

УДК 519.237

Т.В. Самаль

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ СТРУКТУР ДОХОДНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛИ

Рассматриваются математические модели форвардных ставок и их изменение в зависимости от роста сроков погашения, лежащих в основе облигаций, на примере двухфакторной и трехфакторной моделей аффинной временной структуры. Проводится сравнительное численное исследование поведения форвардной кривой и кривой доходности в одно-, двух- и трехфакторных моделях.

Ключевые слова: *временная структура процентных ставок, стохастическое дифференциальное уравнение, кривая доходности, форвардные ставки, факторные модели, форвардная кривая.*

В моделях процентных ставок доходности обычно краткосрочная процентная ставка (КПС) является единственной переменной состояния. Такие модели дают возможность получить аналитические решения и обеспечивают относительно простые вычисления. Однако однофакторные модели имеют один недостаток: вся временная структура управляется единственным значением КПС, зафиксированным в начальный момент построения временной структуры, что кажется экономически не очень разумным. Цель настоящей статьи – сравнительный численный анализ временных структур доходности для моделей с числом факторов 1, 2 и 3.

1. Аффинные модели временной структуры

Наиболее популярными являются аффинные временные структуры ставок доходности, которые позволяют получать решения в аналитическом виде. В этом случае на рынке, состояние которого в текущий момент времени t характеризуется вектором факторов x , цена актива P со сроком погашения τ определяется формулой $P(\tau, x) = \exp\{A(\tau) - x^T B(\tau)\}$, где скалярная функция $A(\tau)$ и вектор $B(\tau)$ называются функциями временной структуры. Обычно интересуются процентной ставкой доходности до погашения $y(\tau, x)$ или форвардной процентной ставкой $f(\tau, x)$, которые вычисляются по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}. \quad (1)$$

В этих формулах τ – скалярная переменная, а x – вектор параметров. Величины y и f , рассматриваемые как функции переменной τ , называются соответственно кривой доходности и форвардной кривой. Экономический смысл требует, чтобы доходность до погашения $y(\tau, x)$ при $\tau \rightarrow 0$ сходилась к значению спот-ставки r , называемой также безрисковой или краткосрочной ставкой, в текущий момент времени t , т. е. при $\tau \rightarrow 0$ имеет место предельное соотношение $y(\tau, x) \rightarrow x^T \phi = r$, где компоненты вектора ϕ определяются экономическим смыслом факторов. Когда краткосрочная ставка r используется в качестве одного из факторов, вектор ϕ имеет только одну отличную от нуля компоненту, соответствующую ставке r и равную 1.

В стохастической постановке вектор факторов x является реализацией в момент определения временной структуры векторного случайного процесса $X(t)$, порождаемого системой стохастических дифференциальных уравнений, в финансовом анализе называемой моделью процентных ставок

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad (2)$$

где вектор $\mu(x)$ и матрица $\sigma(x)$ – соответственно функции дрейфа и волатильности, а $W(t)$ – вектор независимых винеровских процессов.

Оказывается, что функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются только функциями дрейфа и волатильности $\mu(x)$, $\sigma(x)$ и рыночными ценами риска, составляющими вектор $\lambda(x)$. Согласно арбитражной теории, аффинная модель временной структуры получается только тогда, когда эти функции связаны следующими соотношениями (здесь предполагается, что векторы $X(t)$ и $W(t)$ имеют одинаковую размерность n) [1]:

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i. \quad (3)$$

Здесь K , α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; θ , ξ и η_i – n -векторы, x_i – компоненты вектора x . Тогда вычисление функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$ сводится к решению следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \\ B_i'(\tau) &= \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$. Аналитически решить эту систему уравнений для $n > 1$ не удастся, так как она является нелинейной системой уравнений типа Риккати. Поэтому для сравнительного анализа кривых доходности и форвардных кривых приходится использовать численный анализ.

Срок до погашения τ может принимать значения из интервала $(0, \infty)$, поэтому представить поведение кривой доходности во всей области изменения переменной целиком не представляется возможным. Вместе с тем, из свойств уравнений для $B(\tau)$ выясняется, что компоненты этого вектора – гладкие монотонные функции, стартующие из нуля при $\tau = 0$ и имеющие конечный предел при $\tau \rightarrow \infty$. В связи с этим представляется предпочтительным вместо временной переменной τ использовать одну из компонент вектора $B(\tau)$, например соответствующую основному фактору – краткосрочной процентной ставке r , $B_r(\tau) \in (0, B_r(\infty))$, $B_r(\infty) < \infty$. Заметим, что $B_r(\tau)$ имеет размерность времени и в финансовом анализе называется «продолжительность» (*duration*) влияния спот-ставки на цену актива». Ввиду монотонности $B_r(\tau)$ такая замена временной переменной не влияет на взаимные свойства кривой доходности и форвардной кривой. Преимущество такой замены заключается в том, что на всем интервале времени кривые доходности в виде графика представить невозможно из-за неограниченности интервала времени, $\tau \in (0, \infty)$, в то время как этому неограниченному интервалу соответствует конечный интервал изменения дюрации B_r . При такой замене получим следующее соответствие $y(\tau, x) = Y(B_r(\tau), x)$, $f(\tau, x) = F(B_r(\tau), x)$. При этом можно ожидать, что свойства функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ могут оказаться проще. Другими словами, введем новую временную переменную преобразованием $s = B_r(\tau)$ и будем рассматривать вместо кривой доходности $\{y(\tau, x), \tau \in (0, \infty)\}$, заданной на неограниченном интервале, функцию $\{Y(s, x), s \in (0, B_r(\infty))\}$, определенную на конечном интервале.

Поскольку обе эти функции несут одну и ту же информацию о значениях доходности до погашения, функцию $Y(s, x)$ также будем называть кривой доходности. Аналогично поступим с форвардной кривой $\{f(\tau, x), \tau \in (0, \infty)\}$, вводя функцию $\{F(s, x), s \in (0, B_r(\infty))\}$. Поскольку здесь x – это вектор факторов, фиксированный в момент построения временной структуры, в дальнейшем мы рассматриваем его как параметр и для краткости в обозначениях функций Y и F опускаем. Можно показать, что обе кривые $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ при $\tau = 0$ стартуют из одной точки $y(0, x) = f(0, x) = r$ и при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к одному и тому же пределу, не зависящему от x . Естественно, такие же свойства имеют функции $Y(s)$ и $F(s)$.

2. Факторные модели временной структуры

Для получения конкретных результатов примем, что модель процентных ставок (2) базируется на модели Кокса – Ингерсолла – Росса (модель CIR), которая порождает процессы с неотрицательными значениями и поэтому часто используется для моделирования процентных ставок. В этом случае параметры модели, определяемые соотношениями (3), задаются следующим образом.

Для однофакторной модели CIR состояние определяется только спот-ставкой $x = r$. Функции дрейфа и волатильности скалярные и имеют вид $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma(x) = \sigma\sqrt{x}$. Кривые $Y(s)$ и $F(s)$ для этого случая находятся в явном аналитическом виде и подробно исследованы в [2].

Состояние для двухфакторной модели определим вектором $x = (x_1, x_2) = (r, l)$, где l – локальное среднее спот-ставки r . Уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} dr(t) &= k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1\sqrt{r(t)}dW_1(t), \\ dl(t) &= k_2(\theta - l(t)) + \sigma_2\sqrt{r(t)}dW_2(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения функций аффинной временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в двухфакторной модели можно вывести следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= -\theta k_2 B_2(\tau), \\ B_1'(\tau) &= 1 - (k_1(1 + \lambda_1 \sigma_1)B_1(\tau) + k_2 \lambda_2 \sigma_2 B_2(\tau)) - \frac{1}{2}(k_1 \sigma_1^2 B_1^2(\tau) + k_2 \sigma_2^2 B_2^2(\tau)), \\ B_2'(\tau) &= k_1 B_1(\tau) - k_2 B_2(\tau), \end{aligned} \quad (6)$$

с начальными условиями $A(0) = B_1(0) = B_2(0) = 0$. Ввиду нелинейности второго уравнения явный вид функций $A(\tau)$, $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ найти не удастся, но некоторые их свойства можно выяснить. Например, при $\tau \rightarrow \infty$ величины $k_1 B_1(\tau)$ и $k_2 B_2(\tau)$ имеют один и тот же предел, что позволяет определить предельные при $\tau \rightarrow \infty$ значения кривых доходности:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= f(\infty) = Y(\infty) = F(\infty) = \\ &= \theta \frac{\sqrt{(1 + \lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 \sigma_2)^2 + 2(\sigma_1^2/k_1 + \sigma_2^2/k_2)} - (1 + \lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 \sigma_2)}{\sigma_1^2/k_1 + \sigma_2^2/k_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

При переходе к переменной s преобразованием $s = B_1(\tau)$ или $\tau = \tau(s)$ функциям $A(\tau)$ и $B_2(\tau)$ будут соответствовать функции $a(s)$ и $b_2(s)$, и мы получим относительно функций $Y(s)$, $F(s)$, $a(s)$, $\tau(s)$ и $b_2(s)$ следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \tau(s)Y(s) &= rs + lb_2(s) - a(s), \quad \frac{d\tau(s)}{ds}F(s) = r + l \frac{db_2(s)}{ds} - \frac{da(s)}{ds}, \\ \frac{da(s)}{ds} &= -\theta k_2 b_2(s) \frac{d\tau(s)}{ds}, \quad \frac{db_2(s)}{ds} = \frac{d\tau(s)}{ds} [k_1 s - k_2 b_2(s)], \\ (1 - k_1(1 + \lambda_1 \sigma_1)s - k_2 \lambda_2 \sigma_2 b_2(s) - \frac{1}{2} k_1 \sigma_1^2 s^2 - \frac{1}{2} k_2 \sigma_2^2 b_2^2(s)) \frac{d\tau(s)}{ds} &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

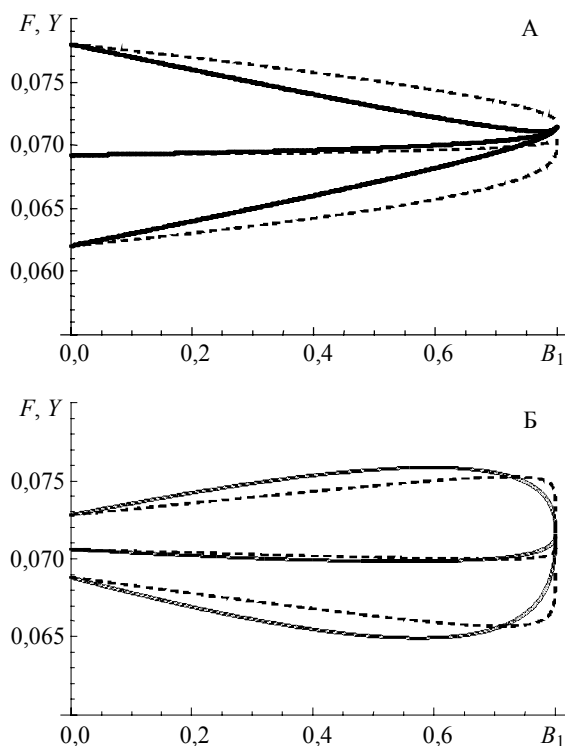


Рис. 1. Взаимное расположение форвардной кривой F (сплошная линия) и кривой доходности Y (пунктирная линия) при следующих значениях параметров: $\sigma_1 = 0,0667$; $\sigma_1 = 0,0067$; $\lambda_1 = 0,1$; $\lambda_2 = 0,05$; $k_1 = 1$; $k_2 = 0,4$; $\theta = 0,0721$; А) $r = \{0,06; 0,069; 0,08\}$; $l = 0,07$; Б) $r = 0,071$; $l = \{0,06; 0,069; 0,08\}$. При указанных значениях параметров $f(\infty) = y(\infty) = 0,0715645$.

Поскольку система не имеет решения в явном виде, исследовать ее решения можно лишь численными методами. Для численного решения должны быть заданы параметры модели k_1 , k_2 , θ , σ_1 , σ_2 , параметры рыночной цены риска λ_1 и λ_2 , а также исходные значения факторов r и l . Подробный анализ численных решений при изменении всего множества параметров здесь показать невозможно, поэтому были рассмотрены только решения для случая, когда первые семь параметров принимают фиксированные значения, обычно используемые в литературе для иллюстрации аналитических результатов. Здесь приведем только сведения о взаимном расположении форвардной кривой $F(s)$ и кривой доходности $Y(s)$ для различ-

ных исходных значений факторов r и l . Отметим, что эти кривые в зависимости от значений r и l оказываются, как правило, либо выпуклыми, либо вогнутыми. Вид кривых представлен на рис. 1.

Из рис. 1, А видно, что кривые доходности и форвардная при $\tau = 0$ выходят из одной точки $F(0) = Y(0) = r$ и с ростом s стремятся к одному и тому же пределу (7). При изменении параметра r можно проследить влияние спот-ставки на траекторию кривых. Если она больше θ , то кривые монотонно убывают к своему предельному значению, в противном случае – возрастают. Стоит также отметить, что форвардные кривые располагаются ниже кривых доходности в первом случае и выше – во втором.

На рис. 1, Б продемонстрировано взаимное расположение кривых при вариации параметра l , из рисунка можно сделать вывод, что при возрастании l кривые меняют направление вогнутости и пересекаются. Остальные свойства сохраняются. Подобным образом выясняется влияние других параметров модели на взаимное расположение кривых, однако из-за ограниченности объема статьи этот анализ здесь опускается.

Состояние трехфакторной модели определим вектором $x = (x_1, x_2, x_3) = (r, l, v)$, где l – локальное по времени среднее спот-ставки r , а v – ее локальная дисперсия. Существует много способов распространений модели CIR на трехмерный случай. Выберем чаще всего встречающийся подход – модель Чена [3]. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\begin{pmatrix} dr \\ dl \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l-r \\ \theta-l \\ V-v \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ dW_3 \end{pmatrix},$$

где θ и V – стационарные математические ожидания факторов l и v , $k_1, k_2, k_3, \sigma_2, \sigma_3$ – положительные константы; $W = (W_1, W_2, W_3)^T$ – вектор независимых процессов броуновского движения.

Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям для двухфакторной модели, при переходе к переменной s функциям $A(\tau)$, $B_2(\tau)$ и $B_3(\tau)$ будут соответствовать функции $a(s)$, $b_2(s)$ и $b_3(s)$, и мы получим относительно функций $Y(s)$, $F(s)$, $a(s)$, $\tau(s)$, $b_2(s)$ и $b_3(s)$ следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений для функций аффинной временной структуры вместе с уравнениями для кривой доходности и форвардной кривой:

$$Y(s) = \frac{rs + lb_2(s) + vb_3(s) - a(s)}{\tau(s)},$$

$$F(s) = r(1 - k_1s) + l \left(1 + k_1s - k_2b_2(s) - \frac{\sigma_2^2 b_2^2(s)}{2} \right) + \\ + v \left(1 - k_3b_3(s) - \frac{s^2}{2} - \frac{\sigma_3^2 b_3^2(s)}{2} \right) + k_2\theta b_2(s) + k_3Vb_3(s) + s(k_1 - k_2)\theta,$$

$$\frac{da(s)}{ds} = - \frac{k_2\theta b_2(s) + k_3Vb_3(s) + s(k_1 - k_2)\theta}{1 - k_1s}, \quad \frac{db_2(s)}{ds} = \frac{1 + k_1s - k_2b_2(s) - \frac{\sigma_2^2 b_2^2(s)}{2}}{1 - k_1s},$$

$$\frac{db_3(s)}{ds} = \frac{1 - k_3 b_3(s) - \frac{s^2}{2} - \frac{\sigma_3^2 b_3^2(s)}{2}}{1 - k_1 s}, \quad \frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{1}{1 - k_1 s}. \quad (9)$$

Из системы видно, что основной сложностью является определение функций $a(s)$, $b_2(s)$ и $b_3(s)$, которые находятся лишь численными методами. Таким образом, поведение форвардной кривой $F(s)$ и кривой доходности $Y(s)$ для трехфакторной модели Чена можно исследовать, только решая систему численно. Модель задается семью параметрами k_1 , k_2 , k_3 , θ , V , σ_2 , σ_3 и тремя фиксированными исходными значениями факторов r , l и v . Так что пространство параметров системы оказывается десятимерным. Ввиду сложности системы рассматривался безрисковый случай, когда рыночные цены риска равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Здесь приведем лишь сведения о том, как влияют на форму кривых $F(s)$ и $Y(s)$ значения факторов r и l (рис. 2).

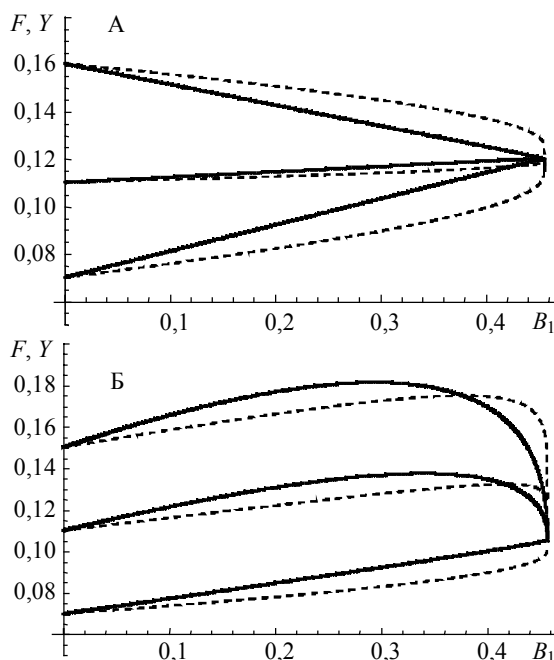


Рис. 2. Взаимное расположение форвардной кривой F (сплошная линия) и кривой доходности Y (пунктирная линия) при следующих значениях параметров: $k_1 = 2,19$; $k_2 = 0,0757$; $k_3 = 1,24$; $\theta = 0,0416$; $V = 0,000206$; $\sigma_2 = 0,0503$; $\sigma_3 = 0,0198$; А) $r = \{0,03; 0,07; 0,12\}$; $l = 0,04$; $v = 0,0002$; Б) $r = 0,03$; $l = \{0,04; 0,08; 0,12\}$; $v = 0,0002$

Поведение этих кривых аналогично их поведению в двумерном случае. Все кривые получались либо выпуклыми, либо вогнутыми. Как и ожидалось, оба графика выходят из одной точки и стремятся к одному предельному значению, которое при принятых значениях параметров равно 0,115707, при этом переменная s принимает значения в интервале $(0; 0,456621)$. Если r больше θ (рис. 2, А), то кривые монотонно убывают к своему предельному значению, если меньше – возрастают. Форвардные кривые располагаются ниже в первом случае и выше – во втором.

График на рис. 2, Б отражает влияние на поведение кривой доходности и форвардной кривой второго фактора l , имеющего интерпретацию локального математического ожидания КПС. Так же, как и в двухфакторной модели, с его ростом у кривых появляется еще одна точка пересечения. Другие параметры модели тоже оказывают существенное влияние на поведение кривых.

3. Сравнительный численный анализ факторных моделей

Представляет интерес выяснить, насколько сильно на поведение кривой доходности и форвардной кривой влияет количество используемых для их описания факторов. Результаты такого исследования приведены на рис. 3 с описанием численного значения параметров для каждой модели. Чтобы графики кривых соответствовали реальным ситуациям, были взяты значения оценок общих параметров,

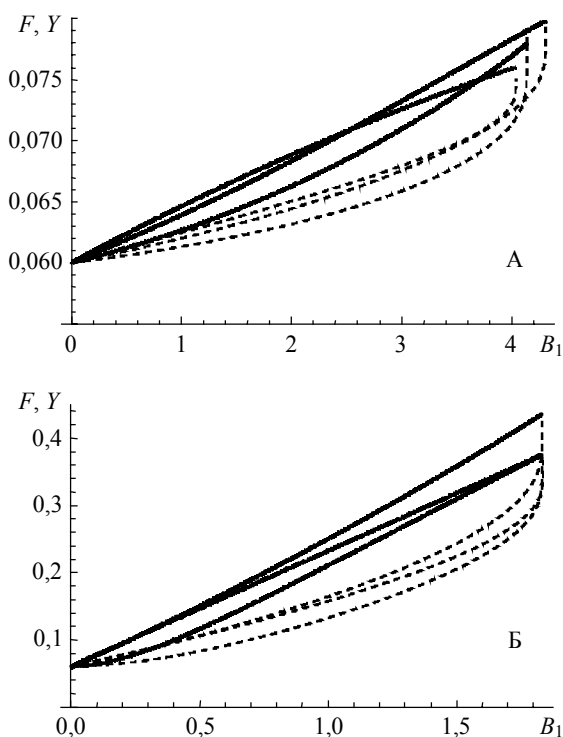


Рис. 3. Взаимное расположение форвардной кривой F (сплошная линия) и кривой доходности Y (пунктирная линия) при указанных выше значениях параметров. А) Однофакторная модель: $r = 0,06$; $k = 0,2339$; $\theta = 0,0808$; $\sigma = 0,0854$; $D = 0,00126$. Двухфакторная модель: $\sigma_1 = 0,854$; $\sigma_2 = 0,0854$; $k_1 = 0,2339$; $k_2 = 0,4$; $l = 0,07$; $r = 0,06$; $\theta = 0,0808$. Трехфакторная модель: $k_1 = 0,2339$; $k_2 = 0,45$; $k_3 = 1,24$; $\theta = 0,08$; $V = 0,000206$; $\sigma_2 = 0,854$; $\sigma_3 = 0,0854$; $r = 0,24$; $l = 0,34$; $v = 0,002$. Б) Однофакторная модель: $r = 0,06$; $k = 0,544$; $\theta = 0,374$; $\sigma = 0,023$; $\lambda = -0,36$; $D = 0,00018$. Двухфакторная модель: $\sigma_1 = 0,023$; $\sigma_2 = 0,023$; $\lambda_1 = -0,036$; $\lambda_2 = 0,05$; $k_1 = 0,544$; $k_2 = 4$; $l = 0,07$; $r = 0,06$; $\theta = 0,374$. Трехфакторная модель: $k_1 = 0,544$; $k_2 = 1$; $k_3 = 1,24$; $\theta = 0,374$; $V = 0,000206$; $\sigma_2 = 0,023$; $\sigma_3 = 0,19824$; $r = 0,024$; $l = 0,034$; $v = 0,002$

найденные CKLS [4] (рис. 3, А), по выборке 306 наблюдений годовой доходности одномесячных векселей Казначейства США с июня 1964 по декабрь 1989 г., а также найденные Duffie and Singleton [5] (рис. 3, Б), использовавших еженедельные данные о ценах облигаций Казначейства США с 4 января 1988 г. по 28 октября 1994 г.

Заключение

Из приведенных графических данных можно сделать заключение, что на вид графиков, а соответственно и на поведение форвардных ставок и ставок доходности в зависимости от срока до погашения, в большей степени оказывают влияние значения параметров моделей, а не количество факторов. В связи с этим может возникнуть вопрос о целесообразности исследования модели с большим числом факторов, чем три, поскольку отличия поведения форвардных ставок и ставок доходности незначительные, а структура модели и особенно ее численный анализ значительно усложняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 102–111.
2. *Медведев Г.А.* Стохастические процессы финансовой математики. Минск: БГУ. 2005.
3. *Chen L.* A Three Factor of the Affine Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives. N.Y.: Blackwell Publishers, 1996.
4. *Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.A., and Sanders A.S.* An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate // J. Finance. 1992. V. 47. P. 1209–1227.
5. *Duffie D., Singleton K.J.* An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields // J. Finance. 1997. V. 52. P. 1287–1321.

Самаль Татьяна

Белорусский государственный университет (г. Минск)

E-mail: solesytto@gmail.com

Поступила в редакцию 24 января 2013 г.

Samal Tatiana V. (Belarus State University. Minsk). **Comparative numerical analysis of temporal structure yield, depending on the dimension of the model.**

Keywords: term structure of interest rates, the stochastic differential equation, the yield curve, forward rates, factor models, the forward curve.

The paper presents the numerical analysis of the term structure of return interest rates in the affine model. Special attention is paid to the form of curves yield, to maturity and the forward curve of interest rates depending on the amount taken into account the model determinants of financial market. We consider one-, two- and three-factor model, based on the model of Cox – Ingersoll – Ross. It is shown that the dimension of the model affects the shape of the yield curves less than the numerical values of the factors themselves.