

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

М.А. Бахолдина

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ МОДУЛИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ¹

Решается задача оптимальной оценки состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий, являющегося одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, состояние потока, апостериорная вероятность состояния, оценка состояния.

В последнее время в связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, телекоммуникационных сетей и т.п., объединенных термином ЦСИО.

Математические методы теории массового обслуживания обеспечивают возможность решения многочисленных задач расчета характеристик качества функционирования различных компонент ЦСИО, включая оценку вероятностно-временных характеристик узлов коммутации и маршрутизации; анализ буферной памяти узлов и методов локального и глобального управления потоками и т.д.

Стоит отметить, что условия функционирования реальных объектов и систем таковы, что если в отношении параметров обслуживаемых устройств можно сказать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. По-видимому, статья [1] является одной из первых работ в этом направлении, где дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. С другой стороны, функционирование систем массового обслуживания зависит от параметров и состояний входящих потоков. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применения адаптивных систем массового обслуживания,

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы, задание 8.4055.2011.

которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков и изменяют дисциплину обслуживания в соответствии с полученными оценками [2].

Дважды стохастические потоки событий можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Потоки второго класса впервые и независимо введены в работах [3–5]. В [3, 4] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками; в [5] – MVP (Markov Versatile Processes)-потоками. Последние с начала 90-х годов получили название МАР (Markovian Arrival Process)-потоков событий.

В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки [6]; 2) асинхронные потоки [7]; 3) полусинхронные потоки [8]. Здесь указаны ссылки на статьи, в которых авторы впервые рассматривали МС-потоки событий в соответствии с приведенной классификацией. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков событий приведена в [9].

Подчеркнем, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки можно представить в виде моделей МАР-потоков событий первого либо второго порядков [10]. В [10] показывается, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки – частными случаями МАР-потока второго порядка. Как было отмечено выше, в реальных ситуациях интенсивность входящего потока событий изменяется со временем случайным образом, поэтому для реализации адаптивного управления системой массового обслуживания требуется решение следующих задач: 1) оценка состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий [11, 12]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [13].

В работе [14] введен в рассмотрение модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, относящийся к классу МАР-потоков второго порядка. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работы [14], решается в полной мере задача оптимальной оценки состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Сам критерий минимизирует полную вероятность ошибки вынесения решения [15].

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β , во втором – с параметром α . Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в первом (во втором) состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt (здесь и далее) – достаточно малая величина, с ве-

роятностью $\beta\Delta t + o(\Delta t)$ (с вероятностью $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$) пребывание процесса $\lambda(t)$ в первом (во втором) состоянии закончится, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью единица перейдет из первого (второго) состояния во второе (в первое). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии (т.е. сначала наступает событие потока, затем происходит переход процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе). Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе с вероятностью единица из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется или не инициируется дополнительное событие). В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий потока.

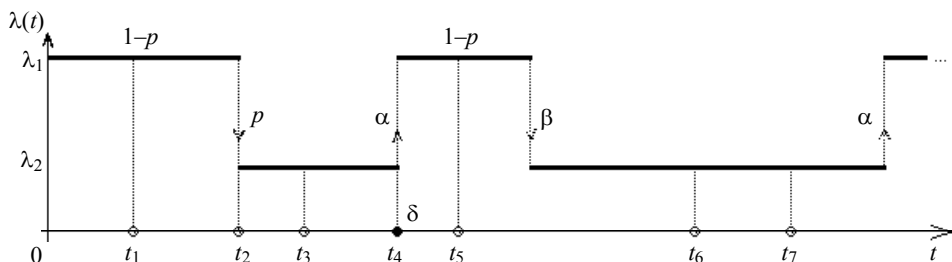


Рис. 1. Модулированный обобщенный полусинхронный поток событий

Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ (1 - \delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|D_0 | D_1\|. \quad (1)$$

Матрица D_0 описывает ситуацию, когда на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ нет события потока, матрица D_1 – когда на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ есть событие потока. Отметим, что если $\beta = 0$, то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [9].

Так как процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий на временной оси $t_1, t_2, \dots$, то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений. Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, поэтому переходными про-

цессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество наблюдаемых событий за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

2. Вывод апостериорной вероятности состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий

Момент вынесения решения будет принадлежать интервалу (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями потока. Для начального интервала (t_0, t_1) момент t будет лежать между началом наблюдения t_0 и первым наблюдаемым событием потока. Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}) , значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \dots$. Для вывода формул апостериорной вероятности $w(\lambda_i | t)$ используем известную методику [14]: сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени Δt , а затем совершим предельный переход при стремлении Δt к нулю. Пусть время меняется дискретно с шагом Δt : $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots$. Введем двумерный процесс $(\lambda^{(n)}, r_n)$, где $\lambda^{(n)} = \lambda(n\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $n\Delta t$ ($\lambda^{(n)} = \lambda_i, i = 1, 2$); $r_n = r_n(\Delta t) = r(n\Delta t) - r((n-1)\Delta t)$ – число событий потока, наблюдаемых на интервале $((n-1)\Delta t, n\Delta t)$ длительности Δt , $r_n = 0, 1, \dots$. Обозначим через $R_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ последовательность числа событий за время от нуля до $m\Delta t$ на интервалах $((n-1)\Delta t, n\Delta t)$ длительности Δt ($n = \overline{0, m}$). Здесь r_0 – число событий, наблюдаемых на интервале $(-\Delta t, 0)$. Это число не определено, так как на этом интервале наблюдений не производится, поэтому его можно задать произвольным, например $r_0 = 0$. Обозначим через $\Lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(n\Delta t)$ в моменты времени $n\Delta t$ ($n = \overline{0, m}$); $\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$. Обозначим через $w(\lambda^{(m)} | R_m)$ условную вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация R_m . Аналогично $w(\lambda^{(m+1)} | R_{m+1})$. Для марковского случайного процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ в [7] получена рекуррентная формула, связывающая апостериорные вероятности $w(\lambda^{(m)} | R_m)$ и $w(\lambda^{(m+1)} | R_{m+1})$:

$$w(\lambda^{(m+1)} | R_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | R_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | R_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)} \quad (2)$$

где $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$. В рассматриваемом случае потока случайный процесс $(\lambda^{(n)}, r_n)$, в силу предпосылок и его конструкции, является марковским, так что формула (2) имеет место.

Лемма 1. В течение времени между моментами наступления соседних событий потока t_k и t_{k+1} , $k = 0, 1, \dots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w'(\lambda_1 | t) = \alpha(1 - \delta) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta) w(\lambda_1 | t) + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) w^2(\lambda_1 | t),$$

$$t_k \leq t < t_{k+1}, k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Доказательство. Переходная вероятность $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ для потока в (2) запишется в виде

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) \cdot p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)});$$

$$\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda_2. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что

$$w(\lambda^{(m)} | R_m) = w(\lambda^{(m)} | R_m(t)) = w(\lambda^{(m)} | t),$$

$$w(\lambda^{(m+1)} | R_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | R_{m+1}(t + \Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t),$$

учитывая (4) и полагая в (2) для определенности $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$, получаем (2) в виде

$$w(\lambda_1 | t + \Delta t) = \frac{\sum_{s=1}^2 w(\lambda_s | t) p(\lambda_1 | \lambda_s) p(r_{m+1} | \lambda_s, \lambda_1)}{\sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^2 w(\lambda_s | t) p(\lambda_j | \lambda_s) p(r_{m+1} | \lambda_s, \lambda_j)}. \quad (5)$$

В силу определения потока величина r_{m+1} принимает только два значения: $r_{m+1} = 0$, $r_{m+1} = 1$. Здесь рассматривается поведение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ между соседними событиями потока, т.е. $t_k \leq t < t_{k+1}$; $t_k \leq t + \Delta t < t_{k+1}$. Тогда в (5) $r_{m+1} = 0$ и с учетом матрицы D_0 в (1) на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ переходные вероятности (4) примут вид

$$p(\lambda_1 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_1, \lambda_1) = 1 - (\lambda_1 + \beta)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p(\lambda_2 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_2, \lambda_2) = 1 - (\lambda_2 + \alpha)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_2, \lambda_1) &= (1 - \delta) \alpha \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda_2 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_1, \lambda_2) &= \beta \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), учитывая, что $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$, находим числитель A_0 и знаменатель B_0 в (5):

$$\begin{aligned} A_0 &= (1 - \delta) \alpha \Delta t + (1 - (\lambda_1 + \beta) \Delta t - (1 - \delta) \alpha \Delta t) w(\lambda_1 | t) + o(\Delta t), \\ B_0 &= 1 - \Delta t [\alpha \delta + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \delta) w(\lambda_1 | t)] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя A_0 и B_0 в (5) и учитывая при этом, что

$$B_0^{-1} = 1 + \Delta t \cdot [\alpha \delta + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \delta) \cdot w(\lambda_1 | t)] + o(\Delta t)$$

(так как $(1 - x)^{-1} = 1 + x + o(x)$ для достаточно малых $x > 0$), получаем

$$\begin{aligned} &w(\lambda_1 | t + \Delta t) - w(\lambda_1 | t) = \\ &= \Delta t \left\{ \alpha(1 - \delta) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta) w(\lambda_1 | t) + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) w^2(\lambda_1 | t) \right\} + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Деля здесь левую и правую части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, находим (3). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Уравнение (3) определяет поведение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$, т.е. между моментами наступления событий, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $w(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$, на основе которого, как будет показано в лемме 2, находится вероятность $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$, являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_{k+1}, t_{k+2})$.

Лемма 2. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в момент наступления события потока t_k , $k = 0, 1, \dots$, определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\alpha \delta + [\lambda_1(1 - p) - \alpha \delta] w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + \alpha \delta + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \delta) w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Доказательство. Пусть на интервале $(t, t + \Delta t)$ в момент времени t_k ($t < t_k < t + \Delta t$) наступает событие потока ($r_{m+1} = 1$). Имеем два смежных интервала (t, t_k) , $(t_k, t + \Delta t)$ с длительностями $t_k - t = \Delta t'$, $t + \Delta t - t_k = \Delta t''$. Тогда $w(\lambda_s | t) = w(\lambda_s | t_k - \Delta t')$, $s = 1, 2$; $w(\lambda_1 | t + \Delta t) = w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'')$ и (5) примет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{s=1}^2 w(\lambda_s | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda_s) p(r_{m+1} | \lambda_s, \lambda_1)}{\sum_{j=1}^2 \sum_{s=1}^2 w(\lambda_s | t_k - \Delta t') p(\lambda_j | \lambda_s) p(r_{m+1} | \lambda_s, \lambda_j)}. \quad (8)$$

С учетом матрицы D_1 в (1) на интервале $(t, t + \Delta t) = (m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ вероятности (4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_1, \lambda_1) &= (1 - p) \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda_2 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_2, \lambda_2) &= \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 | \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_2, \lambda_1) &= \alpha \delta \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda_2 | \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_1, \lambda_2) &= p \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получаем числитель A_1 и знаменатель B_1 в (8):

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta t ((1-p) \lambda_1 w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') + \alpha \delta w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')) + o(\Delta t), \\ B_1 &= \Delta t (\lambda_1 w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') + (\lambda_2 + \alpha \delta) w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя A_1 и B_1 в (8), деля числитель и знаменатель на Δt , учитывая, что $w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')$, и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ одновременно стремятся к нулю), получаем (7). *Лемма 2 доказана.*

Замечание 2. В точке t_k вероятность $w(\lambda_1 | t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок). Тогда решение уравнения (3) будет зависеть от начального условия в момент времени t_k , т.е. от $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. В свою очередь, $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ зависит от значения $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ – значения вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k , когда $w(\lambda_1 | t)$, определяемая в (3), изменяется на полуинтервале $[t_{k-1}, t_k)$, соседнем с полуинтервалом $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, в значении $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ «сосредоточена» вся предыстория наблюдений за потоком начиная от момента времени $t_0 = 0$ до момента t_k . В качестве начального условия $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$ на полуинтервале $[t_0, t_1)$ в (3) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$:

$$\pi_1 = \alpha / (\alpha + \beta + p \lambda_1). \quad (10)$$

Леммы 1 и 2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временном полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-b(t-t_k)}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-b(t-t_k)}}, \quad (11)$$

$$w_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta - b}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)}, \quad w_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta + b}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)},$$

$$b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)},$$

где $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$; $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$, π_1 определена в (10), $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ – в (7).

Доказательство. Уравнение (3) в лемме 1 представимо в виде

$$\left((w(\lambda_1 | t) - w_1)^{-1} - (w(\lambda_1 | t) - w_2)^{-1} \right) dw(\lambda_1 | t) = (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) dt, \quad (12)$$

где w_1 и w_2 определены в (11). Интегрируя (12) в пределах от $t_k + 0$ до t , получаем (11). *Теорема доказана.*

Особый случай. $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$. Тогда формула (11) примет вид

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{\alpha(1-\delta)}{\alpha + \beta - \alpha\delta} + \left[w(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{\alpha(1-\delta)}{\alpha + \beta - \alpha\delta} \right] e^{-(\alpha + \beta - \alpha\delta)(t - t_k)},$$

где $t_k \leq t < t_{k+1}, k = 0, 1, \dots$.

Формула (7) остается без изменения. Если к ограничению $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ добавить еще одно ограничение: $(1-p)\lambda_1 - \alpha\delta = 0$, то тогда (7) запишется в виде $w(\lambda_1 | t_k + 0) = \alpha\delta / (\lambda_2 + \alpha\delta)$, $k = 1, 2, \dots$, т.е. в этом случае апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от ее значения в момент t_k .

Частный случай. Если $p = 1$, $\delta = 0$, то тогда $w(\lambda_1 | t_k + 0) = 0, k = 1, 2, \dots$, т.е. в этом случае апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ также не зависит от предыстории, а зависит только от ее значения в момент t_k .

3. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ по формулам (7), (10), (11). Программа расчета реализована на языке программирования C#, Microsoft Visual Studio 2012. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование потока и как результат получение истинной траектории интенсивности потока $\lambda(t)$ и временных моментов $t_1, t_2, \dots$ наступления событий потока. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Второй этап расчета – непосредственное вычисление вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, по формулам (7), (10), (11) и построение оценки $\hat{\lambda}(t)$. Расчеты произведены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 1$, $p = 0,2$, $\beta = 0,8$, $\alpha = 0,5$, $\delta = 0,8$, число событий входящего потока $m = 1000$. Данное число событий определяет время моделирования. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория (верхняя часть рис. 2) процесса $\lambda(t)$ (истинная траектория), полученная путем имитационного моделирования, и траектория (нижняя часть рис. 2) оценки $\hat{\lambda}(t)$.



Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ и его оценки $\hat{\lambda}(t)$

Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,001$. На рис. 2 штриховкой на оси времени обозначены промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (область ошибочных решений). На рис. 3 приведена траектория поведения вероятности $w(\lambda_1 | t)$, соответствующей полученной при имитационном моделировании последовательности наступления событий $t_1, t_2, \dots$.

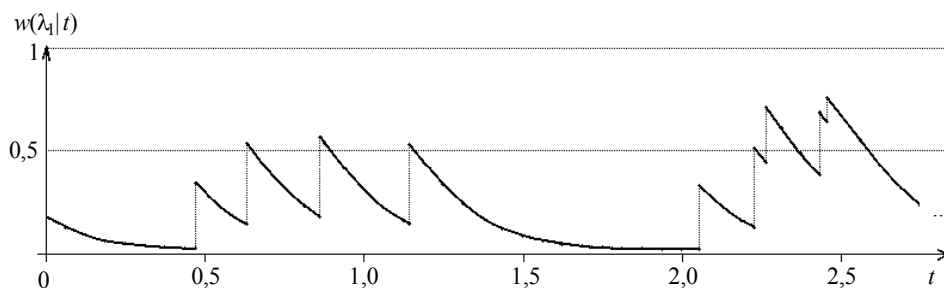


Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$

Для установления частоты ошибочных решений о состояниях процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов: 1) для определенного набора параметров $n, \lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ осуществляется моделирование потока событий на протяжении времени моделирования $[0, Tm_j]$ (отдельный j -й эксперимент); 2) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на отрезке $[0, Tm_j]$ по формулам (7), (10), (11); 3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, Tm_j]$; 4) осуществляется определение (для j -го эксперимента) d_j – суммарной протяженности интервалов, на которых истинная траектория процесса $\lambda(t)$ не совпадает с траекторией его оценки $\hat{\lambda}(t)$; 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_j = d_j / Tm_j$; 6) Производится повторение N раз ($j = \overline{1, N}$) шагов 1–5 для расчета оценки безусловной (полной) вероятности ошибки принятия решения о состояниях процесса $\lambda(t)$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)$ долей ошибочных решений в N экспериментах. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения

$$\hat{P}_0 = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \text{ и выборочная дисперсия } \hat{D} = (1/(N-1)) \sum_{j=1}^N (\hat{p}_j - \hat{P}_0)^2.$$

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–5. В первой строке таблиц указан параметр, значение которого изменяется от опыта к опыту. Во второй и третьей строках приведены для каждого опыта численные значения $\hat{P}_0$ и $\hat{D}$.

При этом результаты получены при следующих значениях параметров: в табл. 1 для $m = 1000$, $\lambda_2 = 3,5$, $p = 0,8$, $\beta = 0,4$, $\alpha = 0,4$, $\delta = 0,9$, $N = 100$, в табл. 2 – для $m = 1000$, $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 3,5$, $\beta = 0,4$, $\alpha = 0,4$, $\delta = 0,9$, $N = 100$, в табл. 3 – для $m = 1000$, $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 3,5$, $p = 0,8$, $\alpha = 0,4$, $\delta = 0,9$, $N = 100$, в табл. 4 – для $m = 1000$, $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 3,5$, $p = 0,8$, $\beta = 0,4$, $\delta = 0,9$, $N = 100$, в табл. 5 – для $m = 1000$, $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 3,5$, $p = 0,8$, $\beta = 0,4$, $\alpha = 0,4$, $N = 100$.

Таблица 1

λ_1	7	8	9	10	11	12	13	14
$\hat{P}_0$	0,0634	0,0560	0,0508	0,0449	0,0427	0,0385	0,0364	0,0339
$\hat{D}$	0,00006	0,00006	0,00004	0,00004	0,00002	0,00002	0,00002	0,00003

Таблица 2

p	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{P}_0$	0,1417	0,1081	0,0813	0,0613	0,0530	0,0430	0,0378	0,0339	0,0300	0,0271
$\hat{D}$	0,0002	0,0002	0,0001	0,00009	0,00005	0,00003	0,00003	0,00001	0,00001	0,00001

Таблица 3

β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{P}_0$	0,0344	0,0337	0,0340	0,0333	0,0332	0,0336	0,0331	0,0321	0,0325	0,0322
$\hat{D}$	0,00001	0,00001	0,00002	0,00003	0,00002	0,00002	0,00001	0,00002	0,00002	0,00001

Таблица 4

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{P}_0$	0,0085	0,0172	0,0251	0,0333	0,0417	0,0492	0,0589	0,0654	0,0727	0,0804
$\hat{D}$	0,00001	0,00001	0,00001	0,00002	0,00002	0,00003	0,00004	0,00004	0,00004	0,00005

Таблица 5

δ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{P}_0$	0,0334	0,0335	0,0335	0,0334	0,0339	0,0337	0,0335	0,0336	0,0338	0,0335
$\hat{D}$	0,00001	0,00002	0,00001	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002

Отметим, что анализ проведенных многочисленных вариантов расчетов по нахождению оценки $\hat{P}_0$ показывает, что $\hat{P}_0$ является достаточно стабильной для $m = 1000$ событий потока. Вследствие этого m для всех экспериментов выбрано равным 1000 событий. Анализ результатов, приведенных в табл. 1–5, показывает, что тренд значений оценки $\hat{P}_0$ в зависимости от λ_1 убывающий, так как при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ условия различимости состояний потока улучшаются, при этом оценка $\hat{D}$ для всех вариантов расчета достаточно мала.

Анализ результатов табл. 2 показывает, что значение оценки $\hat{P}_0$ уменьшается при увеличении вероятности перехода p из первого во второе состояние процесса $\lambda(t)$. Это связано с тем, что при увеличении параметра p процесс $\lambda(t)$ преимущественно будет находиться во втором состоянии, что улучшает условия различимости состояний потока. В случае табл. 3 значение вероятности перехода $p = 0,8$ достаточно велико, поэтому с вероятностью 0,8 в момент наступления события пуассоновского потока процесс $\lambda(t)$ переходит из первого состояния во второе и изменение параметра β не приводит к изменению оценки $\hat{P}_0$. Анализируя табл. 4, можно прийти к выводу, что при увеличении α значение оценки $\hat{P}_0$ также увеличивается. Это связано с тем, что при увеличении параметра α число переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_2 в состояние λ_1 увеличивается, и поэтому условия различимости состояний потока ухудшаются. Анализ результатов табл. 5 показывает, что изменение параметра δ не сказывается на величине оценки $\hat{P}_0$, так как длительность нахождения процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_2 определяется только параметром α .

Заключение

Полученные результаты показывают возможность оценивания состояний потока по результатам текущих наблюдений за потоком. Это позволяет изменять режимы работы системы обслуживания в зависимости от того или иного состояния потока. Выражения апостериорных вероятностей получены в явном виде, что позволяет производить вычисления без привлечения численных методов. Сам же алгоритм оценки состояний потока обеспечивает минимум безусловной (полной) вероятности ошибки вынесения решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1964. V.60. No 4. P. 923–930.
2. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Appl. Probab. 1979. V.16. P. 764–779.
6. Нежелская Л.А. Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стохастического потока с инициативными событиями // Тез. докл. науч.-технич. конф. «Микросистема-91». Суздаль. М.: Всесоюзное общество информатики и вычислительной техники, 1991. С. 26–28.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
8. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронно-альтернатирующего пуассоновского потока событий методом моментов // Радиотехника. 1995. № 7–8. С. 6–10.
9. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.

10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Соловьев А.А. Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 49–63.
12. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V.73. No. 8. P. 1316–1326.
13. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
14. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Апостериорные вероятности состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы IX Российской конференции с международным участием. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. С. 79.
15. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.

Бахолдина Мария Алексеевна

Томский государственный университет

E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Поступила в редакцию 5 марта 2013 г.

Bakholdina Maria A. (Tomsk State University). The optimal states evaluation of modulated semisynchronous integrated flow of events.

Keywords: modulated generalized semisynchronous flow of events, flow state, state a posteriori probability, state estimating.

There is studied the modulated generalized semisynchronous flow of events, which is one of the mathematical models of informational flows of events functioning in Integrated Services Digital Networks (ISDNs). The flow intensity is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). During the time interval, while $\lambda(t) = \lambda_i$, there is a Poisson flow of events with intensity $\lambda_i, i = 1, 2$. The transition of process $\lambda(t)$ from one state to another state can occur at any time. The duration, while process $\lambda(t)$ stays in a first state, is distributed according to the exponential law with parameter β . At the same time, after the event arrives the process $\lambda(t)$ can change the state to λ_2 with probability p or stay in the first state λ_1 with probability $1 - p$. The duration, while process $\lambda(t)$ stays in a second state, is distributed according to the exponential law with parameter α . At the moment of state changing from second state to first state additional event in a state λ_1 is initiated with probability δ .

The process $\lambda(t)$ is considered in a steady-state conditions. The explicit formula for a posteriori probability is found and decision is made according to criterion of a posteriori probability maximum. Numerical results obtained by simulation are given.