

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ НАКОПЛЕННОГО КАПИТАЛА ПЕНСИОННОГО ФОНДА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ

Предлагается модель процесса изменения накопленного капитала Пенсионного фонда Российской Федерации в зависимости от суммы поступивших страховых взносов с учетом получения доходов от инвестирования и суммы выплаченной накопленной части пенсии застрахованным лицам. Изучаются основные характеристики капитала фонда.

Под накопленным капиталом Пенсионного фонда будем понимать совокупность средств, включающую в себя суммы страховых взносов, перечисленных в Пенсионный фонд на финансирование накопительной части трудовой пенсии и доходы от операций по инвестированию временно свободных средств пенсионных накоплений.

Согласно Федеральному закону [1] от 20.07.04, внесемому изменения в принятый ранее закон об обязательном пенсионном страховании [2], накопительная часть пенсии формируется только для лиц 1967 г. рождения и моложе.

Важной составляющей, обеспечивающей формирование накопленного капитала, является получение доходов от инвестирования средств пенсионных накоплений. Очевидно, что выплата накопительной части пенсии начнется не ранее 2022 г., поэтому целесообразно учесть изменение во времени уровня доходности (обозначим его δ) инвестиционных портфелей, т.е. считать $\delta = \delta(t)$.

По мнению специалистов, существует достаточно сильная корреляционная связь между доходностью $\delta(t)$ и уровнем инфляции $k(t)$.

Рассмотрим наиболее простую модель изменения уровня инфляции $k(t)$, определяемую следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dk(t)}{dt} = -v(k(t) - k_1), \\ k(0) = k_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $v > 0$ – параметр, определяющий темп снижения уровня инфляции; параметр k_1 имеет смысл экономически обоснованного уровня инфляции. В развитых странах он составляет 2–3 %.

Решая задачу (1), найдем уровень $k(t)$ инфляции в виде $k(t) = k_1 + (k_0 - k_1)e^{-vt}$. В наших исследованиях будем предполагать, что темпы изменения во времени средней заработной платы совпадают с соответствующим уровнем инфляции.

Значение параметра v , определяющего темп снижения инфляции, необходимо выбирать из целесообразных экономических соображений и в этом плане v является одним из важнейших управляющих параметров развития экономики.

С точки зрения пенсионной реформы, при малых значениях v уровень инфляции уменьшается медленно, и долгосрочные накопления с течением времени значительно обесцениваются. При больших значениях v уровень инфляции снижается быстро, при этом значительно снижается доходность инвестиционных проектов, так как, доходность, как правило, определяется не текущим уровнем инфляции, а его ожидаемым значением, поэтому происходит незначительное увеличение долгосрочных накоплений за счет дополнительных доходов от инвестиций.

На рынке ценных бумаг различают два вида их доходности δ . Фактическая доходность δ называется номинальной доходностью и, в соответствии с формулой Фишера, считается равной сумме уровня инфляции $k(t)$ и реальной доходности $\delta(t)$. Здесь под реальной доходностью $\delta(t)$ понимается та доходность, в которой устранена инфляция.

В наших исследованиях в качестве доходности δ инвестиционных портфелей будем рассматривать реальную доходность $\delta(t)$, исключая влияние инфляции и будем

считать, что $\delta(t) = \theta k(t)$, где параметр θ принимает значение порядка единицы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

При построении математической модели процесса изменения накопленного капитала ПФР будем исходить из следующих предположений:

- поток заявок на страхование является пуассоновским с параметром $\lambda(t)$;
- сумма страховых взносов, ежемесячно перечисляемая в ПФР на финансирование накопительной части трудовой пенсии, является значением случайной величины с функцией распределения $A(x)$;
- величина накопительной части трудовой пенсии, ежемесячно выплачиваемой пенсионерам, является значением случайной величины с функцией распределения $B(x)$;
- величина выплат пенсионных накоплений в случае смерти застрахованного лица его правопреемникам, является значением случайной величины с функцией распределения $D(x)$;
- продолжительность трудовой деятельности и продолжительность получения пенсии являются случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно;
- вероятность достижения пенсионного возраста равна r ;
- ставка доходности инвестиционных портфелей равна $\delta(t)$.

В качестве математической модели процесса изменения накопленного капитала ПФР рассмотрим трехмерный случайный процесс $\{i(t), j(t), S(t)\}$, где $i(t)$ – число работающих застрахованных лиц, $j(t)$ – число пенсионеров, $S(t)$ – капитал фонда.

Обозначим

$$P(i(t)=i, j(t)=j, S \leq S(t) \leq S + dS) = P(i, j, S, t) dS.$$

При входящем потоке на страхование $\lambda(t) = \lambda\rho(t)$, где λ – бесконечно большая величина; распределение вероятностей $P(i, j, S, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P(i, j, S, t)}{\partial t} + \delta(t) \frac{\partial (SP(i, j, S, t))}{\partial S} + \\ & + (\lambda\rho(t) + (\mu_1 + 12)i + (\mu_2 + 12)j) P(i, j, S, t) = \\ & = \lambda\rho(t) P(i-1, j, S, t) + 12i \int_0^S P(i, j, S-u, t) dA(u, t) + \\ & + 12j \int_0^\infty P(i, j, S+u, t) dB(u, t) + \\ & + \mu_1 r(i+1) P(i+1, j-1, S, t) + \\ & + \mu_2 (j+1) P(i, j+1, S, t) + \\ & + \mu_1 (1-r)(i+1) \int_0^\infty P(i+1, j, S+u, t) dD(u, t). \end{aligned} \quad (2)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Исследование полученной модели проведем методами асимптотического анализа.

Как показано в работе [3], при $\lambda \rightarrow \infty$ предельный процесс $\{\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\}$ для последовательности процессов $\left\{\frac{1}{\lambda}i(t), \frac{1}{\lambda}j(t), \frac{1}{\lambda}S(t)\right\}$ является детерминированной трехмерной вектор-функцией вида:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= e^{-\mu_1 t} \left(\int_{t_0}^t \rho(s) e^{\mu_1 s} ds + \alpha_0 e^{\mu_1 t_0} \right), \\ \beta(t) &= \left(\mu_1 r \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \rho(u) e^{\mu_1 u} du + \alpha_0 e^{\mu_1 t_0} \right) e^{(\mu_2 - \mu_1)s} ds + \\ &\quad + \beta_0 e^{\mu_2 t_0} e^{-\mu_2 t}, \\ \gamma(t) &= \int_{t_0}^t ((12a_1(s) - \mu_1(1-r)d_1(s))\alpha(s) - \\ &\quad - 12b_1(s)\beta(s)) e^{\int_{t_0}^t \delta(u) du} ds + \gamma_0 e^{\int_{t_0}^t \delta(u) du},\end{aligned}\quad (3)$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $d_1(t)$ – первые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x, t)$, $B(x, t)$, $D(x, t)$; $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\beta(t_0) = \beta_0$, $\gamma(t_0) = \gamma_0$.

Проведем теперь исследование процесса отклонения процессов $\frac{1}{\lambda}i(t)$, $\frac{1}{\lambda}j(t)$ и $\frac{1}{\lambda}S(t)$ от найденных средних $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$. Для этого рассмотрим предельный, при $\lambda \rightarrow \infty$, процесс для последовательности

$$\left\{ \frac{i(t) - \lambda\alpha(t)}{\sqrt{\lambda}}, \frac{j(t) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda}}, \frac{S(t) - \lambda\gamma(t)}{\sqrt{\lambda}} \right\}. \quad (4)$$

Теорема. При $\lambda \rightarrow \infty$ предельный процесс $\{x(t), y(t), z(t)\}$ для последовательности (4) является трехмерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$\begin{aligned}A_1(x, y, z, t) &= -\mu_1 x(t), \\ A_2(x, y, z, t) &= \mu_1 r x(t) - \mu_2 y(t), \\ A_3(x, y, z, t) &= (12a_1(t) - \mu_1(1-r)d_1(t))x(t) - \\ &\quad - 12b_1(t)y(t) + \delta(t)z(t)\end{aligned}\quad (5)$$

и диффузии

$$\begin{aligned}B_{11}(t) &= \rho(t) + \mu_1 \alpha(t), \quad B_{12}(t) = -\mu_1 r \alpha(t), \\ B_{13}(t) &= -\mu_1(1-r)\alpha(t), \\ B_{22}(t) &= \mu_1 r \alpha(t) + \mu_2 \beta(t), \quad B_{23}(t) = 0, \\ B_{33}(t) &= (12a_2(t) - \mu_1(1-r)d_2(t))\alpha(t) + 12b_2(t)\beta(t),\end{aligned}\quad (6)$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $d_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$, $d_2(t)$ – соответственно первые и вторые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x, t)$, $B(x, t)$, $D(x, t)$.

Доказательство. Обозначим $(1/\lambda) = \varepsilon^2$ и выполним в (2) замену $i\varepsilon^2 = \alpha(t) + \varepsilon x$, $j\varepsilon^2 = \beta(t) + \varepsilon y$, $S\varepsilon^2 = \gamma(t) + \varepsilon z$, $P(i, j, S, t)/\varepsilon = H(x, y, z, t, \varepsilon)$. Получим уравнение:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H(x, y, z, t, \varepsilon)}{\partial t} - \frac{\alpha'(t)}{\varepsilon} \frac{\partial H(x, y, z, t, \varepsilon)}{\partial x} - \\ &\frac{\beta'(t)}{\varepsilon} \frac{\partial H(x, y, z, t, \varepsilon)}{\partial y} - \frac{\gamma'(t)}{\varepsilon} \frac{\partial H(x, y, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ &\quad + \lambda(\rho(t) + (\mu_1 + 12)(\alpha(t) + \varepsilon x) + \\ &\quad + (\mu_2 + 12)(\beta(t) + \varepsilon y))H(x, y, z, t, \varepsilon) + \\ &\quad + \frac{\delta(t)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \{(\gamma(t) + \varepsilon z)H(x, y, z, t, \varepsilon)\} = \\ &\quad = \lambda\rho(t)H(x - \varepsilon, y, z, t, \varepsilon) + \\ &\quad + 12\lambda(\alpha(t) + \varepsilon x) \int_0^\infty H(x, y, z - \varepsilon u, t, \varepsilon) dA(u, t) + \\ &\quad + 12\lambda(\beta(t) + \varepsilon y) \int_0^\infty H(x, y, z + \varepsilon u, t, \varepsilon) dB(u, t) + \\ &\quad + \mu_1 r(\alpha(t) + \varepsilon(x + \varepsilon))H(x + \varepsilon, y - \varepsilon, z, t, \varepsilon) + \\ &\quad + \mu_2 r(\beta(t) + \varepsilon(y + \varepsilon))H(x, y + \varepsilon, z, t, \varepsilon) + \\ &\quad + \mu_1(1-r)\lambda(\alpha(t) + \varepsilon(x + \varepsilon)) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty H(x + \varepsilon, y, z + \varepsilon u, t, \varepsilon) dD(u, t).\end{aligned}$$

Раскладывая функции $H(y \pm \varepsilon, z \pm \varepsilon u, t, \varepsilon)$ в ряд по приращениям аргументов с точностью до $o(\varepsilon^2)$ и выполнив элементарные преобразования, получим в результате предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \{ -\mu_1 x(t) H(x, y, z, t) \} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \{ (\mu_1 r x(t) - \mu_2 y(t)) H(x, y, z, t) \} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \{ (12a_1(t) - \mu_1(1-r)d_1(t))x(t) - \\ &\quad - 12y(t)b_1(t) + \delta(t)z(t) \} H(x, y, z, t) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\rho(t) + \mu_1 \alpha(t)) \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mu_1 r \alpha(t) + \mu_2 \beta(t)) \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \\ &\quad + \frac{1}{2}((12a_2(t) - \mu_1(1-r)d_2(t))\alpha(t) + \\ &\quad + 12\beta(t)) \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \mu_1 r \alpha(t) \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + \mu_1(1-r)\alpha(t) \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial x \partial z}.\end{aligned}$$

Данное уравнение является уравнением Фоккера–Планка для плотности $H(x, y, z, t)$ распределения вероятностей значений двумерного диффузионного процесса $\{x(t), y(t), z(t)\}$ с коэффициентами переноса (5) и диффузии (6), являющегося решением системы трех стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx(t) = A_1(t)dt + \sigma_{11}dw_1(t) + \sigma_{12}dw_2(t) + \sigma_{13}dw_3(t), \\ dy(t) = A_2(t)dt + \sigma_{21}dw_1(t) + \sigma_{22}dw_2(t) + \sigma_{23}dw_3(t), \\ dz(t) = A_3(t)dt + \sigma_{31}dw_1(t) + \sigma_{32}dw_2(t) + \sigma_{33}dw_3(t), \end{cases} \quad (7)$$

где $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы.

Исходя из полученных значений коэффициентов диффузии (6), определим параметры σ_{ij} системы (7). Пусть $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, тогда

$$\sigma_{11}(t) = \sqrt{B_{11}(t)}, \quad \sigma_{21}(t) = \frac{B_{12}(t)}{\sqrt{B_{11}(t)}},$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(t) &= \sqrt{B_{22}(t) - \frac{B_{12}^2(t)}{B_{11}(t)}}, \quad \sigma_{31}(t) = \frac{B_{13}(t)}{\sqrt{B_{11}(t)}}, \\ \sigma_{32}(t) &= -\frac{B_{12}(t)B_{13}(t)}{\sqrt{B_{11}(t)(B_{11}(t)B_{22}(t) - B_{12}^2(t))}}, \\ \sigma_{33}(t) &= \sqrt{B_{33}(t) - \frac{B_{22}(t)B_{13}^2(t)}{B_{11}(t)B_{22}(t) - B_{12}^2(t)}},\end{aligned}\quad (8)$$

В этом случае система (7) принимает вид

$$\begin{cases} dx(t) = -\mu_1 x(t)dt + \sigma_{11} dw_1(t), \\ dy(t) = (\mu_1 r x(t) - \mu_2 y(t))dt + \sigma_{21} dw_1(t) + \sigma_{22} dw_2(t), \\ dz(t) = ((12a_1(t) - \mu_1(1-r)d_1(t))x(t) - 12b_1(t)y(t))dt + \\ + \sigma_{31} dw_1(t) + \sigma_{32} dw_2(t) + \sigma_{33} dw_3(t), \end{cases}\quad (9)$$

где коэффициенты σ_{ij} определяются равенствами (8) и не зависят от значений процесса $\{x(t), y(t), z(t)\}$.

Используя формулы Ито, найдем решение системы (9) в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\mu_1 t} \left\{ x_0 e^{\mu_1 t_0} + \int_{t_0}^t \sigma_{11}(s) e^{\mu_1 s} dw_1(s) \right\}, \\ y(t) &= e^{-\mu_2 t} \left\{ y_0 e^{\mu_2 t_0} + r\mu_1 \int_{t_0}^t x(s) e^{\mu_1 s} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \sigma_{21}(s) e^{\mu_2 s} dw_1(s) + \int_{t_0}^t \sigma_{22}(s) e^{\mu_2 s} dw_2(s), \right. \\ z(t) &= z_0 e^{\int_{t_0}^t \delta(u) du} + \int_{t_0}^t ((12a_1(s) - \mu_1(1-r)d_1(s))x(s) - \\ &\quad - 12b_1(s)y(s)) e^{\int_{t_0}^s \delta(u) du} ds + \int_{t_0}^t \sigma_{31}(s) e^{\int_{t_0}^s \delta(u) du} dw_1(s) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sigma_{32}(s) e^{\int_{t_0}^s \delta(u) du} dw_2(s) + \int_{t_0}^t \sigma_{33}(s) e^{\int_{t_0}^s \delta(u) du} dw_3(s),\end{aligned}\quad (10)$$

где $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Процессы $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при нормально распределенных начальных значениях, очевидно, являются гауссовскими. Теорема доказана.

Используя явные выражения процессов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (10) и свойства стандартных винеровских процессов, нетрудно получить выражение корреляционной функции процесса $z(t)$

$$R_z(t_1, t_2) = M\{z(t_1)z(t_2)\},\quad (11)$$

которое не приводим здесь из-за большого объема выкладок.

В силу выполненной замены процесс $S(t)$ изменения накопленного капитала Пенсионного фонда Российской Федерации имеет вид

$$S(t) = \lambda\gamma(t) + \sqrt{\lambda}z(t),\quad (12)$$

где детерминированная функция $\gamma(t)$ определяется формулой (3), а $z(t)$ – гауссовский случайный процесс, определяемый системой (9) стохастических дифференциальных уравнений, решение которой записано в виде (10). Очевидно, что математическое ожидание процесса $S(t)$ составляет $\lambda\gamma(t)$. Зная математическое ожидание и корреляционную функцию, нетрудно получить другие характеристики изучаемого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федеральный закон* от 20.07.2004 г. № 70-ФЗ «О внесении изменений в главу 24 части второй Налогового кодекса Российской Федерации, Федеральный закон «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации» и признании утратившим силу некоторых положений законодательных актов Российской Федерации».
2. *Федеральный закон* от 15.12.2001 № 167-ФЗ «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации».
3. *Гарайшина И.Р.* Математические модели процесса изменения накопленного капитала Пенсионного фонда // *Обработка данных и управление в сложных системах*. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 39–48.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика» 3 ноября 2004 г.