

УДК 519.21

А.М. Горцев, М.Н. Голофастова

**ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ МОДУЛИРОВАННОГО
СИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ¹**

Решена задача оптимальной оценки состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, являющегося одной из математических моделей информационных потоков событий, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦИО). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

Ключевые слова: *синхронный модулированный поток событий, состояние потока, апостериорная вероятность состояния, оптимальная оценка состояния.*

Математические модели теории массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином – ЦИО.

На практике параметры, определяющие входной поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении явилась статья [1], в которой дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [2–4]. В [2, 3] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками; в [4] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Последние начиная с конца 80-х годов прошлого века носят название MAP (Markov Arrival Process)-потоков событий. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [5, 6]; 2) асинхронные потоки событий [7, 8]; 3) полусинхронные потоки событий [9]. Здесь указаны ссылки, в которых авторы впервые рассматривают МС-потоки событий в соответствии с приведенной классификацией. Наиболее обширная литература по рассматриваемым типам МС-потоков событий приведена в [10]. В [11] введены в рассмот-

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы, задание 8.4055.2011.

рение МАР-потоки событий первого порядка (собственно МАР-потоки, введенные в [4]) и МАР-потоки событий второго порядка (суперпозиция (простая сумма) двух МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [11] показывается, что синхронный МАР-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [12]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [13].

В работе [14] введен в рассмотрение модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу МАР-потоков второго порядка. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работы [14], решается задача об оптимальной оценке состояний модулированного синхронного потока. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояний потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Сам критерий минимизирует полную вероятность ошибки вынесения решения [15].

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 > \lambda_2)$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i, i = 1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии закончится, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью равной единице перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_i, i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$

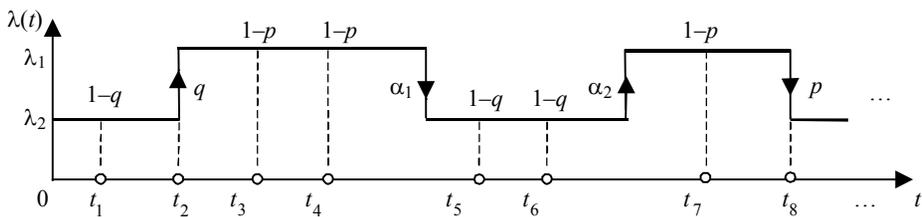


Рис. 1. Модулированный синхронный дважды стохастический поток событий

остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; переход осуществляется с вероятностью q ($0 < q \leq 1$); с вероятностью $1 - q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий потока.

Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 & (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) & q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [5].

Подчеркнем, что в постановке задачи принимается первичность наступления события, затем – переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Данное обстоятельство при получении аналитических результатов является несущественным, так как наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние происходит мгновенно. При получении же численных результатов путем имитационного моделирования необходима определенность, что первично – наступление события, затем смена состояния либо наоборот.

Так как процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий на временной оси t_1, t_2, \dots , то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений.

Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество наблюдаемых событий за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$, тогда, если $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

2. Алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока

Момент вынесения решения t будет принадлежать интервалу (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями потока. Для начального интервала (t_0, t_1) момент t будет лежать между началом наблюдения t_0 и моментом t_1 . Рассмотрим

интервал (t_k, t_{k+1}) , значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, \dots$. Для вывода формул апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ используем известную методику [15]: сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени Δt , а затем совершим предельный переход при стремлении Δt к нулю.

Пусть время меняется дискретно с шагом $\Delta t: t = n\Delta t, n = 0, 1, \dots$. Введем двумерный процесс $(\lambda^{(n)}, r_n)$, где $\lambda^{(n)} = \lambda(n\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $n\Delta t (\lambda^{(n)} = \lambda_i, i = 1, 2)$; $r_n = r_n(\Delta t) = r(n\Delta t) - r((n-1)\Delta t)$ – число событий, наблюдаемых на временном интервале $((n-1)\Delta t; n\Delta t)$, $r_n = 0, 1, \dots$, длительности Δt . Обозначим $\lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(0)})$ – последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(n\Delta t)$ в моменты $n\Delta t (n = \overline{0, m})$; $\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$. Обозначим $r_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность числа событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((n-1)\Delta t; n\Delta t)$ длительности $\Delta t, n = \overline{0, m}$ (значение r_0 можно задавать произвольно, так как промежуток $(-\Delta t, 0)$ находится за пределами интервала наблюдения $(0, m\Delta t)$, и положить его, например, равным 0). Обозначим через $w(\lambda^{(m)} | r_m)$ условную вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация r_m . Аналогично $w(\lambda^{(m)} | r_{m+1})$. Для марковского случайного процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ в [8] получена рекуррентная формула, связывающая апостериорные вероятности $w(\lambda^{(m)} | r_m)$ и $w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1})$:

$$w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | r_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | r_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}, \quad (1)$$

где $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$. В рассматриваемом случае модулированного синхронного дважды потока процесс $(\lambda^{(n)}, r_n)$ будет марковским, при этом переходная вероятность $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ в (1) примет вид

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}).$$

Принимая во внимание, что если $w(\lambda^{(m)} | r_m) = w(\lambda^{(m)} | r_m(t)) = w(\lambda^{(m+1)} | t)$, $w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1}(t + \Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$, то (1) запишется в виде

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (2)$$

Лемма 1. В течение времени между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока t_k и $t_{k+1}, k = 0, 1, \dots$, апостериорная вероят-

ность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2)(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w(\lambda_1 | t) - w_2), \quad (3)$$

$$w_{1,2} = \left[\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right] / 2(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Доказательство. Для определенности положим в (2) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. В силу определения потока величина r_{m+1} в (2) может принимать два значения: $r_{m+1} = 0, r_{m+1} = 1$. Здесь рассматривается поведение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ между соседними событиями потока, то есть $t_k \leq t < t_{k+1}, t_k \leq t + \Delta t < t_{k+1}$. Тогда в (2) $r_{m+1} = 0$ и, с учетом матрицы D_0 , на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ переходные вероятности в (2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_i, \lambda^{(m)} = \lambda_1) &= \\ &= 1 - \alpha_i \Delta t - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 1, 2, \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_i, \lambda^{(m)} = \lambda_2) &= \\ &= \alpha_i \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (2), находим

$$w(\lambda_1 | t + \Delta t) = \frac{w(\lambda_1 | t)(1 - \alpha_1 \Delta t - \lambda_1 \Delta t) + w(\lambda_2 | t)\alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)}{w(\lambda_1 | t)(1 - \lambda_1 \Delta t) + w(\lambda_2 | t)(1 - \lambda_2 \Delta t) + o(\Delta t)}.$$

Учитывая, что $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$ и при достаточно малых Δt величина $A_2^{-1} = 1 + \lambda_2 \Delta t + w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 - \lambda_2)\Delta t + o(\Delta t)$, то деля обе части равенства на Δt и устремив Δt к 0, получаем

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = \alpha_2 - w(\lambda_1 | t)(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) + w^2(\lambda_1 | t)(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Находя корни w_1 и w_2 характеристического уравнения

$$\alpha_2 - w(\lambda_1 | t)(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) + w^2(\lambda_1 | t)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

подставляя их в полученное дифференциальное уравнение, приходим к (3). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Уравнение (3) определяет поведение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots$, то есть между моментами наступления событий, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $w(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$, на основе которого, как будет показано в лемме 2, находится вероятность $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$, являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_{k+1}, t_{k+2})$.

Лемма 2. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в момент наступления события модулированного синхронного потока $t_k, k = 0, 1, \dots$, определяется формулой пере-счета

$$w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0) = \frac{q\lambda_2 + ((1-p)\lambda_1 - q\lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Доказательство. Пусть на интервале $(t, t + \Delta t)$ в момент времени t_k ($t < t_k < t + \Delta t$) наступает событие потока ($r_{m+1} = 1$). Имеем два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$. Длительность первого $t_k - t = \Delta t'$, длительность второго $t + \Delta t - t_k = \Delta t''$. Тогда в (2) $w(\lambda^{(m)} | t) = w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t')$, $w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'')$, и (2) примет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (5)$$

С учетом матрицы D_1 на интервале $(t, t + \Delta t) = (m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ переходные вероятности в (5) запишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda^{(m)} = \lambda_1) &= (1-p)\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_2, \lambda^{(m)} = \lambda_2) &= (1-q)\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda^{(m)} = \lambda_2) &= p\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_2, \lambda^{(m)} = \lambda_1) &= q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя данные переходные вероятности в (5), получаем числитель B_1 и знаменатель B_2 в (5):

$$\begin{aligned} B_1 &= w(\lambda_1 | t_k - t')(1-p)\lambda_1 \Delta t + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ B_2 &= w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')(1-p)\lambda_1 \Delta t + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')q\lambda_2 \Delta t + w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')p\lambda_1 \Delta t + \\ &\quad + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')(1-q)\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя B_1 и B_2 в (5), деля числитель и знаменатель на Δt и устремляя Δt к 0 ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ стремятся к 0 одновременно), учитывая, что $w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')$, приходим к (4). *Лемма 2 доказана.*

Замечание 2. В точке t_k вероятность $w(\lambda_1 | t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок). Тогда решение уравнения (3) будет зависеть от начального условия в момент времени t_k , т.е. от $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. В свою очередь, $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ зависит от значения $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ – значение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k , когда $w(\lambda_1 | t)$, определяемая в (3), изменяется на полуинтервале $[t_{k-1}, t_k)$, соседнем с полуинтервалом $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, в значении $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ «сосредоточена» вся предыстория наблюдений за потоком начиная от момента времени $t_0 = 0$ до момента t_k .

В качестве начального условия $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$ в (3) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$:

$$\pi_1 = (\alpha_1 + p\lambda_1) / (\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2). \quad (6)$$

Замечание 3. Рассмотрим случай, когда $p+q=1$. Тогда выражение (4) приобретает вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = q, k = 1, 2, \dots$$

Последнее говорит о том, что для этого частного случая вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от ее значения в момент t_k , т.е. от $w(\lambda_1 | t_k + 0) = q$ для любых k ($k = 1, 2, \dots$).

Леммы 1 и 2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временных полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, определяется явной формулой:

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}{w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}, \quad (7)$$

где $t_k \leq t < t_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$); $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ определена формулой (4), $k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$, где π_1 определяется в (6); w_1, w_2 определены в (3).

Доказательство. Уравнение (3) в лемме 1 представимо в виде

$$\frac{1}{w_1 - w_2} \left[\frac{d(w(\lambda_1 | t) - w_1)}{w(\lambda_1 | t) - w_1} - \frac{d(w(\lambda_2 | t) - w_2)}{w(\lambda_2 | t) - w_2} \right] = (\lambda_1 - \lambda_2) dt, \quad (8)$$

где w_1 и w_2 определены в (3). Интегрируя (8) в пределах от $t_k + 0$ до t получаем (7). Теорема доказана.

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t (алгоритм оптимальной оценки состояния модулированного синхронного потока):

1) в момент времени $t_0 = 0$ по формуле (6) задается

$$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1;$$

2) по формуле (7) для $k=0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($0 < t < t_1$), где t_1 – момент наступления первого события потока;

3) по формуле (7) для $k=0$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$;

4) k увеличивается на единицу, и по формуле (4) для $k=1$ вычисляется значение $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$, являющееся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (7);

5) по формуле (7) для $k=1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($t_1 < t < t_2$);

6) по формуле (7) для $k=1$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$;

7) алгоритм переходит на шаг 4, после чего шаги 4 – 6 повторяются для $k = 2$ и т.д.

По ходу вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq 0,5$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Особый случай. Если $p+q=1$, то каждый раз, когда алгоритм возвращается на шаг 4, вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, полагается равной q .

3. Результаты статистического эксперимента

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ по формулам (4) – (7). Программа расчета реализована на языке программирования Visual C++, Microsoft Visual Studio 2008. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование модулированного синхронного потока. Описание алгоритма моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей он не содержит. Вторым этапом расчета – вычисление вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k=1,2,\dots$, по формулам (4), (6), (7) и построение оценки $\hat{\lambda}(t)$.

Пример поведения процесса $\lambda(t)$ и его оценки изображен на рис. 2. Данные результаты получены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5$, $p = 0,4, q = 0,5, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$, время моделирования $T = 100$ ед. времени. В верхней части рисунка изображено истинное поведение процесса $\lambda(t)$, полученное путем имитационного моделирования, где λ_1 и λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$. В нижней части рисунка изображено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$.

Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,01$. На рис. 2 штриховкой на оси времени обозначены промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (область ошибочных решений). На рис. 3 приведена траектория поведения апостериорной $w(\lambda_1 | t)$, соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности событий t_1, t_2, \dots .

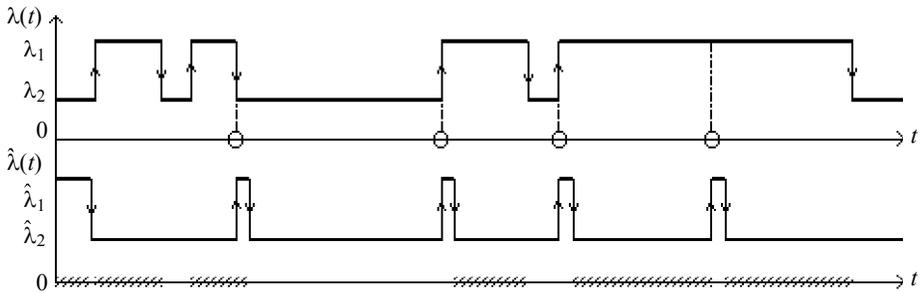


Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

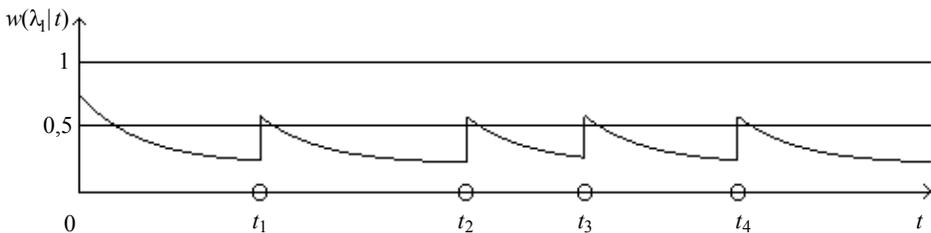


Рис. 3. Траектория поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов: 1) для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, q, \alpha_1, \alpha_2, T_m$ ед. времени осуществляется моделирование потока событий на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ (отдельный j -й эксперимент); 2) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на отрезке $[0, T_m]$ по формулам (4), (6), (7); 3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$; 4) осуществляется определение (для j -го эксперимента) d_j – суммарной протяженности интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$; 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_j = d_j / T_m$; 6) производится повторение N раз ($j = \overline{1, N}$) шагов 1 – 5 для расчета оценки безусловной (полной) вероятности принятия решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)$ долей ошибочных решений в N экспериментах. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности принятия ошибочного решения $\hat{P} = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{p}_j$ и выборочная дисперсия $\hat{D} = (1/(1-N)) \sum_{j=1}^N (\hat{p}_j - \hat{P})^2$.

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1 – 6. В первой строке таблиц указаны значения изменяющегося параметра при остальных фиксированных. Во второй и третьей строках таблиц для каждого значения изменяющегося параметра приведены численные значения \hat{P} и \hat{D} . Результаты в табл. 1, 2 получены при следующих фиксированных параметрах, $p=0,6, q=0,6, \alpha_1=1, \alpha_2=0,2$. При этом в табл. 1 параметр λ_1 меняет значения от 1 до 10 при $\lambda_2=0,5$, в табл. 2 λ_2 принимает значения от 0,5 до 9 при $\lambda_1=10$. Результаты в табл. 3, 4 получены при $p=0,6, q=0,6, \lambda_1=10, \lambda_2=0,5$, причем в табл. 3 α_1 принимает значения от 1 до 10 при $\alpha_2=0,2$, в табл. 4 α_2 принимает значения от 0,2 до 9 при $\alpha_1=10$. Результаты в табл. 5 и 6 приведены, когда $\lambda_1=5, \lambda_2=0,5, \alpha_1=5, \alpha_2=0,2$, при этом в табл. 5 p меняет свое значение от 0,05 до 0,9 при $q=0,6$, а в табл. 6 параметр q варьируется от 0,05 до 0,9 при $p=0,6$.

Таблица 1

λ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\hat{P}	0,2525	0,2003	0,1602	0,1326	0,1171	0,1085	0,0897	0,0826	0,0763	0,0718
\hat{D}	0,0017	0,0009	0,0006	0,0005	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица 2

λ_2	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\hat{P}	0,0683	0,1046	0,1683	0,2271	0,2795	0,3066	0,3516	0,3889	0,4122	0,4430
\hat{D}	0,0002	0,0003	0,0004	0,0003	0,0002	0,0007	0,0004	0,0003	0,0004	0,0005

Таблица 3

α_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\hat{P}	0,0683	0,0610	0,0574	0,0527	0,0468	0,0423	0,0405	0,0394	0,0347	0,0332
\hat{D}	0,0002	0,0001	0,00004	0,00006	0,00009	0,00005	0,00006	0,00005	0,00002	0,00002

Таблица 4

α_2	0,2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\hat{P}	0,0337	0,0748	0,1248	0,1648	0,2135	0,2460	0,2788	0,3089	0,3397	0,3628
\hat{D}	0,00002	0,00008	0,00009	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001

Таблица 5

p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}	0,0820	0,0800	0,0780	0,0741	0,0741	0,0700	0,0641	0,0613	0,0575	0,0532
\hat{D}	0,0002	0,0001	0,0001	0,00009	0,0001	0,00009	0,0001	0,0001	0,0001	0,00007

Таблица 6

q	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}	0,0305	0,0318	0,0382	0,0415	0,0492	0,0539	0,0629	0,0708	0,0712	0,0747
\hat{D}	0,00005	0,00005	0,00007	0,00009	0,00009	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

Заключение

Анализ результатов, приведенных в табл. 1, 2, говорит о том, что имеется тенденция роста оценки \hat{P} при уменьшении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ и, наоборот, тенденция уменьшения оценки \hat{P} при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$. Последнее вполне естественно, так как при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ условия различимости двух состояний λ_1 и λ_2 улучшаются. Аналогичная тенденция роста оценки \hat{P} наблюдается в табл. 3, 4 при уменьшении разности $\alpha_1 - \alpha_2$, что объясняется лучшей различимостью состояний λ_1 и λ_2 процесса $\lambda(t)$ при увеличении разности $\alpha_1 - \alpha_2$ и соответственно приводит к уменьшению вероятности принятия ошибочного решения. Уменьшение вероятности \hat{P} хорошо прослеживается в табл. 5 и может быть объяснено тем, что при среднем значении вероятности перехода q , высокой частоте наступления событий в первом состоянии ($\lambda_1 = 5$) и низкой частоте наступления событий во втором состоянии ($\lambda_2 = 0,5$) время, проведенное процессом $\lambda(t)$ во втором состоянии, увеличивается с ростом вероятности p , что дает возможность большей различимости состояний и, следовательно, ведет к уменьшению вероятности ошибки. Обратная тенденция наблюдается в табл. 6. Здесь при среднем значении вероятности перехода p , низкой частоте наступления событий во втором состоянии и, наоборот, высокой частоте наступления событий в первом состоянии вероятность принятия ошибочного решения увеличивается с ростом q вследствие

уравнивания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в каждом из состояний, что приводит к ухудшению условий их различимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1964. V. 60. No. 4. P. 923–930.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. Нежелская Л.А. Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стохастического потока с инициативными событиями // Тез. докл. науч.-технич. конф. «Микросистема-91». Суздаль. М.: Всесоюзное общество информатики и вычислительной техники, 1991. С. 26–28.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного МС-потока событий // Сети связи с сети ЭВМ: тез. докл. Восьмой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1992. С. 33.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдении за МС-потокм // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20–32.
8. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
9. Нежелская Л.А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1998. С. 18–21.
10. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Соловьев А.А. Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 49–63.
13. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable died time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. No. 8. P. 1316–1326.
14. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
15. Голофастова М.Н., Нежелская Л.А. Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока событий // Материалы X Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Томск: Изд-во НТЛ, 2012. С. 83.
16. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.

Голофастова Мария Николаевна

Горцев Александр Михайлович

Томский государственный университет

E-mail: mashuliagol@mail.ru, gam@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 17 января 2013 г.

Golofastova Maria N., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University). The optimal state estimation of modulated synchronous twice stochastic flow of events.

Keywords: modulated synchronous flow, state of flow, posterior state probability, optimal state estimation.

One considers the modulated synchronous doubly stochastic flow of events, which rate is piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 > \lambda_2)$. The time when process $\lambda(t)$ is staying in i -th state has exponential probability distribution function with parameter $\alpha_i, i=1,2$. On the interval when $\lambda(t) = \lambda_i$ there is Poisson flow with rate $\lambda_i, i=1,2$. A state transition of process $\lambda(t)$ occurs in moment of Poisson flow event arrival, moreover, the passing from the first to the second state is realized with probability p , the passing from the second to the first state is realized with probability q .

A formula of posterior probability $w(\lambda_1 | t)$ is deduced. One concludes the algorithm of optimal state estimation of modulated synchronous flow using the criterion of posterior probability maximum, which provides minimum of wrong decision probability. The statistical experiment data and its analysis are given.