

Г.А. Медведев

**О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ. 5. ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДАФФИ – КАНА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)**

Исследуются модели Даффи – Кана, описывающие динамику краткосрочной процентной ставки в случае, когда состояние финансового рынка характеризуется не только уровнем самой процентной ставки, но и еще одним изменяющимся во времени параметром. Рассматриваются два случая. В первом в качестве дополнительной переменной состояния берется локальное по времени среднее значение краткосрочной процентной ставки. Во втором случае в качестве дополнительной переменной состояния принята мгновенная дисперсия процентной ставки. Двухфакторные модели строятся таким образом, чтобы они приводили к аффинной временной структуре доходности. Основное внимание уделяется свойствам кривой доходности и форвардной кривой, когда динамика краткосрочной процентной ставки описывается двухфакторными моделями Даффи – Кана.

**Ключевые слова:** *процентные ставки доходности, аффинная модель, функции временной структуры, модель Даффи – Кана.*

Напомним, что для  $n$ -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка  $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  следует одномерному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t)$$

с  $n$ -вектором дрейфа  $\mu(x)$ ,  $(n \times m)$ -матрицей волатильности  $\sigma(x)$ , и  $m$ -вектором  $W(t)$  независимых стандартных винеровских процессов [1]. При этом вектор дрейфа  $\mu(x)$  и матрица диффузии  $\sigma(x)\sigma(x)^T$  должны быть аффинными функциями, а рыночные цены риска такими, что  $\sigma(x)\lambda(x) - n$ -вектор с аффинными компонентами,

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i. \quad (1)$$

Здесь  $K$ ,  $\alpha$  и  $\beta_i - (n \times n)$ -матрицы;  $\theta$ ,  $\xi$  и  $\eta_i - n$ -векторы,  $x_i -$  компоненты вектора  $x$ . Эти свойства для  $n$ -факторной модели аффинной доходности приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции  $A(\tau)$  и компонент вектора  $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$ ,  $\tau -$  срок до погашения финансового актива:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, \quad A(0) = 0; \quad (2)$$

$$B'_i(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \quad (3)$$

В уравнении для  $B_i(\tau)$  символ  $K_i$  обозначает  $i$ -й столбец матрицы  $K$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Кривая доходности  $y(\tau, x)$  и форвардная кривая  $f(\tau, x)$  определяется через функции  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}.$$

**1. Двухфакторная модель «ставка – ее локальное среднее»**

Двухфакторная модель «ставка – ее локальное среднее» конструируется как расширение однофакторной модели Даффи – Кана [2] при помощи предположения о том, что уровень  $\theta$ , к которому возвращается процентная ставка  $r(t)$  (в однофакторной модели он совпадает с ее стационарным средним), рассматривается как стохастический процесс диффузионного типа  $\theta(t)$ , подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели, но с меньшей волатильностью  $D_\theta < D_r$ , меньшим коэффициентом скорости возвращения  $k_\theta < k_r$  и фиксированным уровнем возвращения  $\theta_0$  [3]:

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D_r \frac{r(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_r(t), \quad r(0) > x; \tag{4}$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_\theta(t), \quad \theta(0) > x. \tag{5}$$

Уравнения (2), (3) в этом случае приобретают вид

$$A'(\tau) = -\sigma_{11}\lambda_r x B_r(\tau) - (k_\theta\theta_0 + \sigma_{22}\lambda_\theta x)B_\theta(\tau) - x(\sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2 + \sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2)/2, \tag{6}$$

$$A(0) = 0;$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - (k_r + \sigma_{11}\lambda_r)B_r(\tau) - \sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2/2, \quad B_r(0) = 0; \tag{7}$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - (k_\theta + \sigma_{22}\lambda_\theta)B_\theta(\tau) - \sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2/2, \quad B_\theta(0) = 0. \tag{8}$$

Здесь  $\phi_r > 0$ ,  $\phi_\theta > 0$ ,  $\phi_r + \phi_\theta = 1$  и для краткости обозначено  $\sigma_{11} = \sqrt{2k_r D_r / (\theta_0 - x)}$ ,  $\sigma_{22} = \sqrt{2k_\theta D_\theta / (\theta_0 - x)}$ . Проблемы решения этих уравнений обсуждались в [3]. Функция  $A(\tau)$  находится из равенства (6) простым интегрированием, если найдены функции  $B_r(\tau)$  и  $B_\theta(\tau)$ . Уравнение (7) – это уравнение Риккати и его решение находится в виде

$$B_r(\tau) = \phi_r \left( \frac{\varepsilon_r}{e^{\varepsilon_r \tau} - 1} + V_r \right)^{-1}, \quad \varepsilon_r = \sqrt{(k_r + \lambda_r \sigma_{11})^2 + 2\sigma_{11}^2 \phi_r}, \quad V_r = (\varepsilon_r + k_r + \lambda_r \sigma_{11})/2.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon_r B_r}{\phi_r - V_r B_r} \right).$$

Основную трудность представляет решение уравнения (8), которое в аналитическом виде найти не удастся и его приходится решать численно или использовать приближенные решения, описанные в [3]. Здесь мы рассмотрим свойства кривых доходности и форвардных кривых. Согласно определению и уравнениям (6) – (8), кривые доходности  $y(\tau, r, \theta)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta)$  определяются через функции  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$  и  $B_\theta(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, r, \theta) = \frac{rB_r(\tau) + \theta B_\theta(\tau) - A(\tau)}{\frac{1}{\varepsilon} \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon_r B_r(\tau)}{\phi_r - V_r B_r(\tau)} \right)},$$

$$f(\tau, r, \theta) = r\phi_r + \theta\phi_\theta + (k_r(\theta - x) - (r - x)(k_r + \sigma_{11}\lambda_r))B_r(\tau) + (k_\theta(\theta_0 - x) - (\theta - x)(k_\theta + \sigma_{22}\lambda_\theta))B_\theta(\tau) - (r - x)\sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2/2 - (\theta - x)\sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2/2.$$

Их предельные свойства такие:

при  $\tau \rightarrow 0$  обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta) = f(0, r, \theta) = r\phi_r + \theta\phi_\theta;$$

при  $\tau \rightarrow +\infty$  обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, \theta) = f(\infty, r, \theta) = x + k_\theta(\theta_0 - x)B_\theta(\infty),$$

где

$$B_\theta(\infty) = \frac{1}{V_\theta} \left( \phi_\theta + \phi_r \frac{k_r}{V_r} \right), \quad V_\theta = (\varepsilon_\theta + k_\theta + \lambda_\theta \sigma_{22}) / 2,$$

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{(k_\theta + \lambda_\theta \sigma_{22})^2 + 2\sigma_{22}^2 (\phi_\theta + k_r B_r(\infty))}, \quad B_r(\infty) = \phi_r / V_r.$$

Как видно из этих формул, кривые доходности  $y(\tau, r, \theta)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta)$  можно рассматривать как сложные функции, зависящие от срока погашения  $\tau$  только через функции аффинной структуры  $B_r(\tau)$  и  $B_\theta(\tau)$ , т. е.  $y(\tau) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau))$  и  $f(\tau) \equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau))$ . Поскольку функции  $B_r(\tau)$  и  $B_\theta(\tau)$  принимают значения в конечных интервалах, свойства функций  $Y(B_r, B_\theta)$  и  $F(B_r, B_\theta)$  можно иллюстрировать наглядно с помощью графиков на всем интервале возможных значений сроков погашения  $\tau$ . При этом, поскольку эти функции связаны параметрически параметром  $\tau$ , то его можно исключить, выбрав значения одной из  $\{B_r, B_\theta\}$  в качестве независимой переменной. Если выбрать в качестве переменной функцию  $B_r \equiv B$ , тогда получим кривые доходности  $y(\tau, r, \theta)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta)$  в виде  $Y(B, B_\theta(B))$  и  $f(\tau) \equiv F(B, B_\theta(B))$ . На рис. 1 эти кривые представлены для набора параметров, соответствующих найденных Д. Аном и Б. Гао [4], приспособившим модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесячных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г.

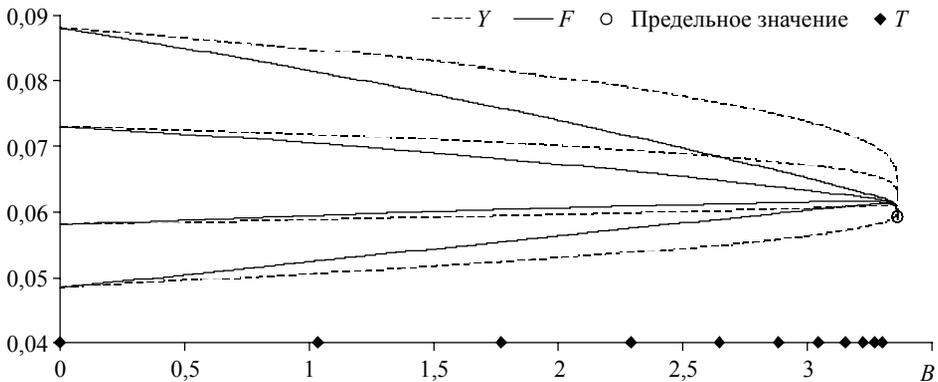


Рис. 1. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) для различных значений краткосрочной ставки  $r$ :  $r = x = 0,033$  (нижняя пара кривых);  $0,05; 0,075; 0,1$  (верхняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для всех кривых. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждые 2 года для первых 20 лет. Другие параметры принимали следующие значения:  $k_r = 0,1347$ ;  $k_\theta = 0,01347$ ;  $\theta_0 = 0,0762$ ;  $\theta = 0,07$ ;  $D_r = 0,002892$ ;  $D_\theta = 0,0002892$ ;  $x = 0,033149$ ;  $\lambda_r = 0,1$ ;  $\lambda_\theta = 0,1$ ;  $\phi_r = 0,6$ ;  $\phi_\theta = 0,4$

Заметим, что выбор  $B_r \equiv B$  в качестве независимой переменной не всегда удобен, так как при  $\phi_r \rightarrow 0$  длина интервала изменения переменной  $B \in (0, B_r(\infty))$  сужается до нуля, так как  $B_r(\infty) \rightarrow 0$  при  $\phi_r \rightarrow 0$ . Поэтому при преобразовании временной переменной  $\tau$  в качестве независимой переменной  $B$  можно брать независимое от модели преобразование  $B(\tau) = 1 - e^{-k\tau}$ , когда при изменении  $\tau$  в интервале  $(0, \infty)$  переменная  $B$  изменяется в интервале  $(0, 1)$ . Значение параметра  $k$  определяется в зависимости от того, начальный или конечный участок временной структуры является интересным. На рис. 2 представлены графики кривых доходности  $Y(B)$  и форвардных кривых  $F(B)$  с использованием такой переменной  $B$  для следующих случаев: 1) две пары кривых, характеризующих двухфакторную модель при весовых коэффициентах  $\{\phi_r = \phi_\theta = 0,5\}$  и  $\{\phi_r = 1, \phi_\theta = 0\}$ ; первая пара стартует из начальной точки  $Y(0) = F(0) = 0,06$  и стремится при  $\tau \rightarrow \infty$  к предельному значению  $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = 0,060$ , а вторая – из начальной точки  $Y(0) = F(0) = 0,05$

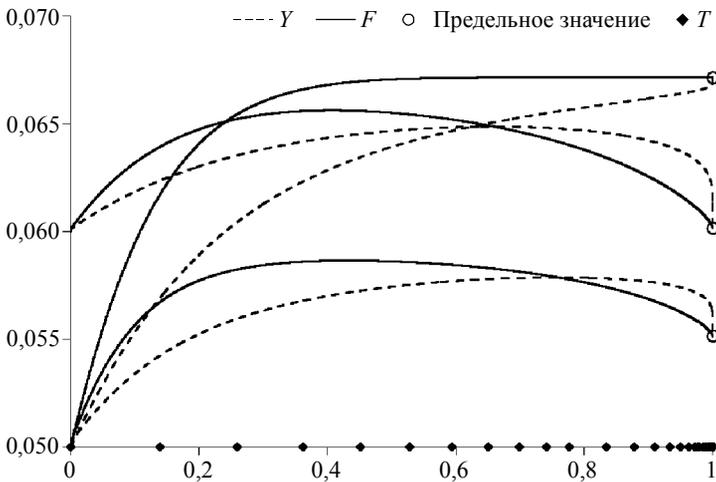


Рис. 2. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) для двух случаев двухфакторных моделей краткосрочной ставки и одного случая однофакторной модели. Круглый маркер показывает предельные значения. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждые 5 лет до 50 лет и далее через 10 лет. Процентная ставка  $r = 0,05$ ; параметр  $k = 0,03$ . Другие параметры принимали те же значения, что и для рис. 1

и стремится к предельному значению  $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = 0,055$ ; заметим, что вторую пару кривых можно было бы рассматривать как порождаемую однофакторной моделью, так как из-за значений весовых коэффициентов  $\{\phi_r = 1, \phi_\theta = 0\}$  краткосрочная ставка доходности  $y(r, \theta) = r\phi_r + \theta\phi_\theta = r$  зависит только от одной переменной  $r$ ; 2) поэтому для сравнения с кривыми  $Y(B)$  и  $F(B)$  в этом случае на рисунке приведена пара кривых, порождаемых однофакторной моделью с совпадающими параметрами уравнения (4); эта пара кривых стартует тоже из начальной точки  $Y(0) = F(0) = 0,05$ , но при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к другому предельному значению  $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = 0,067$ . Действительно, предельной точкой кривых однофакторной модели [2] является значение

$$Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = x + \frac{k_r}{V_r}(\theta_0 - x),$$

в то время как предельное значение кривых двухфакторной модели при весовых коэффициентах  $\{\phi_r=1, \phi_\theta=0\}$  вычисляется по формуле

$$Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = x + \frac{k_\theta k_r}{V_\theta V_r} (\theta_0 - x).$$

Поскольку имеют место неравенства  $k_\theta < V_\theta, k_r < V_r$ , предельные значения кривых однофакторной модели всегда больше предельных значений двухфакторной модели при принятых весовых коэффициентах.

Заметим, что вид кривых  $Y(B)$  и  $F(B)$  для выбранных параметров различается в зависимости от количества факторов. Для однофакторной модели кривые монотонно возрастают и для любых сроков погашения форвардная кривая  $F(B)$  выше кривой доходности  $Y(B)$ , в то время как для двухфакторной модели кривые имеют максимумы, причем для малых сроков погашения форвардная кривая  $F(B)$  выше кривой доходности  $Y(B)$ , а для больших сроков погашения – наоборот, кривая доходности  $Y(B)$  лежит выше форвардной кривой  $F(B)$ .

## 2. Двухфакторная модель «ставка – ее мгновенная дисперсия»

В двухфакторной модели с переменными состояниями краткосрочной ставкой  $r$  и мгновенной дисперсией  $D$  краткосрочной ставки процентная ставка аффинной доходности до погашения (кривая доходности) и форвардная процентная ставка определяются формулами

$$y(\tau, r, D) = -\ln P(\tau, r, D)/\tau = [rB_r(\tau) + DB_D(\tau) - A(\tau)]/\tau;$$

$$f(\tau, r, D) = r dB_r(\tau)/d\tau + D dB_D(\tau)/d\tau - dA(\tau)/d\tau.$$

По экономическому смыслу доходность до погашения растет с увеличением краткосрочной ставки  $r$  и падает с увеличением дисперсии краткосрочной ставки  $D$ . Последнее не является очевидным. Поэтому продемонстрируем влияние изменения дисперсии  $D$  на кривые доходностей  $Y(B)$  и форвардные кривые  $F(B)$  на примере однофакторной модели Даффи – Кана, рассмотренной ранее в [2]. Кривые  $Y(B)$  и  $F(B)$  стартуют при  $B = 0$  ( $\tau = 0$ ) из точки  $Y(0) = F(0) = r$  (будем называть ее исходной точкой). Заметим, что положение исходной точки не зависит от величины дисперсии  $D$  и при ее изменении остается неизменной. С увеличением срока до погашения  $\tau$  кривые сначала расходятся, но затем при  $\tau \rightarrow +\infty$  стремятся к одному и тому же пределу (назовем его предельной точкой)  $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = \frac{k}{V}\theta + \left(1 - \frac{k}{V}\right)x$ . При этом  $B(\infty) = V^{-1}$ . Явное представление отношения  $k/V$  имеет

$$\text{вид } \frac{k}{V} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\left( \frac{k}{D}(\theta - x) + \lambda \sqrt{\frac{2k}{D}} \right)^2 + \frac{4k(\theta - x)}{D}} - \left( \frac{k}{D}(\theta - x) + \lambda \sqrt{\frac{2k}{D}} \right) \right). \text{ При малых } D$$

это выражение может быть записано в виде  $\frac{k}{V} = \frac{k(\theta - x)}{k(\theta - x) + \lambda \sqrt{2kD}} + O(D)$ . Таким

образом, с увеличением дисперсии  $D$  параметр  $k/V$  монотонно уменьшается от  $k/V = 1$  при  $D = 0$  до  $k/V = 0$  при  $D \rightarrow +\infty$ . Следовательно, предельная точка с увеличением дисперсии  $D$  монотонно уменьшается от  $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = \theta$  при  $D = 0$  до нижней границы процентной ставки  $x$  при  $D \rightarrow +\infty$ . Предельное значение дюрации процентной ставки  $B(\infty)$  также уменьшается с ростом дисперсии  $D$  от  $B(\infty) = k^{-1}$  при  $D = 0$  до 0 при  $D \rightarrow +\infty$ . Здесь уместно заметить, что при  $D \rightarrow 0$

аналитические выражения для кривых  $Y(B)$  и  $F(B)$  упрощаются:

$$Y(B) \rightarrow \theta + (\theta - r)kB / \ln(1 - kB), \quad F(B) \rightarrow r + (\theta - r)kB,$$

$$B = B(\tau) \rightarrow (1 - \exp(-k\tau)) / k, \quad B \in (0, k^{-1}).$$

Ввиду справедливости неравенства  $z > 1 + z / \ln(1 - z)$  для  $z \in (0, 1)$  при малых дисперсиях форвардная ставка  $F(B)$  для любых  $B \in (0, k^{-1})$  больше доходности до погашения  $Y(B)$ , если  $\theta > r$ . При  $\theta < r$  справедливо обратное. Для произвольных  $D$  форвардную кривую  $F(B)$  можно представить в форме с явной зависимостью от  $D$  как

$$F(B) = r + (\theta - r)kB - \frac{r - x}{\theta - x} (\lambda \sqrt{2kD} + 2kDB).$$

Отсюда видно, что с ростом  $D$  форвардная ставка уменьшается на всем интервале изменения  $B$ . Аналогично ведет себя кривая доходности  $Y(B)$ . На рис. 2 представлено семейство пар кривых  $Y(B)$  и  $F(B)$  для различных значений стационарной дисперсии  $D$ , иллюстрирующее зависимость доходности от дисперсии.

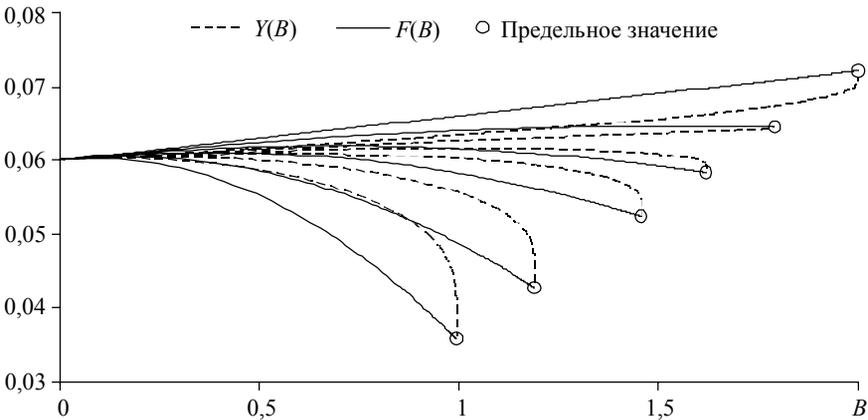


Рис. 3. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) для однофакторной модели Даффи – Кана при различных значениях дисперсии  $D$  краткосрочной ставки:  $D = 0$  (верхняя пара кривых); 0,25; 0,375; 0,5; 0,75; 1,0 (нижняя пара кривых). Другие параметры принимали следующие значения:  $k = 0,5$ ;  $\theta = 0,0721$ ;  $r = 0,06$ ;  $x = 0$ ;  $\lambda = 0,01$ . Круглые маркеры показывают предельные значения кривых при  $B \rightarrow B(\infty)$ , т.е. при  $\tau \rightarrow +\infty$  (для разных  $D$  они различные)

Этот анализ показывает, что доходности должны уменьшаться с ростом дисперсии. Поэтому функция временной структуры  $B_D(\tau)$  в двухфакторной аффинной модели доходности может принимать только отрицательные значения для  $\tau > 0$ . Чтобы это имело место, весовой коэффициент  $\phi_D$  должен быть отрицательным.

Когда в качестве второй переменной состояния выбрана мгновенная дисперсия краткосрочной процентной ставки, уравнения двухфакторной модели переменных состояния имеют вид [3]

$$dr(t) = k_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \tag{9}$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x}{V - x}} dW_D(t), \quad D(0) > x \geq 0. \tag{10}$$

Здесь  $x$  – нижняя граница для дисперсии  $D$  процентной ставки  $r$ ;  $V$  – стационарное среднее процесса дисперсии  $D(t)$ , а  $S$  – стационарная дисперсия процесса дисперсии  $D(t)$ . Для удобства записи в дальнейшем изложении удобно ввести обозначение  $\delta = k_D S / (V - x)$ .

Однако в этом случае значение кривых  $y(\tau, r, D)$  и  $f(\tau, r, D)$  в исходной точке, с экономической точки зрения, безусловно, положительное, определяется равенством  $y(0, r, D) = f(0, r, D) = r\phi_r + D\phi_D$ , где  $\phi_D$ , как указано выше, из экономических соображений должно быть отрицательным. Поэтому для того чтобы описанная модель с фиксированными весовыми коэффициентами  $\{\phi_r, \phi_D\}$  имела экономический смысл, должно выполняться неравенство  $r\phi_r + D\phi_D > 0$ , т.е.  $D \equiv D(0) < r\phi_r / |\phi_D|$ . Вместе с тем процесс  $D(t)$ , как это следует из уравнения (10), является стационарным диффузионным процессом «с квадратным корнем» и имеет сдвинутое распределение гамма с параметром масштаба  $S/(V - x)$ , параметром формы  $(V - x)^2/S$  и параметром сдвига  $x$ . Поэтому с положительной вероятностью указанное неравенство в описанной модели будет нарушаться. Для того чтобы эта модель имела экономический смысл с вероятностью единица, необходимо установить следующие весовые коэффициенты модели  $\{\phi_r=1, \phi_D=0\}$ . В этом случае краткосрочная ставка доходности в исходной точке определяется только процентной ставкой  $r$ :  $y(r, D) = r\phi_r + D\phi_D = r$ .

Уравнения для функций временной структуры  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  в этом случае имеют вид

$$A'(\tau) = -k_r \theta B_r(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D x \delta) B_D(\tau) - \delta x B_D(\tau)^2; \quad (11)$$

$$B_r'(\tau) = 1 - k_r B_r(\tau), \quad B_r(0) = 0, \quad B_r(\tau) = (1 - e^{-k_r \tau}) / k_r; \quad (12)$$

$$B_D'(\tau) = - (k_D + 2\lambda_D \delta) B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, \quad B_D(0) = 0. \quad (13)$$

Функция  $A(\tau)$  по-прежнему находится через  $B_r(\tau)$  и  $B_D(\tau)$ . Функция  $B_r(\tau)$  легко находится в простом виде, но функция  $B_D(\tau)$ , к сожалению, определяется уравнением Риккати с переменным коэффициентом и не может быть выражена в аналитическом виде. При  $\tau \rightarrow +\infty$  функции  $B_r(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  стремятся к пределам

$$B_r(\infty) = 1/k_r, \quad B_D(\infty) = \frac{-(k_D + 2\lambda_D \delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r + 1/k_r)}}{2\delta}.$$

Заметим, что предельное значение  $B_D(\infty)$  принимает вещественные значения только в случае, когда параметры модели удовлетворяют неравенству

$$(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 \geq 4\delta(2\lambda_r + 1/k_r). \quad (14)$$

Если это неравенство не удовлетворяется, правая часть дифференциального уравнения (13) для функции  $B_D(\tau)$  ни для каких  $\tau$  не обращается в нуль, являясь все время отрицательной. А это приводит к тому, что функция  $B_D(\tau)$  неограниченно убывает с ростом  $\tau$ , в связи с чем при достаточно больших  $\tau$  кривые доходности и форвардные кривые становятся отрицательными, что противоречит экономическому смыслу этих кривых. Таким образом, неравенство (14) определяет область возможных значений параметра  $\delta = k_D S / (V - x)$ , определяющего волатильность в уравнении (10), когда имеет смысл использовать рассматриваемую двухфакторную модель динамики процентной ставки. В явной форме это ограничение имеет вид

$$\delta \leq \frac{2\lambda_r + 1/k_r - k_D \lambda_D - \sqrt{(2\lambda_r + 1/k_r)^2 - 2(2\lambda_r + 1/k_r)k_D \lambda_D}}{2\lambda_D^2}. \quad (15)$$

Кривые доходности  $y(\tau, r, D)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, D)$  определяются через функции  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, r, D) \equiv Y(B_r(\tau), B_D(\tau)) = k_r[A(\tau) - rB_r(\tau) - DB_D(\tau)]/\ln[1 - k_r B_r(\tau)];$$

$$f(\tau, r, D) \equiv F(B_r(\tau), B_D(\tau)) = r - (r - \theta + 2\lambda_r D)k_r B_r(\tau) - [(k_D(D - V) + 2\lambda_D \delta(D - x))B_D(\tau) - k_r DB_r(\tau)^2 - \delta(D - x)B_D(\tau)^2].$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при  $\tau \rightarrow 0$  обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, D) = f(0, r, D) = r;$$

при  $\tau \rightarrow +\infty$  обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, D) = f(\infty, r, D) = \theta + k_D(V - x)B_D(\infty) - x(2\lambda_r + 1/k_r).$$

Для того чтобы предельные доходности были положительными, должно выполняться неравенство

$$\theta - x(2\lambda_r + 1/k_r) > -k_D(V - x)B_D(\infty),$$

или 
$$\frac{\theta - x(2\lambda_r + 1/k_r)}{2k_D(2\lambda_r + 1/k_r)} > \frac{V - x}{(k_D + 2\lambda_D \delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r + 1/k_r)}}. \quad (16)$$

Это неравенство следует рассматривать как условие, накладываемое на другие параметры уравнения (10), чтобы обеспечить разумные результаты для долгосрочных доходностей. В этом случае в качестве варьируемого параметра модели можно выбрать стационарное среднее  $V$  процесса  $D(t)$ . Когда при описании динамики процентной ставки используется нейтральная к риску вероятностная мера ( $\lambda_r = 0, \lambda_D = 0$ ), неравенства (15) и (16) существенно упрощаются:

$$\delta \leq k_r k_D^2 / 4, \quad V < x + (k_r \theta - x) \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\delta}{k_r k_D^2}} \right).$$

На рис. 4 приведены графики функций  $Y(B_r(\tau), B_D(\tau))$  и  $F(B_r(\tau), B_D(\tau))$  от аргумента  $B = B_r(\tau)$  с учетом того, что  $\tau = -\ln[1 - k_r B]/k_r$  и  $B_D(\tau) = B_D(-\ln[1 - k_r B]/k_r)$ .

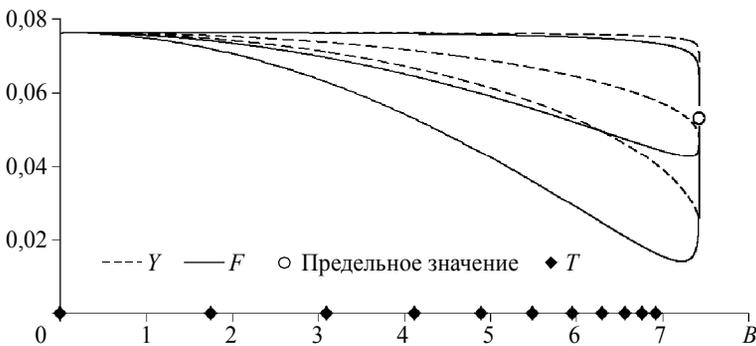


Рис. 4. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) для различных значений дисперсий  $D$ : 0,01 (нижняя пара кривых); 0,005; 0 (верхняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для всех кривых. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждые 2 года для первых 20 лет. Другие параметры принимали следующие значения:  $k_r = 0,1347$ ;  $k_D = 0,01347$ ;  $r = \theta = 0,0762$ ;  $V = 0,002892$ ;  $x = 0,0001$ ;  $S = 1,88 \times 10^{-7}$ ;  $\lambda_r = 0,1$ ;  $\lambda_D = 0,01$ .  $B_{\max} = B_r(\infty) = 7,424$

Когда весовые коэффициенты модели установлены так, что  $\phi_r=1$ ,  $\phi_D=0$ , краткосрочная ставка доходности в исходной точке  $y(r, D) = r\phi_r + D\phi_D = r$  определяется только процентной ставкой  $r$ , а модель становится похожей на однофакторную. Но отличия от однофакторной модели при этом сохраняются, так как даже при  $\phi_D=0$  функция временной структуры  $B_D(\tau)$  не равна нулю. На рис. 5 это различие иллюстрируется графиками.

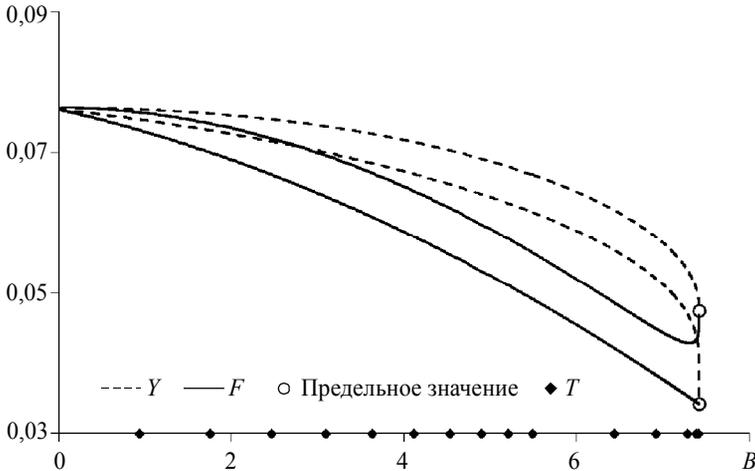


Рис. 5. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) для двухфакторной модели (верхняя пара кривых) при  $\{\phi_r=1, \phi_D=0\}$  и однофакторной модели (нижняя пара кривых). Кружный маркер показывает предельные значения (0,0475 для двухфакторной и 0,0343 для однофакторной модели). Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждый год до 10 лет и далее через 5 лет. Процентная ставка  $r = \theta = 0,0762$ ;  $B_{\max} = B_r(\infty) = 7,4$ . Другие параметры принимали те же значения, что и для рис. 2

Выполнение неравенств (15) и (16) гарантирует, что параметры модели таковы, что предельные значения кривых доходности и форвардных кривых существуют и неотрицательны. Однако на вид этих кривых существенное влияние оказывают и исходные значения переменных состояния  $r = r(t)$  и  $D = D(t)$  в дату определения временной структуры. При этом возможны такие значения  $D$ , которые приводят к отрицательным значениям доходностей для некоторых  $\tau$ , что противоречит экономическому смыслу. На рис. 6 этот случай иллюстрируется графиками. Для того чтобы этого не случилось, исходная дисперсия  $D$  процентной ставки должна быть достаточно мала. Например, при параметрах модели, для которых рассчитывались кривые рис. 6, доходности неотрицательны, если исходная дисперсия  $D$  удовлетворяет неравенству  $D < 0,01246$ . С другой стороны, процесс  $D(t)$ , порождаемый уравнением (10), имеет распределение гамма и с положительной вероятностью может принимать значения, превышающие любое конечное число. Для принятых значений параметров рассматриваемой двухфакторной модели выборочные значения процесса  $D(t)$  имеют распределение гамма с параметром формы  $(V - x)^2/S = 41,42$ ; параметром масштаба  $S/(V - x) = 0,0000674$  и параметром сдвига  $x = 0,0001$ . Это означает, что с вероятностью 0,999987 выборочное значение процесса  $D(t)$  не превышает величину 0,005. Так что вероятность нарушения неравенства  $D < 0,01246$  практически нулевая.

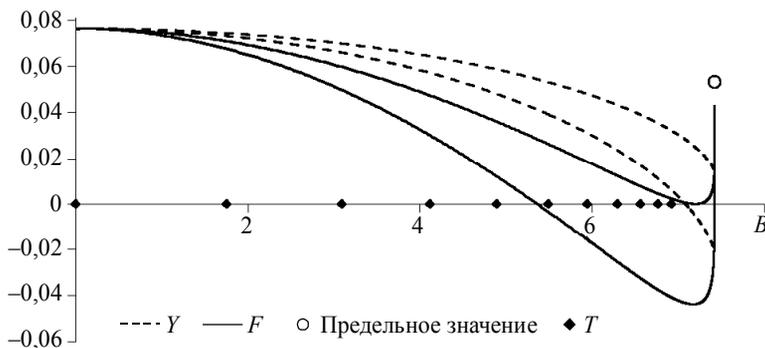


Рис. 6. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) для значений дисперсий  $D$ : 0,02 (нижняя пара кривых); 0,01246 (верхняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для всех кривых. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждые 2 года для первых 20 лет. Другие параметры принимали те же значения, что и для рис. 4

### Заключение

Однофакторная модель Даффи – Кана была расширена на двухфакторный случай [3] дополнением второй переменной состояния. В качестве версий дополнительных переменных рассматривались локальный (по времени) средний уровень процентной ставки или ее мгновенная дисперсия. Получающиеся двухфакторные модели сформулированы так, чтобы обеспечить аффинную временную структуру доходности. Основное внимание уделяется свойствам кривой доходности и форвардной кривой, когда динамика краткосрочной процентной ставки описывается двухфакторными моделями Даффи – Кана. Поскольку функции временной структуры для дополнительных переменных в аналитическом виде не могут быть получены, вид кривых в целом (для всего интервала изменения времени) анализируется с помощью численных расчетов, хотя свойства кривых на концах интервала выясняются аналитически. Для модели «ставка – ее локальное среднее» оказалось, что предельные свойства долгосрочных доходностей определяются только свойствами дополнительной переменной – локальным средним  $\theta$  процентной ставки  $r$ . Для модели «ставка – ее мгновенная дисперсия» выяснилось, что эта модель имеет экономический смысл только тогда, когда весовой коэффициент  $\phi_D$  мгновенной дисперсии при определении краткосрочной ставки доходности равен нулю. Кроме того, существуют ограничения для значений параметров модели, выполнение которых необходимо, чтобы модель имела экономический смысл.

Показано также, что при некоторых исходных значениях дисперсии процентной ставки доходности могут становиться отрицательными, что также противоречит экономическому смыслу. Однако для реальных процессов динамики процентных ставок вероятность получения отрицательных доходностей в рамках рассмотренных моделей может оказаться незначительной.

Сравнение кривых доходности и форвардных кривых для однофакторной и двухфакторных моделей показывает, что при принятых параметрах эти кривые заметно различаются. Поскольку значения весовых коэффициентов  $\{\phi\}$  существенно влияют на поведение кривых доходности и форвардных кривых, они должны оцениваться наряду с рыночными параметрами цены риска  $\{\lambda\}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 102–111.
2. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи – Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3(20). С. 71–80.
3. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 4. Двухфакторные модели Даффи – Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4(21). С. 89–99.
4. *Ahn D.-H., Gao B.* A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12. No. 4. P. 721–762.

*Медведев Геннадий Алексеевич*

Белорусский государственный университет

E-mail: MedvedevGA@cosmostv.by

Поступила в редакцию 29 августа 2012 г.

*Medvedev Gennady A.* (Belarusian State University. Minsk). **On term structure of yield rates. 5. The Duffie – Kan two factor model (continuation).**

Keywords: yield interest rates, affine model, yield curve, forward curve, Duffie–Kan two factor model.

Models of Duffie – Kan, describing dynamics of a short-term interest rate in a case when the state of the financial market is characterized not only by level of the interest rate, but also one more parameter changing in time are investigated. Two cases are considered. In the first in quality of an additional state variable the local on time average value of a short-term interest rate is taken. In the second case as an additional state variable the instant variance of an interest rate is accepted. Two-factor models are under construction so that they led to affine term structure of yield. The main attention is given to properties of yield curve and a forward curve when dynamics of a short-term interest rate is described by two-factor models of Duffie – Kan. Because functions of term structure for additional variables in a closed form can't be received, the type of curves as a whole (for entire interval of change of time) is analyzed by means of numerical calculations though properties of curves on the ends of an interval become clear analytically. For model «a rate – its local average» it is appeared that limiting properties of long-term yield are defined only by properties of an additional variable – local average of interest rates. For model «a rate – its instant variance» it became clear that this model has economic sense only when the weight factor of instant variance at determination of a short-term yield rate is equal to zero. Comparison of yield curves and forward curves for one-factor model and two-factor models shows that at the accepted parameters these curves considerably differ. As values of weight factors essentially influence behavior of yield curves and forward curves, they should be estimated along with market parameters of the price of risk.