

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПАРТИИ ТОВАРА И РОЗНИЧНОЙ ЦЕНЫ ПРОДАЖИ НЕПРЕРЫВНО ПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Рассматривается задача определения оптимального объема партии товара, поступающего в розничную продажу, и определения его розничной цены в случае, когда продаваемый товар непрерывно портится со временем (фрукты, овощи и т.д.). Рассматривается также вопрос управления ценой розничной продажи, максимизирующий доход в единицу времени.

В последнее время стала приобретать большое внимание тематика, которая получила название микро-структуры рынка [1]. В ней рассматриваются вопросы установления цены продаваемого товара, изменения цены продажи в зависимости от времени и т.п. Данная работа находится в русле этой проблематики и продолжает работы [2, 3].

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть имеется некоторая скоропортящаяся продукция (например, фрукты, овощи и т.д.), которая портится с течением времени (овощи и фрукты гниют и т.п.).

Продавец покупает партию товара объема Q_0 по оптовой цене d и продает ее по розничной цене c . Ставится задача нахождения значений Q_0 и c , при которых средняя прибыль продавца будет максимальной.

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЫЛИ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ)

Пусть $Q(t)$ есть количество товара, имеющегося в наличии в момент времени t . Рассмотрим интервал времени $[t, t + \Delta t]$. Будем считать, что за этот промежуток времени произойдут следующие изменения.

1. Испортится количество товара $\Delta Q(t) = \kappa Q(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

2. За это время придут $\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t)$ покупателей и каждый из них купит детерминированное количество товара a_1 .

Тогда имеет место соотношение

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) - (\kappa Q(t) + a_1 \lambda(c))\Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда получаем следующее дифференциальное уравнение для $Q(t)$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\kappa Q(t) - a_1 \lambda(c), \quad (1)$$

которое надо решить при начальном условии $Q(0) = Q_0$.

Решая это уравнение стандартными методами, получим его решение в виде

$$Q(t) = Q_0 e^{-\kappa t} - \frac{a_1 \lambda(c)}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t}). \quad (2)$$

Найдем момент T_0 окончания продажи этой партии товара. Он определяется соотношением

$$Q_0 e^{-\kappa T_0} - \frac{a_1 \lambda(c)}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T_0}) = 0,$$

откуда получаем

$$T_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right). \quad (3)$$

Так как на покупку этой партии товара было потрачено dQ_0 денег, то прибыль от реализации этой партии составит величину

$$\Pi = a_1 c \lambda(c) T_0 - d \cdot Q_0. \quad (4)$$

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПАРТИИ ТОВАРА

Будем считать, что после реализации партии товара продавец тратит время T_b на приобретение следующей партии. Тогда средняя прибыль продавца в единицу времени составит величину

$$\begin{aligned} P &= \frac{a_1 c \lambda(c) \cdot \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right) - d Q_0}{\frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right) + T_b} = \\ &= \frac{a_1 c \lambda(c) \cdot \ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right) - d \kappa Q_0}{\ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right) + \kappa T_b}. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем считать, что критерием оптимальности работы продавца является максимизация прибыли, получаемой за единицу времени, то есть критерий оптимальности имеет вид $P \Rightarrow \max_{Q_0, c}$.

Решим сначала задачу о нахождении оптимального объема партии товара Q_0 . Представим (5) в виде

$$P = a_1 c \lambda(c) \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right) - \frac{d}{c} \cdot \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)}}{\ln \left(1 + \frac{Q_0 \kappa}{a_1 \lambda(c)} \right) + \kappa T_b}.$$

Пусть розничная цена продажи c фиксирована. Обозначим $z = \kappa Q_0 / a_1 \lambda(c)$. Тогда P можно представить в виде

$$P = a_1 c \lambda(c) \cdot \frac{\ln(1+z) - (d/c) \cdot z}{\ln(1+z) + \kappa T_b}, \quad (6)$$

и, при фиксированном c , задача примет вид

$$f(z) = \frac{\ln(1+z) - (d/c) \cdot z}{\ln(1+z) + \kappa T_b} \Rightarrow \max_z. \quad (7)$$

Выясним сначала, при каких условиях этот максимум существует. Прежде всего заметим, что, так как при $z \geq 0$ $\ln(1+z) \leq z$, то при $d/c \geq 1$ $f(z) \leq 0$, что, впрочем, совершенно естественно. Поэтому надо рассматривать лишь случай $d/c < 1$.

Заметим, что $f(0) = 0$. Вычисляя производную от $f(z)$, получим

$$f'(z) = \frac{\kappa T_b + (d/c)z - \frac{d}{c} \ln(1+z) - \frac{d}{c} \kappa T_b}{(\ln(1+z) + \kappa T_b)^2}, \quad (8)$$

откуда следует, что

$$f'(0) = \frac{1 - (d/c)}{\kappa T_b} > 0,$$

т.е. в окрестности точки $z = 0$ $f(z)$ монотонно возрастает.

Далее, из (7) легко получить, что при $z \rightarrow +\infty$ $f(z) \rightarrow -\infty$, что говорит о том, что максимальное значение $f(z)$ существует.

Само оптимальное значение z находится из условия $f'(z) = 0$, которое приводит к уравнению

$$\frac{\kappa T_b + (d/c)z}{1+z} - \frac{d}{c} \ln(1+z) - \frac{d}{c} \kappa T_b = 0. \quad (9)$$

В силу сказанного выше, это уравнение всегда имеет корень.

Покажем, что этот корень единственный. Для этого перепишем уравнение (9) в виде

$$(1+z) \ln(1+z) = \kappa T_b \left(\frac{c}{d} - 1 \right) + (1 - \kappa T_b) z. \quad (10)$$

Функция $\varphi(z) = (1+z) \ln(1+z)$ монотонно возрастает и выпукла вниз, так как при $z \geq 0$ $\varphi'(z) \geq 0$ и $\varphi''(z) \geq 0$. При $z \rightarrow +\infty$ она растет как $z \ln z$, т.е. быстрее, чем az . С другой стороны, правая часть (10) представляет собой график прямой линии, причем при $z = 0$ значение выражения, стоящего в правой части (10) положительно. Поэтому уравнение (10) имеет единственный корень и оптимальное значение z единственно.

Обозначая оптимальное значение z через z_{opt} (его можно найти лишь численно), можно найти и оптимальный объем партии товара:

$$Q_{\text{opt}} = \frac{z_{\text{opt}} a_1 \lambda(c)}{\kappa}. \quad (11)$$

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ РОЗНИЧНОЙ ЦЕНЫ

Пусть теперь поддерживается $z = z_{\text{opt}}$. Тогда P зависит от розничной цены c через сомножитель

$$c \lambda(c) \ln(1+z_{\text{opt}}) - \lambda(c) d \cdot z_{\text{opt}},$$

и поэтому задача нахождения оптимальной розничной цены приобретает вид

$$c \lambda(c) \ln(1+z_{\text{opt}}) - \lambda(c) d \cdot z_{\text{opt}} \Rightarrow \max_c. \quad (12)$$

Приравняв нулю производную от этого выражения по c , получим уравнение

$$c + \frac{\lambda(c)}{\lambda'(c)} = d \frac{z_{\text{opt}}}{\ln(1+z_{\text{opt}})}. \quad (13)$$

В общем случае трудно решить вопрос о числе корней этого уравнения. Рассмотрим поэтому лишь частный случай, когда

$$\lambda(c) = \frac{\lambda_0}{1 + (\beta c)^\gamma}, \quad (14)$$

с $\gamma > 1$. Тогда легко получить, что

$$\frac{\lambda(c)}{\lambda'(c)} = -\frac{c}{\gamma} - \frac{1}{\beta^\gamma \gamma c^{\gamma-1}},$$

и уравнение (13) приобретает вид

$$c \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{1}{\beta^\gamma \gamma c^{\gamma-1}} = \frac{d \cdot z_{\text{opt}}}{\ln(1+z_{\text{opt}})}. \quad (15)$$

При $\gamma > 1$ левая часть этого выражения для $c \in (0, +\infty)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, и поэтому уравнение (15) имеет единственный корень c_{opt} , причем с ростом z_{opt} розничная цена c_{opt} также возрастает.

Вообще же, надо совместно решать следующую систему уравнений

$$c + \frac{\lambda(c)}{\lambda'(c)} = d \frac{z_{\text{opt}}}{\ln(1+z_{\text{opt}})},$$

$$(1+z_{\text{opt}}) \ln(1+z_{\text{opt}}) = \kappa T_b \left(\frac{c}{d} - 1 \right) + (1 - \kappa T_b) z_{\text{opt}}.$$

В силу сказанного выше, эта система, по-видимому, имеет единственное решение, хотя доказать этот факт не удалось.

УПРАВЛЕНИЕ РОЗНИЧНОЙ ЦЕНОЙ ТОВАРА

Выше рассматривалась ситуация, когда розничная цена продажи товара остается постоянной. Представляет интерес рассмотреть случай, когда розничная цена меняется со временем.

Пусть розничная цена $c(t)$ есть функция времени t . Тогда, в детерминированном приближении, имеем следующее дифференциальное уравнение для количества товара в момент времени t :

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa Q - a_1 \lambda(c(t)), \quad (16)$$

которое надо решить при начальном условии $Q(0) = Q_0$.

Найдем решение этого уравнения, используя преобразование Лапласа. Пусть $\tilde{Q}(p)$ и $\tilde{\lambda}(p)$ есть преобразования Лапласа от функций $Q(t)$ и $\lambda(c(t))$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (16), получим

$$(p + \kappa) \tilde{Q}(p) - Q_0 = a_1 \tilde{\lambda}(p).$$

Отсюда $\tilde{Q}(p) = \frac{Q_0}{p + \kappa} - \frac{a_1 \tilde{\lambda}(p)}{p + \kappa}$ и решение уравнения (33) имеет вид

$$Q(t) = Q_0 e^{-\kappa t} - a_1 \int_0^t \lambda(c(\tau)) e^{-\kappa(t-\tau)} d\tau. \quad (17)$$

Обозначим через T_0 момент окончания продажи партии товара, т.е. в этот момент времени $Q(T_0) = 0$. Тогда имеем

$$Q_0 e^{-\kappa T_0} - a_1 \int_0^{T_0} \lambda(c(\tau)) e^{-\kappa(T_0-\tau)} d\tau = 0,$$

откуда получается связь величин Q_0 и T_0 :

$$Q_0 = a_1 \int_0^{T_0} \lambda(c(\tau)) e^{\kappa \tau} d\tau. \quad (18)$$

Выручка от продажи этой партии товара составит величину $\Pi(T_0) = a_1 \int_0^{T_0} c(\tau) \lambda(c(\tau)) d\tau$, так что средняя прибыль в единицу времени будет равна

$$P = a_1 \frac{\int_0^{T_0} c(\tau) \lambda(c(\tau)) d\tau - d Q_0}{T_0 + T_b}.$$

Учитывая (18), это выражение можно переписать так

$$P = a_1 \frac{\int_0^{T_0} c(\tau) \lambda(c(\tau)) d\tau - d \int_0^{T_0} \lambda(c(\tau)) e^{\kappa \tau} d\tau}{T_0 + T_b}. \quad (19)$$

Так как T_0 и Q_0 связаны однозначно, то можно искать

максимум P не по Q_0 и $c(\tau)$, а по T_0 и $c(\tau)$, т.е. решать задачу $P \Rightarrow \max_{T_0, c(\tau)}$. Это приводит к условиям

$$\frac{\partial P}{\partial T_0} = 0; \quad \frac{\delta P}{\delta c(\tau)} = 0, \quad (20)$$

где символ δ означает вычисление вариации.

Второе условие из (20) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial c(\tau)} [(c(\tau) - de^{\kappa\tau}) \lambda(c(\tau))] = 0,$$

которое в явном виде выглядит так:

$$c(\tau) + \frac{\lambda(c(\tau))}{\lambda'(c(\tau))} = de^{\kappa\tau}. \quad (21)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (13) мы видим, что розничная цена продажи должна возрастать со временем. Объяснить это можно следующим образом. Пусть мы купили партию товара достаточно большого объема Q_0 . Так как товара много, то и количество испортившегося товара в единицу времени велико, и чтобы уменьшить потери от его порчи нам выгодно распродавать его даже по несколько меньшей цене. По мере продажи товара, его количество уменьшается, уменьшаются и потери от его порчи, и выгодно несколько увеличить розничную цену. Именно это и отражает уравнение (21).

Если считать, что зависимость $c(\tau)$ найдена, то первое условие из (20) дает уравнение для определения оптимального значения T_0 :

$$\int_0^{T_0} (c(\tau) - de^{\kappa\tau}) \lambda(c(\tau)) d\tau = \lambda(c(T_0)) (c(T_0) - de^{\kappa T_0}) (T_0 + T_b), \quad (22)$$

откуда, зная T_0 , можно найти и объем партии Q_0 (см. (18)).

ДИФфуЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Вывод уравнения. В предыдущих разделах было рассмотрено детерминированное приближения для процесса продаж. На самом деле, конечно, процесс продаж является случайным процессом, и этот факт требует специального изучения.

Обозначим через $\xi(t)$ общий объем продаж на момент времени t . В этом разделе будет рассмотрено диффузионное приближение для процесса $\xi(t)$. Как и в предыдущей главе рассмотрим следующую аппроксимацию этого процесса

$$d\xi(t) = a_1 \lambda dt + \sqrt{a_2 \lambda} dw(t), \quad (16)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Для краткости, у $\lambda(c)$ в данном разделе не будет выписываться аргумент c .

Пусть $T(Q)$ есть среднее время до окончания продажи партии товара, если в данный момент мы имеем партию объема Q . Тогда, рассматривая малый интервал времени Δt , можно записать соотношение

$$T(Q) = \Delta t + M\{T(Q - \kappa Q \Delta t - \Delta \xi)\}.$$

Считая $T(Q)$ дважды дифференцируемой функцией и разлагая выражение в правой части в ряд Тейлора, получим

$$T(Q) = \Delta t + T(Q) - \frac{dT}{dQ} M\{\kappa Q \Delta t + \Delta \xi\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 T}{dQ^2} M\{(\kappa Q \Delta t + \Delta \xi)^2\} + o(\Delta t).$$

Учитывая, что $M\{\Delta \xi\} = a_1 \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ и $M\{(\Delta \xi)^2\} = a_2 \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, получаем $0 = \Delta t - \frac{dT}{dQ} (\kappa Q \Delta t + a_1 \lambda \Delta t) + \frac{a_2 \lambda \Delta t}{2} \cdot \frac{d^2 T}{dQ^2} + o(\Delta t)$. Деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ получим, что $T(Q)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{a_2 \lambda}{2} \cdot \frac{d^2 T}{dQ^2} - \frac{dT}{dQ} (\kappa Q + a_1 \lambda) = -1, \quad (24)$$

которое надо решать при естественном граничном условии $T(0) = 0$.

Нахождение асимптотики. Покажем, что при больших значениях Q решение этого уравнения имеет вид (3).

Для обоснования этого предположения получим асимптотику для $T(Q)$ непосредственно из уравнения (24).

Возьмем это уравнение и подставим в него решение в виде $T(Q) = A \cdot \ln(1 + \beta Q)$. Тогда имеем

$$-\frac{a_2 \lambda}{2} \cdot \frac{A \beta^2}{(1 + \beta Q)^2} - \frac{A \beta}{1 + \beta Q} (\kappa Q + a_1 \lambda) = -1. \quad (25)$$

Делая в этом выражении предельный переход $Q \rightarrow \infty$, получим, что $A \kappa = 1$, т.е. $A = 1/\kappa$.

Если взять $A = 1/\kappa$, то выражение (23) примет вид

$$\frac{a_2 \lambda}{2 \kappa} \cdot \frac{\beta^2}{(1 + \beta Q)^2} + \frac{a_1 \lambda \beta / \kappa - 1}{1 + \beta Q} = 0.$$

Умножая это выражение на $1 + \beta Q$ и делая предельный переход $Q \rightarrow \infty$ получим, что $a_1 \lambda \beta / \kappa - 1 = 0$, т.е. $\beta = \kappa / a_1 \lambda$, что и подтверждает высказанное выше предположение.

Этим же путем можно получить и последующие члены асимптотики для $T(Q)$. Для этого будем искать $T(Q)$ в виде

$$T(Q) = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \beta Q) + \frac{c_1}{1 + \beta Q} + \frac{c_2}{(1 + \beta Q)^2} + \frac{c_3}{(1 + \beta Q)^3} + \frac{c_4}{(1 + \beta Q)^4} + \dots \quad (26)$$

Запишем уравнение (17) в форме

$$\frac{a_2 \lambda}{2} \cdot \frac{d^2 T}{dQ^2} - a_1 \lambda (1 + \beta Q) \frac{dT}{dQ} = -1,$$

и подставим в него решение в виде (26). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{1}{1 + \beta Q}$, получим, что

$$c_1 = 0; \quad c_2 = \frac{a_2}{4 a_1^2 \lambda}; \quad c_3 = 0; \quad c_4 = \frac{3 a_2^2 \kappa}{16 a_1^4 \lambda^2} \quad (27)$$

и так далее. Таким образом, асимптотика для $T(Q)$ имеет вид

$$T(Q) = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \beta Q) + \frac{c_2}{(1 + \beta Q)^2} + \frac{c_4}{(1 + \beta Q)^4} + \dots \quad (28)$$

с коэффициентами c_n , приведенными выше. Отсюда ясна и область применимости этой асимптотики – она применима в области $\beta Q \gg 1$.

Что касается дальнейшего исследования, то заметим следующее. Главный член асимптотики $T(Q) = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \beta Q)$ совпадает с тем выражением, которое было получено в детерминированном случае. Поэтому все результаты просто повторяются.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим теперь случай, когда величина покупки x есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с плотностью вероятностей $p(x)$ и поток покупок является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ .

Обозначим, как и выше, через $T(Q)$ среднее время до распродажи всего товара, если в начальный момент мы имеем партию товара объема Q . Тогда, рассматривая изменения состояний системы за малый интервал времени Δt , можно записать

$$T(Q) = \Delta t + (1 - \lambda \Delta t)T(Q - \kappa Q \Delta t) + \lambda \Delta t \int_0^Q T(Q - x)p(x)dx + o(\Delta t), \quad (29)$$

откуда имеем

$$T(Q) = \Delta t + (1 - \lambda \Delta t) \left(T(Q) - \frac{dT}{dQ} \kappa Q \Delta t \right) + \lambda \Delta t \int_0^Q T(Q - x)p(x)dx + o(\Delta t).$$

Раскрывая скобки, сокращая $T(Q)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим интегро-дифференциальное уравнение для $T(Q)$:

$$T'(Q)\kappa Q + \lambda T(Q) - \lambda \int_0^Q T(Q - x)p(x)dx = 1. \quad (30)$$

Рассмотрим случай произвольного вида $p(x)$ с единственным ограничением: $\int_0^\infty p(x)dx$ убывает при $Q \rightarrow \infty$ не медленней, чем $\exp(-\alpha Q)$.

Будем снова искать асимптотику решения этого уравнения в виде $T(Q) = A \ln(1 + \beta Q)$. Подставляя ее в наше уравнение, получим

$$\frac{A\kappa\beta Q}{1 + \beta Q} + \lambda A \ln(1 + \beta Q) - \lambda A \int_0^Q \ln(1 + \beta(Q - x))p(x)dx = 1.$$

В силу высказанного выше ограничения при $Q \rightarrow \infty$ это соотношение эквивалентно следующему

$$\frac{A\kappa\beta Q}{1 + \beta Q} + \lambda A \ln(1 + \beta Q) \int_0^Q p(x)dx - \lambda A \int_0^Q \ln(1 + \beta(Q - x))p(x)dx = 1.$$

Записывая его в виде

$$\frac{A\kappa\beta Q}{1 + \beta Q} - \lambda A \int_0^Q \ln\left(\frac{1 + \beta(Q - x)}{1 + \beta Q}\right)p(x)dx = 1$$

и используя верное при $Q \rightarrow \infty$ разложение

$$\ln\left(\frac{1 + \beta(Q - x)}{1 + \beta Q}\right) = \ln\left(1 - \frac{x}{1 + \beta Q}\right) = -\frac{x}{1 + \beta Q} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1 + \beta Q}\right)^2 + \dots$$

получим

$$\frac{A\kappa\beta Q}{1 + \beta Q} + \lambda A \frac{\beta a_1}{1 + \beta Q} - \frac{\lambda A}{2} \frac{\beta^2 a_2}{(1 + \beta Q)^2} + \dots = 1, \quad (31)$$

где $a_k = M\{x^k\}$.

После предельного перехода $Q \rightarrow \infty$ вновь получаем, что $A = 1/\kappa$. При этом значении A выражение (31) можно привести к виду

$$-\frac{1}{1 + \beta Q} + \frac{\lambda \beta a_1}{\kappa(1 + \beta Q)} + o\left(\frac{1}{1 + \beta Q}\right) = 0.$$

Умножая это выражение на $1 + \beta Q$ и снова делая предельный переход $Q \rightarrow \infty$ получим, что $\beta = \kappa/a_1\lambda$, т.е. и в этом самом общем случае имеет место та же самая асимптотика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПАРТИИ ТОВАРА С УЧЕТОМ НАКЛАДНЫХ РАСХОДОВ

Выше была рассмотрена задача определения оптимального объема партии товара, когда на закупку новой партии требуется некоторое время. Ниже будет рассмотрена ситуация, когда закупка партии товара требует некоторых накладных расходов, связанных, например, с транспортными расходами и т.д. В дальнейшем будем считать, что покупка партии товара объема Q стоит нам $d \cdot Q + G$ денег, где d – оптовая цена товара, и G – накладные расходы.

Пусть мы купили партию товара объема Q . Тогда она будет продана в течение времени $T(Q) = \frac{1}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1\lambda}\right)$ по розничной цене c , и мы выручим от

ее продажи $T(Q) = \frac{a_1 c \lambda(c)}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1\lambda}\right)$ денег. В дальнейшем, где это не будет необходимо, аргумент c у $\lambda(c)$ мы будем опускать. Тогда средний доход в единицу времени будет равен

$$P = \frac{\frac{a_1 c \lambda(c)}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1\lambda}\right) - dQ - G}{\frac{1}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1\lambda}\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1\lambda}\right) - \frac{d}{c} \cdot \frac{\kappa Q}{a_1\lambda} - \frac{\kappa G}{a_1 c \lambda}}{\ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1\lambda}\right)}. \quad (33)$$

Обозначим для краткости $z = \frac{\kappa Q}{a_1 \lambda}$, $\gamma = \frac{d}{c}$,

$g = \frac{\kappa G}{a_1 c \lambda}$. Тогда выражение для P примет вид

$$P = a_1 c \lambda(c) \frac{\ln(1+z) - \gamma z - g}{\ln(1+z)}, \quad (34)$$

и, при фиксированной розничной цене c задача определения оптимального объема закупаемой партии примет вид

$$P = a_1 c \lambda(c) \frac{\ln(1+z) - \gamma z - g}{\ln(1+z)} \Rightarrow \max_z. \quad (35)$$

Прежде всего выясним, когда вообще имеет смысл покупать товар для продажи. Для этого заметим, что, в силу неравенства $\ln(1+z) \leq z$ при $\gamma > 1$ числитель у P всегда отрицательный. Поэтому первое условие разрешимости задачи имеет вид $\gamma < 1$, т.е. $d < c$, что, конечно, совершенно естественно.

Для получения второго условия нарисуем на одном графике кривую $y = \ln(1+z)$ при $z \geq 0$ и прямую $y = \gamma z + g$ при $\gamma < 1$. Наиболее интересна ситуация, изображенная на рис. 1, так как в этом случае существует область значений z , а, следовательно, и Q , при которых $P > 0$.

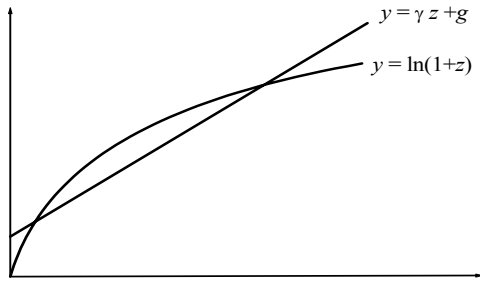


Рис. 1

Для существования области значений z , для которых $P > 0$, необходимо, чтобы выполнялось условие $\max_z [\ln(1+z) - \gamma z - g] > 0$. Точка максимума этой разности

находится из условия $[\ln(1+z) - \gamma z - g]' = \frac{1}{1+z} - \gamma = 0$, откуда следует, что максимум достигается в точке $z = (1-\gamma)/\gamma$ и этот максимум равен $\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) - (1-\gamma) - g$.

Требование неотрицательности этого максимума приводит к условию $g < \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) - (1-\gamma)$, или, в явном виде,

$$G < \frac{a_1 c \lambda(c)}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{c}{d}\right) - 1 + \frac{d}{c} \right], \quad (36)$$

что и дает ограничение на величину накладных расходов.

Найдем теперь оптимальное значение z . Записывая P в виде $P = a_1 c \lambda(c) \left[1 - \frac{\gamma z + g}{\ln(1+z)} \right]$, мы видим, что задача

максимизации P сводится к задаче $\frac{\gamma z + g}{\ln(1+z)} \Rightarrow \min_z$.

Приравняв нулю производную от этого выражения по z , после некоторых преобразований мы придем к уравнению

$$(1+z) \ln(1+z) - z = g/\gamma. \quad (37)$$

Покажем, что это уравнение имеет единственный корень, который в дальнейшем будем обозначать z_{opt} . Для этого рассмотрим функцию $f(z) = (1+z) \ln(1+z) - z$. Очевидно, что $f(0) = 0$. Далее, $f'(z) = \ln(1+z) \geq 0$, откуда следует, что $f(z)$ монотонно возрастает. Далее очевидно, что $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = +\infty$, откуда и следует, что уравнение (37) при любых положительных значениях g/γ имеет единственный положительный корень z_{opt} . Заметим еще, что, так как $f''(z) = 1/(1+z) > 0$, то $f(z)$ выпукла вниз. Зная z_{opt} , можно найти и оптимальный объем закупаемой партии товара

$$Q_0 = a_1 \lambda(c) z_{opt} / \kappa. \quad (38)$$

Рассмотрим теперь более общую схему покупок, которая выглядит следующим образом: покупка совершается в тот момент, когда запас нашего товара станет равным Q_1 и объем закупаемой партии равен Q_0 , так что сразу после покупки у нас будет партия товара объемом $Q_0 + Q_1$. Процесс покупок изображен на рис. 2.

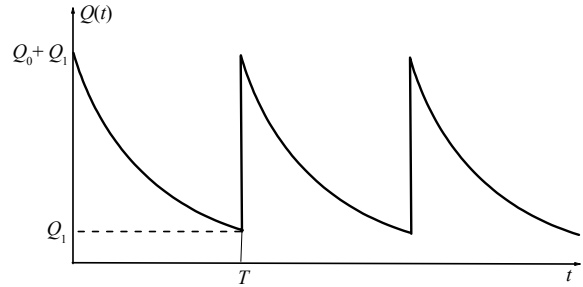


Рис. 2

В этом случае уравнение для $Q(t)$ $\frac{dQ}{dt} + \kappa Q = -a_1 \lambda$ надо решить в форме двухточечной задачи при условиях $Q(0) = Q_1 + Q_0$, $Q(T) = Q_1$. Решение имеет вид $Q(t) = (Q_1 + Q_0)e^{-\kappa t} - \frac{a_1 \lambda}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t})$, и второе условие принимает вид $Q(T) = (Q_1 + Q_0)e^{-\kappa T} - \frac{a_1 \lambda}{\kappa} (1 - e^{-\kappa T}) = Q_1$. Отсюда находится промежуток времени между покупками

$$T = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa Q_0}{\kappa Q_1 + a_1 \lambda} \right). \quad (39)$$

Средняя прибыль в единицу времени равна

$$P = \frac{a_1 c \lambda(c) \cdot \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa Q_0}{\kappa Q_1 + a_1 \lambda} \right) - d \cdot Q_0 - G}{\frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa Q_0}{\kappa Q_1 + a_1 \lambda} \right)}.$$

Вводя обозначения $z_0 = \kappa Q_0 / a_1 \lambda$, $z_1 = \kappa Q_1 / a_1 \lambda$, $\gamma = d/c$, $g = \kappa G / a_1 c \lambda(c)$, приведем эту формулу к виду

$$P = a_1 c \lambda(c) \frac{\ln \left(1 + \frac{z_0}{1 + z_1} \right) - \gamma z_0 - g}{\ln \left(1 + \frac{z_0}{1 + z_1} \right)} =$$

$$= a_1 c \lambda(c) \cdot \left[1 - \frac{\gamma z_0 + g}{\ln\left(1 + \frac{z_0}{1 + z_1}\right)} \right]. \quad (40)$$

Но теперь заметим, что при возрастании z_1 величина $\frac{z_0}{1 + z_1}$ монотонно убывает, величина $\ln\left(1 + \frac{z_0}{1 + z_1}\right)$ также монотонно убывает, величина $(\gamma z_0 + g) / \ln\left(1 + \frac{z_0}{1 + z_1}\right)$ монотонно возрастает и поэтому величина P монотонно убывает. Поэтому максимум P достигается при $z_1 = 0$, то есть при $Q_1 = 0$ и мы приходим к рассмотренному выше случаю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ РОЗНИЧНОЙ ЦЕНЫ

Пусть мы покупаем партию товара объема Q . Тогда, доход в единицу времени составит (33)

$$P = a_1 c \lambda(c) - \frac{d \kappa Q + \kappa G}{\ln\left(1 + \frac{\kappa Q}{a_1 \lambda(c)}\right)}. \quad (41)$$

Обозначим $z = \kappa Q / a_1 \lambda(c)$, так что $\kappa Q = z a_1 \lambda(c)$. Тогда выражение для P принимает вид

$$P = a_1 c \lambda(c) - \frac{d \cdot a_1 \lambda(c) z + \kappa G}{\ln(1 + z)}. \quad (42)$$

Для нахождения оптимальной розничной цены c и оптимальной партии товара надо решить систему уравнений $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial c} = 0$, которая, после некоторых упрощений, приобретает вид

$$\begin{cases} d \cdot a_1 \lambda(c) \ln(1 + z) = \frac{d \cdot a_1 \lambda(c) z + \kappa G}{1 + z}, \\ c + \frac{\lambda(c)}{\lambda'(c)} = \frac{d \cdot z}{\ln(1 + z)}. \end{cases} \quad (43)$$

К сожалению, вопрос о числе корней этой системы остается открытым, хотя, по-видимому, она имеет единственное решение.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим в заключение общий случай, когда учитываются и накладные расходы, и временные потери. В этом случае средняя прибыль в единицу времени имеет вид

$$P = \frac{a_1 c \lambda(c) \ln\left(1 + \frac{Q \kappa}{a_1 \lambda(c)}\right) - d \cdot \kappa Q - \kappa G}{\ln\left(1 + \frac{Q \kappa}{a_1 \lambda(c)}\right) + \kappa T_b}. \quad (44)$$

Вводя величины $z = \frac{Q \kappa}{a_1 \lambda(c)}$, $\gamma = \frac{d}{c}$, $g = \frac{\kappa G}{a_1 c \lambda(c)}$, приведем это выражение к виду

$$P = a_1 c \lambda(c) \cdot \frac{\ln(1 + z) - \gamma z - g}{\ln(1 + z) + \kappa T_b}. \quad (45)$$

Приравняв нулю производную от P по z , получим уравнение, определяющее оптимальное значение z , а, следовательно, и оптимальный объем покупаемой партии товара Q :

$$(1 + z) \ln(1 + z) = (\gamma - \kappa T_b) + \kappa T_b \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) + g. \quad (46)$$

Так как $\gamma < 1$, то $\kappa T_b \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) + g > 0$ и поэтому уравнение (46) имеет единственный корень независимо от знака $\gamma - \kappa T_b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. O'Hara M. Market microstructure theory. Blackwell Publisher Inc., 1997.
2. Китаева А.В., Новицкая Е.В., Терпугов А.Ф. Оптимизация продажи скоропортящейся продукции // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 95–105.
3. Змеев О.А., Новицкая Е.В. Вероятностные характеристики длительности торговой сессии и оценка ее параметров // Обработка данных и управление в сложных системах. Вып. 6. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 66–75.

Статья представлена кафедрой теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 30 апреля 2004 г.