau)+\Lambda(t-b+\tau,\ t).$$

Таким образом, имеем

$$R(t,\ t+\tau)=\begin{cases}\Lambda(t-b,\ t)\Lambda(t-b+\tau,\ t+\tau)+\\ \ +\Lambda(t-b+\tau,\ t), \quad \text{если } \tau<b,\\ \Lambda(t-b,\ t)\Lambda(t-b+\tau,\ t+\tau), \quad \text{если } \tau\ge b.\end{cases}$$

Для ковариационной функции $K(t,\ t+\tau)$ получим

$$K(t,\ t+\tau)=R(t,\ t+\tau)-\mathrm{M}i(t)\,\mathrm{M}\,i(t+\tau)=$$
$$=\begin{cases}\Lambda(t-b+\tau,\ t), \quad \text{если } \tau<b,\\ 0, \quad \text{если } \tau\ge b.\end{cases}$$

Таким образом, для процесса $i(t)$ изменения числа заявок в системе с детерминированным обслуживанием продолжительностью b ковариационная функция $K(t,\ t+\tau|b)$ имеет вид

$$K(t,\ t+\tau|b)=\begin{cases}\int\limits_{t-b+\tau}^{t}\lambda(s)ds, \ \text{если } \tau<b,\\ 0\ , \text{если } \tau\ge b.\end{cases}$$

Для исходной СМО с произвольной функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания ковариационную функцию $K(t,\ t+\tau)$ можно записать следующим образом:

$$K(t,\ t+\tau)=\int\limits_{\tau}^{\infty}K(t,\ t+\tau\,|\,x)dB(x)=\int\limits_{\tau}^{\infty}\left(\int\limits_{t-x+\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)dB(x)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{\infty}\lambda(t+\tau-x)\left[1-B(x)\right]dx\ . \qquad (12)$$

Равенства (2), (3) и (12) решают поставленную задачу определения функции математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса $i(t)$ для рассматриваемой нестационарной немарковской бесконечнолинейной системы обслуживания.

ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ

Рассмотрим последовательность исходных СМО с интенсивностью $\lambda(t)=N\rho(t)$, где $\rho(t)$ – заданная функция, а N – неограниченная последовательность целых положительных чисел. Покажем, что при $N\to\infty$ нормированная последовательность случайных процессов $i_N(t)$ сходится к гауссовскому случайному процессу. Для заданного N рассмотрим исходную СМО. По полиноминальной схеме разделим входящий поток на N независимых пуассоновских потоков с интенсивностью $\rho(t)$ для каждого из них. Обслуживание заявок этих потоков реализуется бесконечнолинейной системой обслуживания.

Процессы $i_N^{(n)}(t)$, n=1, 2, …, N, изменения числа заявок каждого из потоков, обслуживаемых в рассматриваемой СМО, независимые и одинаково распределенные. В силу центральной предельной теоремы последовательность случайных процессов

$$\xi_N(t)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}i_N^{(n)}(t)-\varphi_N(t)}{\sqrt{N}}$$

сходится к гауссовскому процессу с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_\rho(t,\ t+\tau)$ вида (12):

$$K_\rho(t,\ t+\tau)=\int\limits_{\tau}^{\infty}\lambda(t+\tau-x)\left[1-B(x)\right]dx\ .$$

Следовательно, при достаточно больших значениях интенсивности $\lambda(t)$ исходный случайный процесс $i(t)$ с дискретным множеством состояний можно аппроксимировать гауссовским случайным процессом с математическим ожиданием

$$\varphi(t)=\int\limits_{0}^{\infty}\lambda(t-x)\left[1-B(x)\right]dx$$

и ковариационной функцией

$$K(t,\ t+\tau)=\int\limits_{\tau}^{\infty}\lambda(t+\tau-x)\left[1-B(x)\right]dx\ .$$

Эти функции полностью характеризуют гауссовский процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кац В.М., Лившиц К.И., Назаров А.А.* Исследование нестационарных бесконечнолинейных систем массового обслуживания и их применение к анализу экономико-математических моделей // Вестник ТГУ. 2002. № 275. С.189–192.