УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.25

М.Е. Шайкин

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ H_2/H_∞-УПРАВЛЕНИЯ[1]

Получено решение задачи стохастического робастного H_2/H_∞-управления динамической системой с внутренними шумами, мультипликативными по состоянию и управлению, на конечном интервале времени. Задача сводится к нахождению решения системы двух связанных матричных дифференциальных Риккати-подобных уравнений относительно матричных переменных $P_1(t) \le 0,\ P_2(t) \ge 0$.

Ключевые слова: *шум, зависящий от состояния и управления, подавление возмущений, робастное управление, матричное Риккати-подобное уравнение.*

Рассмотрим многомерную стохастическую систему

$$dx_t = (A(t)x_t + B_1(t)v_t + B_2(t)u_t)dt + (A_0(t)x_t + B_{10}(t)v_t + B_{20}(t)u_t)dw_t,$$
$$z_t = C(t)x_t + D(t)u_t,\ x_0 = a,\ t \in [0,T],\ T < \infty, \qquad (1)$$

где x_t – вектор состояния, v_t – внешнее возмущение, u_t – управляющий сигнал, z_t – управляемый выход. Винеровский случайный процесс (w_t), не теряя в общности, считаем скалярным. Вектор x_0 не случайный. Процесс $v = (\ v_t\ )$, детерминированный или случайный неупреждающий, предполагается имеющим конечную энергию $E\ \int_0^T |\,v_t\,|^2 dt < \infty.$ Говоря формально, v есть элемент гильбертова пространства $L_F^2([0,T],\ L^2(\Omega, R^l))$, где Ω – пространство элементарных событий, F – поток σ-алгебр F_t. Норму процесса v определяем как $\|\,v\,\| = (E\int_0^T |\,v_t\,|^2\ dt)^{1/2}$. Энергия $\|\,u\,\|^2$ процесса $u = (u_t)$ также предполагается конечной, тогда существует единственное решение $x_t = x(t,u,v,x_0)$ уравнения (1) с конечной энергией [1] . Ясно, что в этом случае энергия процесса z тоже конечна. Считаем также выполненными условия $D'C = 0, D'D = I$, названные в [2] условиями регулярности, они не слишком ограничительны. Заметим, что в ряде работ управляемый выход определяется как сумма z=$C\,x$+$D\,u$, тогда

$$z'z = x\,'C\,'C\,x + u'\,D'\,D\,u + x'\,C'\,D\,u + u'\,D'\,C\,x\ .$$

В других работах полагают $z = \binom{Cx}{Du}$, и тогда

$$z'\,z = x'\,C'\,C\,x + u'\,D'\,D\,u.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-08-00744).

Условие $C'D = 0$ снимает различие этих двух определений. Условие же $D'D = I$ вообще ограничением не является, если D – неособенная матрица.

Пусть $L: v \to z$ – оператор передачи внешнего возмущения на управляемый выход. Предположим, что существует число $\gamma > 0$, такое, что $\|z\| < \gamma \|v\|$. Нормы $\|v\|$, $\|z\|$ индуцируют норму $\|L\|$ оператора L по формуле $\|L\| = \sup_{v \neq 0, x_0 = 0} (\| z \| / \| v \|)$.

Норма $\|L\| < \gamma$ является мерой максимально негативного (наименее благоприятного) влияния, которое при заданном γ может иметь возмущение v на управляемый выход z. Пусть супремум по $v \neq 0, x_0 = 0$ достигается на элементе $v^* \in L_F^2([0,T], L^2(\Omega, R^l))$, тогда можно показать [2], что v^* минимизирует функционал

$$J_1(v) = E\int_0^T (\gamma^2 v_t' v_t - z_t' z_t) dt \,. \tag{2}$$

Тем самым трудная задача вычисления нормы $\|L\| < \gamma$ сводится к традиционной задаче минимизации функционала.

1. Постановка задачи

Сформулируем стохастические задачи H_∞-управления и H_2/H_∞-управления для системы (1). Задача H_∞-управления состоит в следующем [3]: 1) Для заданного вещественного числа $\gamma > 0$ найти такое управление

$$u^* \in L_F^2([0,T], L^2(\Omega, R^m)),$$

что $\| L \| < \gamma$, где $L(v) = C\, x(\,.\,, u, v, 0) + D\, u$; при этом 2) управление u^* стабилизирует замкнутую систему, например, в следующем смысле:

$$\lim_{t\to\infty} E\,|\, x(t, u^*, 0, x_0)\,|^2 = 0.$$

Постановка задачи H_2/H_∞-управления включает те же требования 1), 2) и дополнительное требование: 3) если в уравнении (1) положить $v = v^*$, то $u = u^*$ минимизирует функционал энергии $\| z \|^2$:

$$J_2(u) = E\int_0^T (x_t' C' C x_t' + u' u_t) dt \,. \tag{3}$$

Управление u, удовлетворяющее требованиям 1) –3), обозначаем через u^*. Оно решает H_2/H_∞-задачу. В следующих двух разделах перейдем к решению задач H_∞ и H_2/H_∞ для системы (1), внутренние шумы которой представлены суммой случайных процессов, мультипликативных – один по состоянию, другой по управлению. Случайную составляющую $B_{10}\, v_t\, dw_t$, мультипликативную по внешнему возмущению v, считаем отсутствующей $(B_{10} = 0)$. Задача H_2/H_∞-управления для системы с внутренним шумом, мультипликативным по состоянию, упомянута (по-видимому, впервые) в работе [3] как теоретически интересная и практически значимая. Аналогичная задача для системы (1) с коэффициентами $A_0 \neq 0, B_{10} \neq 0$, но с $B_{20} = 0$ решена в работе [2].

2. Задача подавления внешнего возмущения

Замкнем систему (1) (считая $B_{10} = 0$) обратной связью $u_t(x) = K_2(t)x_t$ с переменным во времени коэффициентом передачи $K_2(t)$, пока не определенным. Получим замкнутую систему (нижний индекс «c» – от английского *closed* (замкнутый))

$$dx_c(t) = (A_c(t)\, x_c(t) + B_1(t)\, v_t)dt + A_{0c}(t)\, x_c(t)\, dw_t,$$
$$z_c(t) = C_c(t)\, x_c(t),\ \ x_c(0) = a,\ \ t \in [0,T], \tag{4}$$

где $x_c(t)$ – вектор состояния замкнутой системы и приняты обозначения

$$A_c(t) = A(t) + B_2(t)\, K_2(t),\ \ A_{0c}(t) = A_0(t) + B_{20}(t)\, K_2(t),$$
$$C_c(t) = C(t) + D(t)\, K_2(t). \tag{5}$$

Сначала, задавшись числом $\gamma > 0$, рассмотрим H_∞-задачу гашения внешнего возмущения. Формально считая v_t управлением, задачу гашения будем интерпретировать как задачу минимизации по v_t функционала

$$J_1(v) = E\int_0^T (\gamma^2 v_t' v_t - z_c'(t) z_c(t))dt. \tag{6}$$

Необходимое и достаточное условие существования решения H_∞-задачи дается фундаментальной леммой об ограниченности нормы оператора $L_c : v \to z_c$ для стохастической системы (4). Сформулируем здесь эту лемму [3].

Лемма об ограниченности. Для стохастической системы (4) и для заданного $\gamma > 0$ условие $\| L \| < \gamma$ выполняется тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{P} + A_c' P + P A_c + A_{0c}' P A_{0c} - \gamma^{-2} P B_1 B_1' - C_c' C_c = 0, \quad P(T) = 0 \tag{7}$$

имеет единственное решение $P_1(t) \le 0$ на $[0, T]$. Наименее благоприятное возмущение v_t^* дается формулой

$$v_t^*(x) = -\gamma^{-2} B_1'(t) P_1(t) x.$$

В подробной записи уравнение (7) представляется в виде (см. (5))

$$\begin{gathered}\dot{P}_1 + (A + B_2K_2)' P_1 + P_1(A + B_2K_2) - (A_0 + B_{20}K_2)' P_1 (A_0 + B_{20}K_2) - \\ -\gamma^{-2} P_1 B_1 B_1' P_1 - K_2' K_2 - C'C = 0, \quad P_1(T) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Значение матрицы K_2 все еще не определено (оно будет определено ниже формулой (10)).

3. Оптимизация системы при наихудшем внешнем возмущении

Подставив в (5) $v = v^*$, получим систему

$$dx_t = ((A(t) - \gamma^{-2} B_1(t) B_1'(t) P_1(t))x_t + B_2(t)u_t)dt + (A_0(t)x_t + B_{20}(t)u_t)dw_t,$$
$$z_t = C(t)x_t + D(t)u_t, \quad x_0 = a, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Минимизируя функционал $J_2(u)$ в формуле (3) при ограничении (9), получим оптимальное управление u^* при наименее благоприятном возмущении v^*. При $B_{20}(t) \equiv 0$ решение этой оптимизационной задачи представлено в [3]. В нашем случае, когда $B_{20}(t) \neq 0$, решение u^* также известно [4]. Оно получено с использованием теории *FBSDE*-решений систем прямого (*forward*) и обратного (*backward*) стохастических дифференциальных уравнений [5] и имеет вид

$$u_t^*(t) = K_2(t)x_t = -(B_2'P_2 + B_{20}'M)x_t, \qquad (10)$$

где $P_2(t) \geq 0, t \in [0,T]$ – единственное решение следующей дифференциальной системы:

$$\dot{P}_1 + (A - \gamma^{-2}B_1B_1'P_1)'P_2 + P_2(A - \gamma^{-2}B_1B_1'P_1) + A_0'M - P_2B_2B_{20}'M -$$
$$-P_2B_2B_2'P_2 + C'C = 0, \quad P_2(T) = 0, \quad M = P_2A_0 - P_2B_{20}B_2'P_2 - P_2B_{20}B_{20}'M. \qquad (11)$$

Система (11) включает дифференциальное уравнение типа Риккати и алгебраическое уравнение связи матриц P_2 и M.

Полученную в работе систему уравнений (8), (11) можно считать обобщением результата работы [3]. В самом деле, при $B_{20} = 0$ (когда нет шума, зависящего от управления) имеем $M = P_2A_0$, см. (11), и, следовательно, $u_t^*(x) = -B_2'P_2x$, где $P_2 \geq 0$ – решение (существующее по доказанному в [6]) уравнения Риккати

$$\dot{P}_2 + (A - \gamma^{-2}B_1B_1'P_1)'P_2 + P_2(A - \gamma^{-2}B_1B_1'P_1) + A_0'P_2A_0 - P_2B_2B_2'P_2 + C'C = 0,$$
$$P_2(t) = 0. \qquad (12)$$

Система уравнений (11), (12) совпадает с аналогичной системой уравнений (43), (45), полученной впервые в [3].

Подставив в (8) значение $K_2 = -B_2'P_2 + B_{20}'M$ из (10), получим запись уравнения (8) в следующем виде:

$$\dot{P}_1 + (A - B_2B_2'P_2 - B_2B_{20}'M)'P_1 + P_1(A - B_2B_2'P_2 - B_2B_{20}'M) -$$
$$-(A_0 - B_{20}B_2'P_2 - B_{20}B_{20}'M)'P_1(A_0 - B_{20}B_2'P_2 - B_{20}B_{20}'M) -$$
$$-\gamma^{-2}P_1B_1B_1'P_1 - K_2'K_2 - C'C = 0, \quad P_1(T) = 0. \qquad (13)$$

Решая систему уравнений (11), (13), получим затем искомые функции $v_t^*(x),\ u_t^*(x)$.

Заключение

В работе получено решение задачи стохастического робастного H_2/H_∞-управления для случая, когда диффузионная компонента стохастического дифференциального уравнения, описывающего систему управления, содержит внутренние шумы системы, мультипликативные по состоянию и по управлению. Задача свелась к нахождению решения системы двух связанных дифференциальных уравнений (11), (13) относительно матричных переменных $P_1(t) \leq 0,\ P_2(t) \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булинский А.В.*, *Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 399 с.
2. *Hinrichsen D.*, *Pritchard A.J.* Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No 5. P. 1504–1538.
3. *Chen B.S. and Zhang W.* Stochastic H_2/H_∞-control with state-dependent noise // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 1. P. 45–56.

4. *Wu Zhen*. Forward-backward stochastic differential equations, linear quadratic stochastic optimal control and nonzero sum differential games // J. Systems Science and Complexity. 2005. V.18. No. 2. P. 179–192.
5. *Ma Jin*, *Protter Philip*, *Yong Jiongmin.* Solving Forward-Backward Stochastic Differential Equations Explicitly – A Four Step Scheme. Probability Theory and Related Fields. 1994. V. 98. P. 339–359.
6. *Bensoussan A.* Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 1983. V. 972. P. 3–39.

Шайкин Михаил Ермолаевич
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: shaikin@ipu.ru
Поступила в редакцию 5 мая 2012 г.

Shaikin Michail E. (Institute of Control Sciences, RAS, Moscow). **Extension of one known result in stochastic H_2/H_∞-control theory.**

Keywords: state and control dependent noise, disturbance attenuation problem, robust control, Riccati-type equation.

The paper discusses the stochastic linear H_2/H_∞-control problem with state and control dependent noise. The solution of stochastic H_2/H_∞-control problem with finite horizon has close relation to a pair of coupled Riccati-type equations.