УДК 681.142.2

А.Ф. Терпугов, Н.П. Щирова

ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ КАПИТАЛА ПРИ ВЛОЖЕНИИ СРЕДСТВ В РЕКЛАМУ

Рассматривается модель деятельности компании, где особое внимание уделено управлению расходами на рекламную деятельность. Устанавливается правило управления расходами на рекламу. Рассматривается величина максимального значения капитала в среднем. Исследуются значения оптимальных моментов времени использования рекламы в деятельности компании и соответственно «отключение» рекламы.

Реклама нас окружает повсюду. Нам никуда не скрыться от нее. Телевидение, радио, интернет, газеты, журналы – любая сфера массовой информации заполнена рекламой. Организации используют ее как способ привлечения покупателей. И какой еще найти способ, чтобы повлиять на потребительский спрос. Рекламная деятельность направлена как на потребителей, так и на товаропроизводителей, стремящихся к массовой реализации своего товара.

Рассмотрим модель компании, которая в своей деятельности предусматривает выделять некоторую часть капитала $Q(t)$ на использование рекламы. Через $S(t)$ обозначим количество капитала, которым обладает компания в момент времени t. Причем состояние капитала зависит от того, сколько фирме удается продать количество товара, а последнее напрямую зависит от покупательского спроса. Итак, обозначим, $R(t)$ – величина, отражающая эффективность рекламы, т.е. функция последействия. Опишем ее законом $\frac{dR(t)}{dt} = -\omega R(t) + \beta Q(t)$, где коэффициент ω определяет скорость забывания рекламы $R(t)$, а β – степень влияния денег $Q(t)$, вкладываемых в рекламу. Влияние $R(t)$ проявляется в следующем: будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1(R(t))$, где коэффициент λ_1 описывает влияние рекламы на поток покупателей. Величина λ_0 определяет интенсивность потока покупателей без всякой рекламы. Величина покупки ξ – случайная величина со средним значением $a = M\{\xi\}$.

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ КАПИТАЛА ПРИ УПРАВЛЕНИИ РАСХОДАМИ НА РЕКЛАМУ

Изменение капитала будет за период времени Δt следующим: $\Delta S(t) = \begin{cases} \xi - c_0\Delta t, (\lambda_0 + \lambda_1(R(t)))\Delta t, \\ -c_0\Delta t, 1 - (\lambda_0 + \lambda_1(R(t)))\Delta t, \end{cases}$ где c_0 – постоянные расходы компании, на которые не влияет состояние капитала в тот или иной момент времени (налоги, аренда помещения, заработная плата сотрудникам). Так как значение капитала определяет величина ξ, являющаяся случайной величиной, то и $S(t)$ тоже является случайной величиной. Обозначим среднее значение капитала $S_1 = M\{S(t)\}$. После усреднения величины $\Delta S(t)$ получим систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{dt} = a\lambda_1(R(t)) + (a\lambda_0 - c_0) - Q(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = -\omega R(t) + \beta Q(t). \end{cases} \tag{1}$$

Из второго уравнения системы (1) выразим $Q(t)$:

$$Q(t) = \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(t)}{dt} + \omega R(t)\right], \tag{2}$$

последнее выражение подставим в дифференциальное уравнение для $S_1(t)$ из дифференциальной системы (1):

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = a\lambda_1(R(t)) + (a\lambda_0 - c_0) - \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(t)}{dt} + \omega R(t)\right]. \tag{3}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$S_1(t) = A + (a\lambda_0 - c_0)t + \int_0^t \left(a\lambda_1(R(\tau)) - \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(\tau)}{d\tau} + \omega R(\tau)\right]\right)d\tau, \tag{4}$$

где A – константа. Значение функции капитала в конечный момент времени T будет таким:

$$S_1(t) = A + (a\lambda_0 - c_0)T + \int_0^T \left(a\lambda_1(R(\tau)) - \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(\tau)}{d\tau} + \omega R(\tau)\right]\right)d\tau.$$

Введем новую функцию $F(t)$:

$$F(t) = \left(a\lambda_1(R(t)) - \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(t)}{dt} + \omega R(t)\right]\right).$$

Так как для компании важно получение максимального значения функции капитала в конечный момент времени, то для решения построим функцию Эйлера $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$. В нашем случае y соответствует $R(t)$, x соответствует t. Получим, что

$$F_y = \left(a\lambda_1'(R) - \frac{\omega}{\beta}\right),\ F_{y'} = -\frac{1}{\beta},\ \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

$$a\lambda_1'(R_0) - \frac{\omega}{\beta} = 0,\ \lambda_1'(R_0) = \frac{\omega}{a\beta}. \tag{5}$$

Обозначим как R_0 корень последнего уравнения, причем $R_0 = \text{const}$.

Компания планирует свои расходы, чтобы достичь максимального дохода в определенный момент времени. Поэтому в ходе деятельности она пытается предвидеть и контролировать события, т.е. предсказать получение будущего дохода, изменять или влиять на текущие события, связанные с деятельностью компании, и, в конечном итоге, уменьшить неопределенность риска относительно неполучение прибыли.

Итак, управляя расходами, пусть функция расходов имеет вид $Q(t) = \begin{cases} Q_{\max}, 0 \le t \le T_1, \\ Q_0, T_1 \le t \le T_2, \\ 0, T_2 \le t \le T. \end{cases}$

Разобьем временную ось на следующие промежутки: $0 \le T_1 \le T_2 \le T$.

Рассмотрим первый период: $0 \le t \le T_1$. Пусть на данном этапе сумма расходов максимальна, т.е. $Q(t) = Q_{\max}$. Используем выражение (2), показывающее зависимость между расходами на рекламу и функцией последействия:

$$Q(t) = \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(t)}{dt} + \omega R(t)\right];\ \text{так как}\ Q(t) = Q_{\max},\ \text{то}$$

$$Q_{\max} = \frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(t)}{dt} + \omega R(t)\right] \frac{dR(t)}{dt} + \omega R(t) = \beta Q_{\max}.$$

Решая неоднородное дифференциальное уравнение, получим вид функции последействия на этом временном отрезке $R(t)=B_1e^{-\omega t}+\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega t}\right]$, где B_1 – константа.

Зададим начальное условие $R(0) = 0$, тогда $B_1= 0$. Функция последействия при максимальных расходах и начальном условии $R(0) = 0$ имеет вид

$$R(t)=\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega t}\right]. \quad (6)$$

Выражение (6) подставим в дифференциальное уравнение для $S_1(t)$ из системы дифференциальных уравнений (1). Получим, что

$$\frac{dS_1(t)}{dt}=a\lambda_1\left[\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left(1-e^{-\omega t}\right)\right]+\left(a\lambda_0-c_0\right)-Q_{\max}. \quad (7)$$

Решение неоднородного уравнения (7) имеет вид

$$S_1(t)=B_1+\left[\left(a\lambda_0-c_0\right)-Q_{\max}\right]t+$$
$$+a\int_0^t\lambda_1\left[\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left(1-e^{-\omega t}\right)\right]d\tau,$$

где B_1 – константа.

При начальном условии $S_1(0) = S_1$

$$S_1(t)=S_1+\left[\left(a\lambda_0-c_0\right)-Q_{\max}\right]t+$$
$$+a\int_0^t\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau.$$

Полученную функцию обозначим как $S_1^{(1)}(t)$.

Итак, функция капитала на первом этапе при максимальных расходах $Q(t) = Q_{\max}$, начальном значении капитала $S_1(0) = S_1$ и при условии существования функции последействия $R(t)$ имеет вид

$$S_1^{(1)}(t)=S_1+\left[\left(a\lambda_0-c_0\right)-Q_{\max}\right]t+$$
$$+a\int_0^t\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau. \quad (8)$$

Перейдем к периоду $T_1 \le t \le T_2$. Пусть на этом временном отрезке расходы на рекламу имеют фиксированное значение $Q(t) = Q_0$, $T_1 \le t \le T_2$, и функция последействия имеет значение $R(t) = R_0$.

Из уравнения Эйлера установлена следующая зависимость (5): $\lambda_1'(R_0)=\omega/a\beta$. При заданных нами условиях получим $\lambda_1(R_0)=\frac{\omega}{a\beta}R_0$. Учитывая зависимость функции расходов $Q(t)$ от функции последействия $R(t)$ (2), определим вид значения расходов Q_0:

$$Q_0=\frac{\omega}{\beta}R_0. \quad (9)$$

Используем последнее выражение (9) для подстановки в дифференциальное уравнение (3) для $S_1(t)$:

$$\frac{dS_1(t)}{dt}=\frac{\omega}{a\beta}R_0+\left(a\lambda_0-c_0\right)-\frac{\omega}{\beta}R_0. \quad (10)$$

Вид решения уравнения (10) позволяет определить вид функции капитала на втором временном отрезке, где $T_1 \le t \le T_2$: $S_1(t)=B_2+\left[\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)+\left(a\lambda_0-c_0\right)\right]t.$

Здесь B_2 – константа. Полученную функцию обозначим как $S_0^{(2)}(t)$.

Итак, функция капитала на втором этапе при фиксированных расходах $Q(t) = Q_0$ и значении функции последействия $R(t) = R_0$ имеет вид

$S_0^{(2)}(t)=B_2+\left[\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)+\left(a\lambda_0-c_0\right)\right]t.$ Тогда B_2 – константа.

Перейдемход к единому времени. Тогда функция капитала примет вид

$$S_0^{(2)}(t)=B_2+\left[\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)+\left(a\lambda_0-c_0\right)\right]\left(t-T_1\right). \quad (11)$$

Условие сшивания функций капитала первого и второго периодов будет таким $S_1^{(1)}(T_1)=S_0^{(2)}(T_1)$, что позволит найти вид константы B_2 и, таким образом, получить явный вид функции капитала на втором временном отрезке

$$B_2=S_1+\left[\left(a\lambda_0-c_0\right)-Q_{\max}\right]T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau.$$

Подставляем полученный вид константы в выражение (11) для $S_0^{(2)}(t)$:

$$S_0^{(2)}(t)=S_1-Q_{\max}\cdot T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau+$$
$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(t-T_1\right)+\left(a\lambda_0-c_0\right)t. \quad (12)$$

А значение функции капитала в момент T_2

$$S_0^{(2)}(T_2)=S_1-Q_{\max}T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau+$$
$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(T_2-T_1\right)+\left(a\lambda_0-c_0\right)T_2. \quad (13)$$

Перейдем к периоду $T_2 \le t \le T$. Пусть на этом временном отрезке компания отказывается от расходов на рекламу, поэтому $Q(t) = 0$, и на этом временном отрезке проявляется действие функции последействия $R(t)$. Помним, что зависимость функции расходов $Q(t)$ от функции последействия $R(t)$ представлена уравнением (2). При условиях для данного периода получим $\frac{1}{\beta}\left[\frac{dR(t)}{dt}+\omega R(t)\right]=0$. Решаем последнее дифференциальное уравнение $R(t) = B_3e^{-\omega t}$. Согласно начальным условиям, $B_3 = R_0$, а значит, $R(t) = R_0e^{-\omega t}$. Полученное выражение подставляем в дифференциальное уравнение (4) для $S_1(t)$. Для этого этапа уравнение примет вид $\frac{dS_1(t)}{dt}=a\lambda_1\left(R_0e^{-\omega t}\right)+\left(a\lambda_0-c_0\right)$. Тогда $S_1(t)$ будет таким:

$$S_1(t)=B_3+\left(a\lambda_0-c_0\right)t+a\int_0^t\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau,\ T_2 \le t \le T.$$

Обозначим функцию капитала на этом участке как $S_2^3(t)$: $S_2^3(t)=B_3+\left(a\lambda_0-c_0\right)t+a\int_0^t\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau$. После перехода к единому времени функция капитала такова:

$$S_2^3(t)=B_3+\left(a\lambda_0-c_0\right)\left(t-T_2\right)+a\int_0^{(t-T_2)}\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau. \quad (14)$$

Условие сшивания для функций капитала, полученных на втором и третьем периодах, будет $S_0^{(2)}(T_2)=S_2^{(3)}(T_2)$.

Выражения (13) и (14) определяют вид константы B_3:

$$B_3=S_1-Q_{\max}\cdot T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau+$$

$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)\cdot(T_2-T_1)+(a\lambda_0-c_0)T_2.$$

Вид функции капитала

$$S_2^{(3)}(t)=S_1-Q_{\max}T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau+$$
$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)(T_2-T_1)+$$
$$+(a\lambda_0-c_0)t+a\int_0^{(t-T_2)}\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau.$$

Полученную функцию обозначим как $\bar{S}(t)$:

$$\bar{S}(t)=S_1-Q_{\max}\cdot T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau+$$
$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)(T_2-T_1)+$$
$$+(a\lambda_0-c_0)t+a\int_0^{(t-T_2)}\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau. \quad (15)$$

Среднее значение функции капитала (15) в момент времени T при управлении расходами $Q(t)$ в течение периода $0\le t\le T$ и влиянии функции последействия на потребительский спрос имеет значение

$$\bar{S}(T)=S_1-Q_{\max}T_1+a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau+$$
$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)(T_2-T_1)+$$
$$+(a\lambda_0-c_0)T+a\int_0^{(T-T_2)}\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau. \quad (16)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ T_1, T_2 ДЛЯ ФУНКЦИИ КАПИТАЛА

Главной задачей компании является получение наибольшей прибыли в конечный момент времени T. Поэтому $\bar{S}(T)\Rightarrow\max\limits_{T_1,T_2}$. Момент времени T_1 определяется с помощью выражения (6) для функции последействия при условии, что если $R(T_1)=R_0$, то $\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega T_1}\right]=R_0$, из которого следует, что $e^{-\omega T_1}=1-\frac{\omega R_0}{\beta Q_{\max}}$. Прологарифмируем последнее выражение и получим выражение для момента T_1: $T_1=-\frac{1}{\omega}\ln\left[1-\frac{\omega R_0}{\beta Q_{\max}}\right]$. Из последнего выражения мы можем утверждать, что $0<1-\frac{\omega R_0}{\beta Q_{\max}}<1$ и $\ln\left[1-\frac{\omega R_0}{\beta Q_{\max}}\right]<0$. А это означает, что

$$-\frac{1}{\omega}\ln\left[1-\frac{\omega R_0}{\beta Q_{\max}}\right]>0.$$

Следовательно, момент времени T_1 существует. Поэтому задача максимизации прибыли в конечный момент времени T примет вид $\bar{S}(T)\Rightarrow\max\limits_{T_2}$.

Параметр, которым компания может управлять, – это момент времени, когда нужно отказаться от расходов на рекламу. Для решения задачи продифференцируем (16) по T_2:

$$\frac{\partial\bar{S}(T)}{\partial T_2}=\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)-a\lambda_1\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}\right),\quad \frac{\partial\bar{S}(T)}{\partial T_2}=0$$

и получим уравнение, решив которое, можем найти момент времени T_2, после которого затраты на рекламы нецелесообразны:

$$a\lambda_1\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}\right)=\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right). \quad (17)$$

Рассмотрим частный случай, где интенсивность потока покупателей определена видом функции $\lambda(R(t))$:

$$\lambda(R(t))=\lambda_0+(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-e^{-\gamma R(t)}\right). \quad (18)$$

Напомним, что λ_0 представляет собой интенсивность потока покупателей без рекламы. А поток клиентов, образуемый под влиянием рекламы, в нашем случае

$$\lambda_1=\lambda_1(R(t))=(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-e^{-\gamma R(t)}\right), \quad (19)$$

где γ – некоторый параметр.

Вернемся к выражению (17), определяющему наступление момента T_2: $a\lambda_1\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}\right)=\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)$. Учитывая, что R_0 – корень уравнения (5), $\lambda_1'(R_0)=\frac{\omega}{a\beta}$, и используя выражение (19), описывающее вид интенсивности потока для этого частного случая,

$$\lambda_1(R(t))=(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-e^{-\gamma R(t)}\right).$$

Получим, что $\lambda_1'(R(t))=\gamma(\lambda_m-\lambda_0)e^{-\gamma R(t)}$. Это выражение подставим в уравнение (5):

$$\gamma(\lambda_m-\lambda_0)e^{-\gamma R_0}=\frac{\omega}{a\beta}\,e^{-\gamma R_0}=\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}.$$

Прологарифмируем последнее выражение:

$$-\gamma R_0=\ln\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)};\ R_0=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}{\omega},$$
$$R_0=\text{const},\ R_0>0.$$

Теперь попытаемся определить момент наступления T_2, поэтому напишем вид обеих сторон выражения (17): $a\lambda_1\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}\right)=\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)$. Левая часть последнего выражения будет следующей:

$$\lambda_1\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}\right)=(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-e^{-\gamma R_0e^{-\omega(T-T_2)}}\right).$$

Поэтому выражение (17) принимает вид

$$a(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-e^{-\gamma R_0e^{-\omega(T-T_2)}}\right)=\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right).$$

Из этого выражения следует, что

$$e^{-\gamma R_0e^{-\omega(T-T_2)}}=1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0.$$

Логарифмируем последнее выражение

$$-\gamma R_0e^{-\omega(T-T_2)}=\ln\left(1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0\right),$$

$$e^{-\omega(T-T_2)}=-\frac{\ln\left(1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0\right)}{\gamma R_0}.$$

Еще раз логарифмируем последнее выражение, из которого можно найти вид для момента T_2:

$$T_2 = T + \frac{1}{\omega}\ln\left[-\frac{\ln\left(1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0\right)}{\gamma R_0}\right]. \qquad (20)$$

Докажем, что $T > T_2$. Так как значение функции последействия $R_0 = \text{const}$, $R_0 > 0$, то и выражение ниже тоже имеет положительное значение

$$\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0 > 0.$$

Причем $0 < 1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0 < 1$, так как последнее выражение находится под знаком функции логарифма, поэтому $\ln\left(1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0\right) < 0.$

Следующее неравенство тоже верно:

$$0 < -\frac{\ln\left(1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0\right)}{\gamma R_0} < 1.$$

Получаем, что

$$\ln\left[-\frac{\ln\left(1-\frac{\omega}{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)}\left(\frac{1-a}{a}\right)R_0\right)}{\gamma R_0}\right] < 0.$$

Это означает, что $T_2 < T$.

Далее рассмотрим случай, когда

$$\lambda(R(t)) = \lambda_0 + (\lambda_m-\lambda_0)\left(1-\frac{R_*^\gamma}{(R+R_*)^\gamma}\right), \qquad (21)$$

где R_*, γ – некоторые параметры.

Повторяем произведенный выше ход:

$$\lambda_1(R(t)) = \lambda_0 + (\lambda_m-\lambda_0)\left(1-\frac{R_*^\gamma}{(R+R_*)^\gamma}\right),$$

$$\lambda_1'(R(t)) = \gamma(\lambda_m-\lambda_0)\frac{R_*^\gamma}{(R+R_*)^{\gamma+1}},$$

$$\gamma(\lambda_m-\lambda_0)\frac{R_*^\gamma}{(R_0+R_*)^{\gamma+1}} = \frac{\omega}{a\beta},$$

$$R_0 = \sqrt[\gamma+1]{\frac{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)R_*^\gamma}{\omega}} - R_*, \qquad (22)$$

$R_0 = \text{const}$, $R_0 > 0$.

Тогда из (22) следует, что $\sqrt[\gamma+1]{\frac{a\beta\gamma(\lambda_m-\lambda_0)R_*^\gamma}{\omega}} > R_*$.

Возвращаемся к выражению (17), из которого можно определить выражение для момента времени T_2:

$$\lambda_1\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}\right) = (\lambda_m-\lambda_0)\left(1-\frac{R_*^\gamma}{\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}+R_*\right)^\gamma}\right).$$

Выражение (17) принимает вид

$$a(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-\frac{R_*^\gamma}{\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}+R_*\right)^\gamma}\right) = \frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right).$$

Из последнего получаем

$$\frac{R_*^\gamma}{\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}+R_*\right)^\gamma} = 1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right). \qquad (23)$$

Все величины в выражении (24) положительны:

$$\frac{R_*^\gamma}{\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}+R_*\right)^\gamma}. \qquad (24)$$

Значит, все выражение (24) положительно, но если верно $\frac{R_*^\gamma}{\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}+R_*\right)^\gamma} > 0$, то должно быть верно

$$0 < 1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right) < 1. \qquad (25)$$

Возвращаемся к (23), из которого получим

$$\left(R_0e^{-\omega(T-T_2)}+R_*\right)^\gamma = \frac{R_*^\gamma}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)},$$

$$e^{-\omega(T-T_2)} = \frac{\sqrt[\gamma]{\frac{R_*^\gamma}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)}} - R_*}{R_0}.$$

Прологарифмируем последнее выражение и получим

$$-\omega(T-T_2) = \ln\frac{\sqrt[\gamma]{\frac{R_*^\gamma}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)}} - R_*}{R_0}.$$

Определим вид наступления момента времени T_2:

$$T_2 = T + \frac{1}{\omega}\ln\frac{\sqrt[\gamma]{\frac{R_*^\gamma}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)}} - R_*}{R_0}.$$

С помощью неравенства (25) покажем, что $T_2 < T$. Так как нами установлена справедливость (25), то

$$\sqrt[\gamma]{\frac{R_*^\gamma}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)}} - R_* =$$

$$= R_*\left[\sqrt[\gamma]{\frac{1}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)}} - 1\right] < R_*.$$

Тогда $0 < \frac{\sqrt[\gamma]{\frac{R_*^\gamma}{1-\frac{\omega}{a\beta(\lambda_m-\lambda_0)}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)}} - R_*}{R_0} < 1$

будет верно при условии $R_* < R_0$, т.е. $T_2 < T$.

Итак, нами получен вид функции капитала в момент времени T: $\bar{S}(T) = S_1 - Q_{\max}T_1 + a\int_0^{T_1}\lambda_1\left(\frac{\beta Q_{\max}}{\omega}\left[1-e^{-\omega\tau}\right]\right)d\tau +$

$$+\frac{\omega}{\beta}R_0\left(\frac{1-a}{a}\right)\cdot(T_2-T_1) + (a\lambda_0-c_0)T + a\int_0^{(T-T_2)}\lambda_1\left(R_0e^{-\omega\tau}\right)d\tau$$

при управлении расходами $Q(t)=\begin{cases}Q_{\max}, 0\le t\le T_1,\\ Q_0, T_1\le t\le T_2,\\ 0, T_2\le t\le T.\end{cases}$

Исследованы моменты времени «отключения» рекламы, т.е. моменты, после которых использование рекламы не ведет к увеличению капитала. Рассмотрены два частных случая, когда интенсивность потока покупателей меняется: $\lambda(R(t))=\lambda_0+(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-e^{-\gamma R(t)}\right)$ и $\lambda(R(t))=\lambda_0+(\lambda_m-\lambda_0)\left(1-\frac{R_*^{\gamma}}{(R+R_*)^{\gamma}}\right)$, где γ, R_*, – некоторые параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 615 с.
2. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск.: Изд-во Том. ун-та, 1988.174 с.
3. *Терпугов А.Ф., Щирова Н.П.* //Статистическая обработка данных и управление в сложных системах. Томск.: Изд-во Том. ун-та, 2001.164 с.

Статья представлена кафедрой теоретических основ информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Информатика» 25 октября 2004 г.