

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.2

Е.В. Астафьева, А.Ф. Терпугов

МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОЙ КОМПАНИИ С ЭФФЕКТОМ «НАДОЕДАНИЯ» РЕКЛАМЫ

Рассматривается математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей однородный товар, с учетом того эффекта, что при повторении рекламы она начинает «надоедать» и для возобновления ее действия на покупателя требуется смена «рекламного ролика». Рассматривается два случая – когда цена продаваемого товара фиксирована и когда влияние рекламы приводит к смещению кривой спрос – цена.

Реклама, как известно, является «двигателем торговли» и в настоящее время продвижение продукции на рынок в отсутствие рекламы практически невозможно. С другой стороны, математическая теория рекламы в настоящее время только начинает развиваться, и работ, посвященных математическим моделям влияния рекламы на продажи и планирования рекламных кампаний, еще немного [1–3]. В этих работах еще не исследованы многие черты влияния рекламы на человека, в частности, тот эффект, который можно назвать «надоеданием» рекламы, когда продолжающаяся однообразная реклама надоедает человеку, он перестает обращать на нее внимание, и она не влияет на его покупки. В этом случае необходимо «сменить пластинку» и вместо надоевшего рекламного ролика подготовить и пустить другой. Таким образом, всякая реклама развивается циклами, когда один рекламный ролик прокатывается некоторое время, а затем он сменяется другим. В данной статье делается попытка исследовать этот эффект и учесть его при планировании рекламной кампании.

МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОЙ КАМПАНИИ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ЦЕНЕ ТОВАРА

Рассмотрим фирму, производящую некоторый товар. Пусть q есть количество товара, производимого в единицу времени, c – затраты на производство единицы товара, p – розничная цена продажи единицы товара, D – накладные расходы фирмы, то есть затраты на производственные расходы. Рассмотрим случай, когда количество выпускаемого товара и цена продажи фиксированы.

Прибыль фирмы в единицу времени равна $(p - c)q - D$. Так как D является постоянной величиной, то оно в дальнейшем выписываться не будет.

Будем считать, что производство рентабельно и на рынке установилось равновесие, так что весь товар, производимый фирмой, продается, но большего количества товара рынок не потребляет.

Пусть на рекламу в единицу времени выделяется $\alpha(t)$ денег. Величину, характеризующую эффективность рекламы, в дальнейшем будем обозначать как $R(t)$. В качестве модели, определяющей зависимость влияния рекламы от времени, возьмем следующую модель:

$$\frac{dR(t)}{dt} + \kappa(t)R(t) = \kappa_0\alpha(t), \quad (1)$$

где $\alpha(t)$ есть количество денег, выделяемых на рекламу в единицу времени. Так как неизвестно, в каких единицах измерять R , то ее размерность возьмем такую же, как и у α ; и из этих соображений коэффициент перед $\alpha(t)$ взят с такой же размерностью, как и перед $R(t)$.

На величину R , описывающую влияние рекламы, оказывают влияние два фактора. Во-первых, она зависит от количества средств, вкладываемых в рекламную компа-

нию, и чем больше их вкладывается, тем больше влияние рекламы. Во-вторых, имеет место эффект «забывания» рекламы, когда с прекращением рекламной кампании ее влияние постепенно уменьшается.

То, что коэффициент $\kappa(t)$ зависит от времени t как раз и отражает эффект «надоедания» рекламы, так как увеличение $\kappa(t)$ приводит к увеличению скорости забывания рекламы. Для определенности будем считать, что $\kappa_0 = \kappa(0)$.

Обозначим через $\Pi(t)$ прибыль фирмы в единицу времени. Тогда рассматриваемая ситуация описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi(t)}{dt} = (p - c)q(R(t)) - \alpha(t) - D, \\ \frac{dR(t)}{dt} + \kappa(t)R(t) = \kappa_0\alpha(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $\kappa_0 = \kappa(0)$ и $\Pi(0) = 0$.

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ РЕКЛАМЫ

Из первого уравнения системы (2) имеем

$$\Pi(T, q) = \int_0^T [(p - c)q(R(t)) - \alpha(t)] dt - DT.$$

Подставляя сюда второе уравнение из системы (2), получим

$$\Pi(T) = \int_0^T \left[(p - c)q(R(t)) - \frac{1}{\kappa_0} R'(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R(t) \right] dt - DT. \quad (3)$$

Последнее слагаемое в (3) не зависит от вида $\alpha(t)$, поэтому при решении задачи оптимизации его можно не учитывать; в дальнейшем оно не будет выписываться.

Рассмотрим теперь решение задачи $\Pi(T) \Rightarrow \max_{R(t)}$.

Уравнение Эйлера для функционала (3) имеет вид

$$(p - c)q'(R(t)) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} = 0. \quad (4)$$

Обозначим корень этого уравнения через $R_0(t)$, он находится из уравнения

$$q'(R_0(t)) = \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} \frac{1}{p - c}, \quad (5)$$

и определяет оптимальный уровень воздействия рекламы в «стационарном» режиме.

Однако на этот режим еще надо выйти. Поэтому рассмотрим случай, когда цикл жизни рекламного ролика выглядит следующим образом.

Пусть рекламный ролик начинает прокручиваться в момент времени $t=0$. Влияние рекламы в этом случае начинается с того значения, которое осталось после предыдущего

ролика, т.е. с $R(0)$. В первой фазе «жизни» этого ролика, которая составляет интервал времени $[0, T_1]$, на проведение рекламной компании выделяется в единицу времени максимальное количество денег α_m . Так продолжается до тех пор, пока мы не выйдем на стационарный режим.

Стационарный режим ведется на интервале $[T_1, T_2]$, при этом поддерживается уровень влияния рекламы, равный $R_0(t)$. Из-за эффекта «надоедания» уровень влияния рекламы постепенно снижается, и когда он достигает значения $R(0)$, надо запускать новый ролик. Таким образом, новый цикл определяется условием $R(T_2)=R(0)$.

Рассмотрим каждый период в отдельности.

ПЕРИОД РАСКРУТКИ РЕКЛАМЫ

Эта фаза происходит на интервале времени $[0, T_1]$. Для нее выполнены условия $R(0)=R_0(T_2)$ и $\alpha(t)=\alpha_m$. Тогда решение уравнения (1) имеет вид

$$R(t) = R(T_2) \exp\left(-\int_0^t \kappa(\tau) d\tau\right) + \kappa_0 \alpha_m \int_0^t \exp\left(-\int_u^t \kappa(v) dv\right) du. \quad (6)$$

Момент времени выхода из этого участка определяется соотношением $R(T_1)=R_0(T_1)$, т.е. уравнением

$$R_0(T_1) = R_0(T_2) \exp\left(-\int_0^{T_1} \kappa(\tau) d\tau\right) + \kappa_0 \alpha_m \int_0^{T_1} \exp\left(-\int_u^{T_1} \kappa(v) dv\right) du. \quad (7)$$

Доход фирмы на этом участке равен

$$\Pi_1 = \int_0^{T_1} [(p-c)q(R(t)) - \alpha_m] dt - DT_1. \quad (8)$$

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Эта фаза цикла происходит на временном интервале $[T_1, T_2]$. Для нее $R(t)=R_0(t)$, расходы фирмы равны

$$\alpha(t) = \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) + \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t),$$

а доход равен

$$\Pi_2 = \int_0^{T_2} \left[(p-c)q(R(t)) - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt - D(T_2 - T_1). \quad (9)$$

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИКЛА

Будем считать, что на разработку нового рекламного ролика расходуется сумма G . Тогда суммарный доход фирмы на протяжении всего цикла равен

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \int_0^{T_1} [(p-c)q(R(t))] dt + \int_{T_1}^{T_2} \left[(p-c)q(R(t)) - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt - DT_2 - G. \quad (10)$$

В качестве критерия оптимальности примем доход фирмы Π в единицу времени. Тогда, не учитывая постоянного слагаемого $(-D)$, получим

$$P = \left\{ \int_0^{T_1} [(p-c)q(R(t))] dt + \int_{T_1}^{T_2} \left[(p-c)q(R_0(t)) - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt - G \right\} / T_2. \quad (11)$$

Заметим, что T_2 входит в первое слагаемое через $R_0(T_2)$, входящее в $R(t)$.

Требуя выполнения условия $P \Rightarrow \max_{T_2}$, что приводит к уравнению dP/dT_2 , мы получим уравнение для определения общей длины цикла T_2 :

$$T_2 \left\{ (p-c)R'_0(T_2) \int_0^{T_1} q'(R(t)) \exp\left(-\int_0^t \kappa(\tau) d\tau\right) dt + (p-c)q(R_0(T_2)) - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(T_2) - \frac{\kappa(T_2)}{\kappa_0} R_0(T_2) \right\} = \int_0^{T_1} [(p-c)q(R(t)) - \alpha_m] dt + \int_{T_1}^{T_2} \left[(p-c)q(R_0(t)) - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt - G. \quad (12)$$

Разумеется, решить это уравнение можно лишь численно. Зная T_2 , можно найти и все остальные характеристики цикла.

МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОЙ КАМПАНИИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЦЕНОЙ ТОВАРА

Описание ситуации

Пусть зависимость спрос – цена имеет вид $p+bq=a$, или, в явном виде, $p = a - bq$. Тогда доход фирмы в единицу времени составит величину $(a - bq - c)q - D$.

Находя максимум этой величины по объему производства q , легко получить, что этот максимум достигается при $q = (a - c)/2b$ и доход фирмы в единицу времени при таком объеме производства равен

$$[(a - c)^2/4b] - D. \quad (13)$$

При этом естественно считается, что эта величина положительна, т.е. производство рентабельно. Так как D является постоянной величиной, то оно в дальнейшем выписываться не будет.

Модель влияния рекламы

Рассмотрим теперь ситуацию, когда фирма для увеличения своих доходов тратит часть своих средств на рекламную компанию. Реклама оказывает психологическое воздействие на покупателя, которое приводит к изменению зависимости спрос – цена. Рассмотрим сначала случай, когда влияние рекламы приводит к смещению зависимости спрос – цена параллельно самой себе. Это факт мы будем учитывать тем, что будем считать величину a зависящей от R , т.е. брать зависимость спрос – цена в виде

$$p + bq = a(R), \text{ или } p = a(R) - bq. \quad (14)$$

В дальнейшем будем считать, что $a(R)$ монотонно возрастает с ростом R , но $a'(R)$ монотонно убывает с ростом R и существует конечный предел $\lim_{R \rightarrow \infty} a(R)$.

В качестве уравнения для величины $R(t)$ вновь возьмем уравнение (1). Тогда объем товара $q(t)$, производи-

мого фирмой в момент времени t :

$$q(t) = \frac{a(R(t)) - c}{2b}, \quad (15)$$

где $R(t)$ определяется уравнением (1).

Тогда получаем следующую систему уравнений, описывающую рассматриваемую ситуацию:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi(t)}{dt} = \frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \alpha(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} + \kappa(t)R(t) = \kappa_0\alpha(t), \end{cases} \quad (16)$$

с начальными условиями $\kappa_0 = \kappa(0)$, $R(0) = 0$, $\Pi(0) = 0$.

СТАЦИОНАРНАЯ СИТУАЦИЯ

Из первого уравнения системы (16) имеем

$$\Pi(T, q) = \int_0^T \left[\frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \alpha(t) \right] dt - DT.$$

Подставляя сюда второе уравнение из системы (16), получим

$$\begin{aligned} \Pi(T) = \int_0^T & \left[\frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R'(t) - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R(t) \right] dt - DT. \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее слагаемое в (17) не зависит от вида $\alpha(t)$ и поэтому при решении задачи оптимизации его можно не учитывать; в дальнейшем оно не будет выписываться.

Рассмотрим теперь решение задачи $\Pi(T) \Rightarrow \max_{R(t)}$.

Уравнение Эйлера для функционала (17) имеет вид

$$(a(R(t)) - c)a'(R(t)) = 2b \frac{\kappa(t)}{\kappa_0}. \quad (18)$$

Обозначим корень этого уравнения через $R_0(t)$; он и определяет оптимальный уровень воздействия рекламы в «стационарном» режиме.

ПЕРИОД РАСКРУТКИ РЕКЛАМЫ

Эта фаза происходит на интервале времени $[0, T_1]$. Для нее выполнены условия $R(0) = R_0(T_2)$ и $\alpha(t) = \alpha_m$. Тогда решение уравнения (1) снова имеет вид (6) и момент времени выхода из этого участка определяется соотношением $R(T_1) = R_0(T_1)$.

Доход фирмы на этом участке равен

$$\Pi_1 = \int_0^{T_1} \left[\frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \alpha_m \right] dt - DT_1. \quad (19)$$

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Эта фаза цикла происходит на временном интервале $[T_1, T_2]$. Для нее $R(t) = R_0(t)$, расходы фирмы равны

$$\alpha(t) = \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) + \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t),$$

а доход

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \int_{T_1}^{T_2} & \left[\frac{(a(R_0(t)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt - D(T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (20)$$

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИКЛА

Будем считать, что на разработку нового рекламного ролика расходуется сумма G . Тогда суммарный доход фирмы на протяжении всего цикла равен

$$\begin{aligned} \Pi_1 + \Pi_2 = \int_0^{T_1} & \left[\frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \alpha_m \right] dt - DT_2 - G + \\ + \int_{T_1}^{T_2} & \left[\frac{(a(R_0(t)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (21)$$

В качестве критерия оптимальности возьмем критерий вида

$$P = \frac{\Pi_1 + \Pi_2}{T_2} \Rightarrow \max_{T_2}. \quad (22)$$

Это приводит к уравнению для определения T_2 :

$$\begin{aligned} T_2 \left\{ \frac{[a(R_0(T_2)) - c]^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(T_2) - \frac{\kappa(T_2)}{\kappa_0} R_0(T_2) + \right. \\ \left. + R'_0(T_2) \int_0^{T_1} \frac{(a(R(t)) - c)a'(R(t))}{2b} \exp\left(-\int_0^t \kappa(\tau) d\tau\right) dt \right\} = \\ = \int_0^{T_1} \left[\frac{(a(R(t)) - c)^2}{4b} - \alpha_m \right] dt - G + \\ + \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{(a(R_0(t)) - c)^2}{4b} - \frac{1}{\kappa_0} R'_0(t) - \frac{\kappa(t)}{\kappa_0} R_0(t) \right] dt, \end{aligned} \quad (23)$$

решить которое можно лишь численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1. С. 25–29.
2. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Оптимизация расходов на рекламу при деятельности страховой компании // Изв. вузов. Физика. 2001. № 6. С. 3–7.
3. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу // Вестник Томского государственного университета, № 275. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. С. 181–184.

Статья представлена кафедрой теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 30 апреля 2004 г.