

СФЕРИЧЕСКИЕ НЕГОЛОНОМНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ В E_4

Введены понятия сферической неголономной поверхности вращения, ее меридианов и параллелей и изучены их свойства.

Неголономной поверхностью в четырехмерном евклидовом пространстве E_4 называют [2] совокупность всех интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа $P_\alpha dx^\alpha$ ($\alpha = \overline{1,4}$), где P_α – гладкие функции в некоторой области $G \subset E_4$, причем P_α не обращаются в нуль одновременно ни в какой точке $M \in G$. Интегральные кривые этого уравнения, проходящие через точку M , касаются в этой точке одной гиперплоскости, называемой касательной плоскостью неголономной поверхности в точке M . Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно касательной гиперплоскости, называется нормалью неголономной поверхности в точке M .

Определение 1. Сферической неголономной поверхностью вращения называется такая неголономная поверхность, все нормали которой пересекают неподвижную прямую (ось вращения).

1. ГЛАВНЫЕ КРИВИЗНЫ 2-го РОДА СФЕРИЧЕСКОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть неголономная поверхность задана в некоторой области $G \subset E_4$ и $M \in G$. Ортонормированный подвижной репер $\{M, \vec{e}_\alpha\}$ ($\alpha = \overline{1,4}$) выберем так, чтобы $\vec{e}_4$ был направлен по нормали к неголономной поверхности в точке M .

Деривационные формулы репера имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^\alpha \vec{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M , $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ ($\alpha, \beta = \overline{1,4}$).

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} D\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \\ D\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как формы $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ являются базисными, то оставшиеся главные формы ω_4^α выразятся через базисные следующим образом:

$$\omega_4^\alpha = A_\beta^\alpha \omega^\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{1,4}. \quad (3)$$

При таком выборе репера неголономная поверхность определяется уравнением Пфаффа

$$\omega^4 = 0. \quad (4)$$

В каждой точке M области G определим линейный оператор A формулой

$$A(d\vec{r}) = d\vec{e}_4. \quad (5)$$

Оператор A векторы касательной плоскости неголономной поверхности (1.4) переводит в векторы этой же плоскости. Поэтому можно говорить о сужении A^* оператора A на касательную плоскость. Матрица оператора A^* в базисе $\{\vec{e}_i\}$ ($i = \overline{1,3}$) имеет вид

$$A_{(e)}^* = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

оператора A^* , взятые с противоположным знаком, называются главными кривизнами 2-го рода неголономной поверхности, а собственные векторы оператора A^* , соответствующие им, – главными направлениями 2-го рода в точке M . Линией кривизны 2-го рода называется линия неголономной поверхности, в каждой точке которой касательная идет по главному направлению 2-го рода.

Поместим вектор $\vec{e}_1$ в плоскость, проходящую через нормаль сферической неголономной поверхности вращения и ось вращения l . Пусть F – точка пересечения нормали неголономной поверхности вращения с ее осью l , $\vec{F}$ – радиус-вектор точки F . Тогда

$$\vec{F} = \vec{r} + t\vec{e}_4. \quad (7)$$

Так как F описывает прямую l при $\omega^4 = 0$, то $d\vec{F}$ должен лежать в плоскости $\{M, \vec{e}_1, \vec{e}_4\}$ при условии $\omega^4 = 0$. Так как $d\vec{F} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 + \omega^3 \vec{e}_3 + dt\vec{e}_4 + t(\omega_4^1 \vec{e}_1 + \omega_4^2 \vec{e}_2 + \omega_4^3 \vec{e}_3)$, то отсюда

$$\omega^2 + t\omega_4^2 = 0, \quad \omega^3 + t\omega_4^3 = 0, \quad \omega^2 + t\omega_4^2 = 0, \quad \omega^3 + t\omega_4^3 = 0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \omega^2 + t(A_1^2 \omega^1 + A_2^2 \omega^2 + A_3^2 \omega^3) &= 0, \\ \omega^3 + t(A_1^3 \omega^1 + A_2^3 \omega^2 + A_3^3 \omega^3) &= 0. \end{aligned}$$

В силу линейной независимости форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ имеем

$$A_1^2 = A_3^2 = A_1^3 = A_2^3 = 0, \quad t = -\frac{1}{A_2^2}, \quad A_2^2 = A_3^3, \quad (8)$$

и теперь уравнение (6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & A_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Так как главные кривизны 2-го рода $k_i = \lambda_i$ ($i = \overline{1,3}$), то $k_1 = -A_1^1$, $k_2 = k_3 = -A_2^2$. И мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Для сферической неголономной поверхности вращения все три кривизны 2-го рода вещественны, при этом две из них, k_2 и k_3 , совпадают, а третья k_1 не равна им.

Полной кривизной 2-го рода называется величина K_2 , равная определителю матрицы оператора A^* . Средней кривизной H_2 2-го рода называется след матрицы оператора A^* . Для сферической неголономной поверхности вращения

$$K_2 = -k^2 k_1, \quad H_2 = -2k - k_1, \quad (9)$$

где $k = k_2 = k_3$.

Главное направление 2-го рода, соответствующее k_1 , определяется уравнениями

$$\xi^2 = \xi^3 = \xi^4 = 0. \quad (10)$$

Таким образом, вектор $\vec{e}_1$ определяет главное направление 2-го рода, соответствующее k_1 .

Главные направления 2-го рода, соответствующие k , определяются уравнениями

$$(A_1^1 - A_2^2)\xi^1 + A_2^1\xi^2 + A_3^1\xi^3 = 0, \quad \xi^4 = 0. \quad (11)$$

То есть главные направления 2-го рода, соответствующие кратной кривизне k , заполняют двумерную плоскость, лежащую в касательной гиперплоскости к $\omega^4 = 0$. Эта плоскость пересекает плоскость, ортогональную вектору $\vec{e}_1$ и проходящую через точку M , по прямой.

Направим вектор $\vec{e}_2$ по этой прямой, тогда $A_2^1 = 0$ и репер становится каноническим.

В нем формулы (1.3) имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= -k_1\omega^1 + A_3^1\omega^3 + A_4^1\omega^4, \\ \omega_4^2 &= -k\omega^2 + A_4^2\omega^4, \\ \omega_4^3 &= -k\omega^3 + A_4^3\omega^4. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как репер $\{M, \vec{e}_\alpha\}$ ($\alpha = \overline{1,4}$) – канонический, то все функции в формулах (11) – инварианты. Величины k, k_1 – главные кривизны 2-го рода. Величины A_4^1, A_4^2, A_4^3 – координаты вектора $A_4^1\vec{e}_1 + A_4^2\vec{e}_2 + A_4^3\vec{e}_3$, представляющего собой вектор кривизны линии тока векторного поля $\vec{e}_4$. И наконец, инвариантный вектор $\vec{\rho} = \rho\vec{e}_2$, где $\rho = -\frac{1}{2}A_3^1$, – вектор неголономности, т.е. вектор, обращение в нуль которого характеризует голономность $\omega^4 = 0$.

Обозначив $A_4^1 = a, A_4^2 = b, A_4^3 = c$, мы приведем формулы (1.12) к виду

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= -k_1\omega^1 - 2\rho\omega^3 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= -k\omega^2 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= -k\omega^3 + c\omega^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Замкнем систему (13). После соответствующих вычислений приходим к следующим выражениям форм Пфаффа через базисные формы:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \alpha_{12}\omega^2, \quad \omega_1^3 = \alpha_{12}\omega^3, \quad \omega_1^4 = -k_1\omega^1 - 2\rho\omega^3 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= -k\omega^2, \quad \omega_4^3 = -k\omega^3, \\ dk &= \alpha_{12}[(k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3] + (k^2 - a\alpha_{12})\omega^4, \\ dk_1 &= \gamma_{11}\omega^1 + \gamma_{12}\omega^2 + (\gamma_{13} + 2\rho(\alpha_{12} - a))\omega^3 + \\ &\quad + (\gamma_{14} + k_1^2 + a^2)\omega^4, \\ 2\rho\omega_3^2 &= \gamma_{12}\omega^1 + \gamma_{22}\omega^2 + \gamma_{23}\omega^3 + \gamma_{24}\omega^4, \\ 2d\rho &= \gamma_{13}\omega^1 + \gamma_{23}\omega^2 + \gamma_{33}\omega^3 + \gamma_{34}\omega^4, \\ -da &= \gamma_{14}\omega^1 + \gamma_{24}\omega^2 + (\gamma_{34} - 2\rho(k_1 + k))\omega^3 + \gamma_{44}\omega^4, \\ d\alpha_{12} &= -(\alpha_{12}^2 + kk_1)\omega^1 - 2\rho k\omega^3. \end{aligned} \quad (14)$$

В выбранном нами каноническом репере линии кривизны 2-го рода, соответствующие k_1 , определяются следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0, \quad (15)$$

которая, очевидно, вполне интегрируема. Это значит, что через каждую точку $M \in G$ проходит одна линия кривизны 2-го рода, соответствующая главной кривизне k_1 . Линии же кривизны 2-го рода, соответствующие кратной кривизне k 2-го рода, определяются только двумя уравнениями Пфаффа:

14

$$(k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0, \quad (16)$$

полная интегрируемость которых не очевидна. Докажем, что система (16) вполне интегрируема. Используя формулы (2), (3), (14), вычислим

$$D((k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3) \wedge ((k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3) \wedge \omega^4 \quad (17)$$

и

$$D\omega^4 \wedge ((k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3) \wedge \omega^4. \quad (18)$$

Имеем

$$\begin{aligned} &2\rho\gamma_{12}\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + \\ &+ \gamma_{23}(k_1 - k)\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4 + \\ &+ \gamma_{23}(k_1 - k)\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4 + \\ &+ 2\rho\gamma_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 = 0, \\ &2\rho\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge ((k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3) \wedge \omega^4 = 0. \end{aligned}$$

То есть для (16) выполнены условия полной интегрируемости. Это значит, что через каждую точку $M \in G$ проходит двумерная поверхность, состоящая из тех линий кривизны 2-го рода, которые соответствуют главной кривизне k .

Находим направляющий вектор оси вращения l . Он должен быть параллелен $d(\vec{F} + \frac{1}{k}\vec{e}_4)$. Пользуясь формулами (1) и (14), находим

$$d(\vec{F} + \frac{1}{k}\vec{e}_4) \parallel (k\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_4).$$

Так как прямая l неподвижна, то

$$d(k\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_4) \parallel (k\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_4).$$

Соответствующие вычисления показывают, что это возможно лишь при $\alpha_{12} = -a$. Тогда из (1.14) следует

$$\gamma_{14} = -a^2 - kk_1, \quad \gamma_{24} = 0, \quad \gamma_{34} = 2\rho k_1, \quad \gamma_{44} = 0.$$

При этих условиях, характеризующих сферическую неголономную поверхность вращения, формулы (14) примут вид:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -a\omega^2, \quad \omega_1^3 = -a\omega^3, \quad \omega_1^4 = -k_1\omega^1 - 2\rho\omega^3 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= -k\omega^2, \quad \omega_4^3 = -k\omega^3, \\ dk &= -a[(k_1 - k)\omega^1 + 2\rho\omega^3] + (k^2 + a^2)\omega^4, \\ dk_1 &= \gamma_{11}\omega^1 + \gamma_{12}\omega^2 + (\gamma_{13} - 4a\rho)\omega^3 + (k_1^2 - kk_1)\omega^4, \\ 2\rho\omega_3^2 &= \gamma_{12}\omega^1 + \gamma_{22}\omega^2 + \gamma_{23}\omega^3, \\ 2d\rho &= \gamma_{13}\omega^1 + \gamma_{23}\omega^2 + \gamma_{33}\omega^3 + 2\rho k_1\omega^4, \\ -da &= (-a^2 - kk_1)\omega^1 - 2\rho k\omega^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение оси вращения в векторной форме имеет вид

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{1}{k}\vec{e}_4 + t(k\vec{e}_1 - a\vec{e}_4).$$

Тогда в декартовых координатах ось вращения определяется системой

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad ax^1 + kx^4 = 1. \quad (20)$$

2. МЕРИДИАНЫ И ПАРАЛЛЕЛИ СФЕРИЧЕСКОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Определение 2. Двумерные поверхности, состоящие из тех линий кривизны 2-го рода, которые соответствуют кратной главной кривизне 2-го рода, называются параллелями сферической неголономной поверхности вращения.

Теорема 2. Нормали сферической неголономной поверхности вращения во всех точках параллели пересекаются в одной точке, лежащей на оси вращения.

Доказательство. На нормали к сферической неголономной поверхности вращения возьмем точку $F\left(0,0,0,\frac{1}{k}\right)$ и покажем, что она остается постоянной для всех нормалей сферической неголономной поверхности вращения, взятых в точках параллели (16). Действительно, в точках параллели для радиус-вектора $\vec{F} = \vec{r} + \frac{1}{k}\vec{e}_4$ точки F имеем

$$d\vec{F} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 - \frac{k_1-k}{2\rho}\omega^1\vec{e}_3 + \frac{1}{k}\left(-k\omega^1\vec{e}_1 - k\omega^2\vec{e}_2 + k\frac{k-k_1}{2\rho}\omega^1\vec{e}_3\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{F} = \text{const.}$ То есть точка F на нормали неподвижна вдоль параллели.

Теорема 3. Кратная главная кривизна 2-го рода k постоянна в точках параллели.

Действительно, из (14) и (16) видно, что вдоль параллели $dk = 0$, а следовательно, главная кривизна k постоянна.

Теорема 4. Всякая параллель лежит на трехмерной сфере с центром в точке пересечения нормалей неголономной поверхности вращения, взятых в точках данной параллели.

Доказательство. Найдем соприкасающуюся сферу параллели в ее произвольной точке. Уравнение соприкасающейся сферы ищем в виде

$$\langle \vec{R}, \vec{R} \rangle + 2\langle \vec{N}, \vec{R} \rangle + a_{00} = 0. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы некоторая точка параллели (16) принадлежала бы поверхности (17):

$$\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle + 2\langle \vec{N}, \vec{r} \rangle + a_{00} = 0. \quad (18)$$

Продифференцировав уравнение (18) дважды и учитывая, что в уравнении сферы члены с производением координат отсутствуют, получаем

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_2, \vec{r} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{e}_2 \rangle &= 0, \\ 2\rho\langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle - (k_1 - k)\langle \vec{e}_3, \vec{r} \rangle + 2\rho\langle \vec{N}, \vec{e}_1 \rangle - \\ &\quad - (k_1 - k)\langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle = 0, \\ a\langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle - \frac{\gamma_{22}}{2\rho}\langle \vec{e}_3, \vec{r} \rangle + k\langle \vec{e}_4, \vec{r} \rangle + \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle + \\ &\quad + a\langle \vec{N}, \vec{e}_1 \rangle - \frac{\gamma_{22}}{2\rho}\langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle + k\langle \vec{N}, \vec{e}_4 \rangle = 0, \\ \langle \vec{e}_3, \vec{r} \rangle + \langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle &= 0, \\ \gamma_{23}\langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle - 2a\rho\langle \vec{e}_2, \vec{r} \rangle - \gamma_{12}\langle \vec{e}_3, \vec{r} \rangle - \\ &\quad - \frac{\gamma_{22}}{2\rho}(k_1 - k)\langle \vec{e}_2, \vec{r} \rangle + \gamma_{23}\langle \vec{N}, \vec{e}_1 \rangle - \\ &\quad - 2a\rho\langle \vec{N}, \vec{e}_2 \rangle - \gamma_{12}\langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle - \\ &\quad - \frac{\gamma_{22}}{2\rho}(k_1 - k)\langle \vec{N}, \vec{e}_2 \rangle = 0, \\ \left(\gamma_{33} - \frac{2\rho}{k_1 - k}\gamma_{13}\right)\langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle - 2a\rho\langle \vec{e}_3, \vec{r} \rangle - \\ &\quad - \frac{4\rho^2 k}{k_1 - k}\langle \vec{e}_4, \vec{r} \rangle - \frac{4\rho^2}{k_1 - k}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \\ &\quad + \left(\frac{2\rho}{k_1 - k}\gamma_{11} - \gamma_{13} + 4a\rho\right)\langle \vec{e}_3, \vec{r} \rangle - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-a(k_1 - k)\langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle + (k_1 - k)\left(\frac{\gamma_{23}}{2\rho} - \frac{\gamma_{12}}{k_1 - k}\right)\langle \vec{e}_2, \vec{r} \rangle - \\ &- (k_1 - k)k\langle \vec{e}_4, \vec{r} \rangle - (k_1 - k)\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle + \\ &+ \left(\gamma_{33} - \frac{2\rho}{k_1 - k}\gamma_{13}\right)\langle \vec{N}, \vec{e}_1 \rangle - 2a\rho\langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle - \\ &- \frac{4\rho^2 k}{k_1 - k}\langle \vec{N}, \vec{e}_4 \rangle + \left(\frac{2\rho}{k_1 - k}\gamma_{11} - \gamma_{13} + 4a\rho\right)\langle \vec{N}, \vec{e}_3 \rangle - \\ &- a(k_1 - k)\langle \vec{N}, \vec{e}_1 \rangle + (k_1 - k)\left(\frac{\gamma_{23}}{2\rho} - \frac{\gamma_{12}}{k_1 - k}\right)\langle \vec{N}, \vec{e}_2 \rangle - \\ &- (k_1 - k)k\langle \vec{N}, \vec{e}_4 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как мы ищем соприкасающуюся сферу относительно локальной системы координат, то в ней $\vec{r} = \vec{0}$. Следовательно, из (18), (19) получаем

$$\begin{aligned} a_{00} = a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0, \quad a_{04} = -\frac{1}{k}a_{22}, \\ -\frac{4\rho^2}{k_1 - k}a_{11} - (k_1 - k)a_{33} - \frac{4\rho^2 k}{k_1 - k}a_{04} - k(k_1 - k)a_{04} = 0. \end{aligned}$$

Положим $a_{22} = -1/k$. Так как в уравнении сферы коэффициенты при квадратах координат равны, имеем $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$. Теперь, когда все коэффициенты найдены, запишем уравнение соприкасающейся сферы:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 - \frac{2}{k}x^4 = 0. \quad (20)$$

Проведя соответствующие вычисления, мы обнаруживаем, что сфера (20) не меняется при движении точки вдоль параллели (16). Тем самым мы показали, что параллели сферической неголономной поверхности вращения лежат на трехмерной сфере.

Преобразовав уравнение (20) к виду

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \left(x^4 - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}, \quad (21)$$

закключаем, что центр сферы находится в точке $F\left(0,0,0,\frac{1}{k}\right)$

пересечения нормалей сферической неголономной поверхности вращения, взятых в точках данной параллели.

Из (14) следует, что вдоль параллели в общем случае полная кривизна 2-го рода (в отличие от голономного случая) непостоянна. Но одна из главных кривизн 2-го рода (k) постоянна.

Определение 3. Линии кривизны 2-го рода, соответствующие некротной кривизне k_1 2-го рода, называются меридианами сферической неголономной поверхности вращения.

Меридианы определяются уравнениями

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0. \quad (22)$$

Теорема 5. Всякий меридиан лежит в двумерной плоскости, проходящей через ось вращения.

Доказательство. Согласно выбранному нами реперу, $\{M, \vec{e}_1, \vec{e}_4\}$ – плоскость, проходящая через ось вращения. Ее уравнения в координатах имеют вид

$$x^2 = x^3 = 0. \quad (23)$$

Покажем, что эта плоскость постоянна вдоль меридиана (22), воспользовавшись формулой $dx^\alpha = -\omega_\beta^\alpha x^\beta - \omega^\alpha$. Имеем $dx^2 = 0, dx^3 = 0$.

Таким образом, мы показали, что плоскость (23) не меняется вдоль меридиана (22), т.е. меридиан лежит на этой двумерной плоскости.

Теорема 6. Меридианы являются прямыми линиями лишь тогда, когда полная кривизна 2-го рода равна нулю.

Действительно, вдоль меридиана

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega_1^4 \vec{e}_4 = k_1 \omega^1 \vec{e}_4 = 0$$

тогда и только тогда, когда $k_1 = 0$, а следовательно, когда $K_2 = 0$.

Предложение. Линия тока векторного поля нормалей $\{\vec{e}_4\}$ неголономной поверхности вращения лежит в одной двумерной плоскости с осью вращения и с меридианом и ортогональна последнему.

Действительно, поскольку касательный вектор линии тока векторного поля нормалей $\{\vec{e}_4\}$

$$d\vec{r} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 + \omega^3 \vec{e}_3 + \omega^4 \vec{e}_4 \parallel \vec{e}_4,$$

то уравнения линии тока имеют вид $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$.

Очевидно, что линия тока векторного поля нормалей ортогональна меридиану в произвольной точке M неголономной поверхности. Видим, что линия тока, меридиан (22), а также ось вращения (20) лежат в плоскости

$$x^2 = x^3 = 0. \quad (24)$$

Так как

$$\omega_1^2 x^1 + \omega_1^4 x^4 + \omega^2 = 0, \quad \omega_1^3 x^1 + \omega_1^4 x^4 + \omega^3 = 0,$$

то плоскость (2.8) постоянна вдоль линии тока.

3. ГЛАВНЫЕ КРИВИЗНЫ 1-го РОДА СФЕРИЧЕСКОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В выбранном нами каноническом репере матрица оператора A^* имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -2\rho \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

Если $\omega^4 = 0$ не голономно, то оператор A^* не симметричен. Его можно разложить на сумму двух операторов: симметричного B и кососимметричного:

$$A^* = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -\rho \\ 0 & -k & 0 \\ -\rho & 0 & -k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица кососимметричной части оператора A^* имеет только три существенные компоненты, определяющие некоторый инвариантный вектор $\vec{\rho} = \rho \vec{e}_2$, лежащий в касательной гиперплоскости и называемый вектором неголономности в силу того, что он равен нулю лишь для голономного $\omega^4 = 0$.

Собственные значения оператора B с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & -\rho \\ 0 & -k & 0 \\ -\rho & 0 & -k \end{pmatrix},$$

взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 1-го рода, а собственные векторы, им соответствующие, — главными направлениями 1-го рода [3].

Так как оператор B — симметричный, то главные кривизны 1-го рода в каждой точке $M \in G$ являются действительными числами.

Теорема 8. Все три главные кривизны 1-го рода сферической неголономной поверхности вращения различны, одна из них совпадает с кратной кривизной 2-го рода.

Доказательство. Найдем собственные значения оператора B . Характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} -k_1 - \mu & 0 & -\rho \\ 0 & -k - \mu & 0 \\ -\rho & 0 & -k - \mu \end{vmatrix}$$

оператора B равен $(k + \mu)[-(k_1 + \mu)(k + \mu) + \rho^2]$.

Это значит, что одна из главных кривизн 1-го рода $k_1^{(1)} = -\mu_1 = k$, т.е. совпадает с кратной кривизной 2-го рода, а две другие вычисляются по формуле

$$k_{2,3}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(k + k_1 \pm \sqrt{(k - k_1)^2 + 4\rho^2} \right).$$

Наибольшая и наименьшая из главных кривизн 1-го рода являются экстремальными значениями нормальных кривизн кривых, проходящих через точку $M \in G$ [3].

Определитель матрицы оператора B есть полная кривизна K_1 1-го рода, след матрицы оператора B — средняя кривизна H_1 1-го рода.

Средние кривизны 1-го и 2-го рода совпадают ($H_1 = H_2$) для любой неголономной поверхности [3].

Полные кривизны 1-го и 2-го рода сферической неголономной поверхности вращения связаны следующим равенством

$$K_2 = K_1 - k|\vec{\rho}|^2. \quad (25)$$

Так как $k \neq 0$, то из формулы (25) следует, что для сферической неголономной поверхности вращения в E_4 полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают тогда и только тогда, когда $\omega^4 = 0$ голономно.

Заметим, что для произвольной неголономной поверхности из равенства полных кривизн 1-го и 2-го рода в пространстве размерности больше трех не следует голономность [1].

Теорема 9. Если $K_2 = 0$, то в каждой точке $M \in G$ касательные к асимптотическим линиям неголономной поверхности вращения образуют действительный конус 2-го порядка. Меридиан при этом является прямой линией и одной из образующих этого конуса.

Доказательство. Из равенства $\langle d^2 \vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0$, характеризующего асимптотические линии, находим дифференциальные уравнения асимптотических линий

$$2\rho\omega^1\omega^3 + k(\omega^2)^2 + k(\omega^3)^2 = 0, \quad \omega^4 = 0. \quad (26)$$

Тогда совокупность всех касательных к ним в данной точке определяется уравнениями

$$(x^2)^2 + \left(x^3 + \frac{\rho}{k}x^1\right)^2 - \frac{\rho^2}{k^2}(x^1)^2 = 0, \quad x^4 = 0,$$

т.е. представляет собой действительный конус 2-го порядка.

Так как меридиан определяется системой (15), то мы видим, что он является одной из асимптотических линий. С другой стороны, вдоль меридиана $d\vec{e}_1 = 0$, т.е. его касательный вектор $\vec{e}_1$ не меняется. Это значит, что меридиан при $K_2 = 0$ есть прямая линия — одна из асимптотических, проходящих через данную точку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Онищук Н.М.* Геометрия векторного поля в четырехмерном евклидовом пространстве // Междунар. конф. по математике и механике. Томск: ТГУ, 2003. С. 60–68.
2. *Роговой М.Р.* К метрической теории неголономных гиперповерхностей в n -мерном пространстве // Укр. геом. журнал. Харьков, 1968. Вып. 5–6. С. 126–138.
3. *Синцов Д.М.* Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972.

Статья представлена кафедрой геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 26 апреля 2004 г.