ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 1(21)

УДК 517.956.6

А. Сопуев, Н.К. Аркабаев

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказано существование единственного решения задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка с двумя линиями изменения типа.

Ключевые слова: *сопряжения, псевдопараболические уравнения, краевые условия, функции Римана, интегральные уравнения.*

1. Постановка задачи

В области D, ограниченной отрезками прямых

$$x=0,\ y=-h_1,\ x=\ell,\ y=h,\ x=-\ell_1,\ y=0\ \ (\ell,\ell_1,h,h_1>0),$$

рассмотрим задачи сопряжения для уравнений

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}+a_1u_x+d_1u=0,(x,y)\in D_1; \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,(x,y)\in D_2; \tag{2}$$

$$L_3(u)\equiv u_{xyy}+a_3u_{xy}+b_3u_{yy}+c_3u_x+d_3u_y+e_3u=0,(x,y)\in D_3, \tag{3}$$

где $a_i,d_i,b_j,c_j,e_j,\ i=\overline{1,3},\ j=2,3,$ – заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0,y>0)$, $D_2=D\cap(x>0,y<0)$, $D_3=D\cap(x<0,y>0)$.

Уравнения (1) – (3) представляют собой канонические виды линейных уравнений третьего порядка по классификации работы [1]. Такие уравнения часто называются псевдопараболическими по характеру свойств решений [2, 3]. Частные случаи рассматриваемых уравнений встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [4].

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,1,...,n;s=0,1,...,m)$.

Относительно коэффициентов предполагаем следующее:

$$\begin{gathered}a_1,d_1\in C(\overline{D}_1),a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2),b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),\\ a_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{1+1}(D_3),b_3\in C(\overline{D}_3)\cap C^{0+2}(D_3),\\ c_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{1+0}(D_j),d_j\in C(\overline{D}_j)\cap C^{0+1}(D_j),e_j\in C(\overline{D}_j),\ j=2,3.\end{gathered} \tag{4}$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\overline{D}_j)\cap[C^{1+1}(D_1)\cup C^{2+1}(D_2)\cup C^{1+2}(D_3)]\cap C^{3+0},\ i=1,2,3,$$

удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и (3) в областях D_1, D_2 и D_3 соответственно, краевым условиям

$$u(-\ell_1,y)=\varphi_1(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h; \tag{5}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),u_x(0,y)=\chi_2(y),-h_1\le y\le 0; \tag{6}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x), u_y(x,0)=\psi_2(x), -\ell_1 \le x \le 0 \tag{7}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ \ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ \ 0\le x\le \ell\,; \tag{8}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ \ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ \ 0\le y\le h, \tag{9}$$

где $\varphi_i(y),\chi_i(y),\psi_i(x)\,(i=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_1(y)\in C^2[0,h], \varphi_2(y)\in C^1[0,h],\\ \chi_i(y)\in C^1[-h_1,0], \psi_i(x)\in C^1[-\ell_1,0]\,(i=1,2);\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\varphi_1(0)=\psi_1(-\ell_1), \psi_1(0)=\chi_1(0), \psi_2(0)=\chi_1'(0),\\ \psi_1'(0)=\chi_2(0), \psi_2'(0)=\chi_2'(0).\end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения (1) – (3) в совокупности с условиями сопряжения (8) и (9) являются уравнениями смешанного типа с двумя линиями изменения типа в области D [5]. Задачи сопряжений для уравнений второго порядка с двумя линиями изменения типа рассмотрены в работах [6–8]. Методом функции Римана изучены краевые задачи для уравнения вида (2) в работах [9, 10]. Построение функции Римана и корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений со старшими частными производными рассмотрены в работах [11–15].

Введем следующие обозначения:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau_1(x),\ \ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu_1(x),\ \ 0\le x\le \ell\,; \tag{12}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_2(y),\ \ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_2(y),\ \ 0\le y\le h, \tag{13}$$

где $\tau_1(x),\tau_2(y),\nu_1(x),\nu_2(y)$ – пока неизвестные функции.

2. Представление решения задачи 1 в области D_2

Рассмотрим в области D_2 задачу Гурса для уравнения (2) с условиями (6) и

$$u(x,0)=\tau_1(x), 0\le x\le \ell. \tag{14}$$

Решение этой задачи представим через функции Римана [9, 10]. С этой целью рассмотрим тождество

$$\begin{gathered}\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)=[\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+a_2\upsilon u_\xi-(a_2\upsilon)_\xi u+\\ +b_2\upsilon u_\eta+c_2\upsilon u]_\xi-[\upsilon_\xi u_\xi+(b_2\upsilon)_\xi u-d_2\upsilon u]_\eta,\end{gathered} \tag{15}$$

где $L^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{\xi\xi\eta}+(a_2\upsilon)_{\xi\xi}+(b_2\upsilon)_{\xi\eta}-(c_2\upsilon)_\xi-(d_2\upsilon)_\eta+e_2\upsilon.$

Пусть $B_1^*(x,y)$ – произвольная точка области D_2. Интегрируя равенство (15) по области $D_2^*=\{(x,y):0<\xi<x, y<\eta<0\}$, имеем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{D_2^*}[(\upsilon L_2(u)-uL_2^*(\upsilon)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}[\upsilon_\xi u_\xi+(b_2\upsilon)_\xi u-d_2\upsilon u]d\xi+\\ +[\upsilon u_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi\eta}u+a_2\upsilon u_\xi-(a_2\upsilon)_\xi u+b_2\upsilon u_\eta+c_2\upsilon u]d\eta.\end{gathered} \tag{16}$$

Пусть $\upsilon(x,y;\xi,\eta)$ – является решением задачи Гурса

$$L_2^*(\upsilon)=0, (\xi,\eta)\in D_2^*, \tag{17}$$

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \ \upsilon_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),\ \ y\le\eta\le 0\,; \tag{18}$$

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),\ \ 0\le\xi\le x, \tag{19}$$

где $\theta_1(x,y;\xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\upsilon(x,y;\xi,y)=0, 0<\xi<x,\\ \upsilon(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=0, \upsilon_\xi(x,y;\xi,y)|_{\xi=x}=1.\end{gathered} \tag{20}$$

Задача (17) – (19) решается эквивалентным сведением к интегральному уравнению Вольтерра вида

$$\begin{gathered}\upsilon(x,y;\xi,\eta)=\xi-x+\\ +\int_x^\xi B(\xi,\eta,s)\upsilon(x,y;s,\eta)ds+\int_y^\eta a_2(\xi,t)\upsilon(x,y;\xi,t)dt+\int_x^\xi ds\int_y^\eta C(\xi,s,t)\upsilon(x,y;s,t)dt,\end{gathered} \tag{21}$$

где $B(\xi,\eta,s)=b_2(s,\eta)-(\xi-s)d_2(s,\eta), C(\xi,s,t)=-c_2(s,t)+(\xi-s)e_2(s,t)$, которое допускает единственное решение из класса $C^{2+1}(D_2^*)$.

Тогда из (16) получим представление решения задачи 1 в области D_2:

$$\begin{gathered}u(x,y)=\upsilon_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\\ +\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\upsilon(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta,\end{gathered} \tag{22}$$

где $$A_1(x,y;\xi)=-\upsilon_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+[b_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0)]_\xi-d_2(\xi,0)\upsilon(x,y;\xi,0),$$

$$B_1(x,y;\eta)=\upsilon_\xi(x,y;0,\eta)-b_2(0,\eta)\upsilon(x,y;0,\eta),$$

$$C_1(x,y;\eta)=-a_2(0,y)\upsilon(x,y;0,\eta),$$

$$E_1(x,y;\eta)=[a_{2\xi}(0,\eta)-c_2(0,\eta\upsilon(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\upsilon_\xi(x,y;0,\eta).$$

Из (22) нетрудно получить соотношение между $\tau_1(x)$, и $\nu_1(x)$, полученное с помощью области D_2:

$$\nu_1(x)=\upsilon_{\xi y}(x,0;x,0)\tau_1(x)+\int_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g_1(x), \tag{23}$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\upsilon(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_2(0).$

3. Соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, полученное с помощью области D_1

Интегрируя уравнение (1) в пределах от 0 до x имеем

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)-a_1(x,y)u+\int_0^x \tilde d_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi+T_0(x,y), \tag{24}$$

$$\tilde d_1(\xi,y)=a_{1\xi}(\xi,y)-d_1(\xi,y), T_0(x,y)=a_1(0,y)\tau_2(y)-\tau_2'(y).$$

Отсюда переходя к пределу при $y\to+0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega(0)-a_1(x,0)\tau_1(x)+\int_0^x\tilde{d}_1(\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi+T_0(x,0). \tag{25}$$

4. Определение $\tau_1(x)$

Исключая $\nu_1(x)$ из соотношений (23) и (25), приходим к уравнению

$$\tau_1''(x)=\omega(0)-\tilde{a}_1(x)\tau_1(x)+\int_0^x\tilde{A}_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+\tilde{g}_1(x), \tag{26}$$

где
$$\tilde{g}_1(x)=g_1(x)+T_0(x,0),\quad \tilde{a}_1(x)=-a_1(x,0)+\upsilon_{\xi y}(x,0;x,0),$$
$$\tilde{A}_1(x,\xi)=\tilde{d}_1(\xi,0)-A_{1y}(x,0;\xi).$$

Отметим, что для $\tau_1(x)$ выполняются еще следующие краевые условия:

$$\tau_1(0)=\chi_1(0),\tau_1'(0)=\chi_2(0),\tau_1(\ell)=\varphi_2(0). \tag{27}$$

Интегрируя дважды уравнение (26) и используя при этом первые два условия из (27), имеем

$$\tau_1(x)=\frac{1}{2}\omega(0)x^2+\int_0^x A_2(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g_2(x), \tag{28}$$

$$A_2(x,\xi)=\tilde{a}_1(\xi)(x-\xi)+\int_\xi^x(x-t)\,\tilde{A}_1(t,\xi)dt,\; g_2(x)=\chi_1(0)+\chi_2(0)x+\int_0^x(x-t)\,\tilde{g}_1(t)dt.$$

Отсюда, воспользовавшись третьим условием (27), находим

$$\omega(0)=\frac{2}{\ell^2}[\varphi_2(0)-g_2(\ell)]-\frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Подставляя это в значение (28), имеем

$$\tau_1(x)=g_3(x)+\int_0^x A_2(x,\xi)\tau_2(\xi)d\xi-\frac{x^2}{\ell^2}\int_0^\ell A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{29}$$

где $g_3(x)=g_2(x)+\frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(0)-g_2(\ell)]x^2$.

Обращая вольтеровскую часть уравнения (29), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau_1(x)=g(x)+\int_0^\ell H_1(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{30}$$

где
$$H_1(x,\xi)=-\frac{1}{\ell^2}\left(x^2+\int_0^x R_1(x,t)t^2dt\right)A_2(\ell,\xi),$$
$$g(x)=g_3(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Если $$\ell L < 1, \tag{31}$$
то уравнение (30) имеет единственное решение, здесь $L = \max\limits_{0 \le x,\, \xi \le \ell} |H_1(x,\xi)|$.

5. Представление решение задачи 1 в области D_3

В области D_3 рассмотрим задачу Гурса для уравнения (3) с условиями (7) и $u(0,y) = \tau_2(y), 0 \le y \le h$, решение которого с помощью функции Римана представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) &= w_\eta(x,y;0,y)\tau_2(y) + \int_0^y A_2(x,y;\eta)\tau_2(\eta)d\eta + \\ &+\int_0^x [B_2(x,y;\xi)\psi_1'(\xi) - wx,y;\xi,0)\psi_2'(\xi) + \\ &+C_2(x,y;\xi)\psi_2(\xi) + E_2(x,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$A_2(x,y;\xi) = -w_{\eta\eta}(x,y;0,\eta) + [a_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta)]_\eta - c_3(0,\eta)w(x,y;0,\eta),$$

$$B_2(x,y;\xi) = w_\eta(x,y;\xi,0) - a_3(\xi,0)w(x,y;\xi),$$

$$C_3(x,y;\xi) = -b_3(\xi,0)w(x,y;\xi),$$

$$E_2(x,y;\xi) = [b_{3\eta}(\xi,0) - d_3(\xi,0)]w(x,y;\xi,0) + b_3(\xi,0)w_\eta(x,y;\xi,0).$$

Здесь $w(x,y;\xi,\eta)$ – функция Римана, определяемая как решение следующей задачи:

$$L_3^*(w) \equiv -w_{\xi\eta\eta} + (a_3 w)_{\xi\eta} + (b_3 w)_{\eta\eta} - (c_3 w)_\xi - (d_3 w)_\eta + e_3 w = 0,$$

$$(\xi,\eta) \in D_3^* = \{(\xi,\eta) : x < \xi < 0, 0 < \eta < y\},$$

$$w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = 0, w_\eta(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y} = \exp\left(\int_x^\xi b_3(s,y)ds\right), x \le \xi \le 0, \tag{33}$$

$$w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = \theta_2(x,y;\eta),$$

где $\theta_2(x,y;\eta)$ – решение задачи Коши:

$$w_{\eta\eta}(x,y;x,\eta) - [a_3(x,\eta)w(x,y;x,\eta)]_\eta + c_3(x,\eta)w(x,y;x,\eta) = 0, 0 < \eta < y,$$

$$w(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=0} = 0, w_\eta(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=0} = 1.$$

При выполнении условий (4) решение задачи (33) существует и единственно.

Используя первое условие (5) и учитывая, что $w_\eta(-\ell_1,y;0,y) > 0$, из (32) получим

$$\tau_2(y) = \gamma(x) + \int_0^y H_2(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta, \tag{34}$$

где $$H_2(y,\eta)=-\frac{A_2(-\ell_1,y;\eta)}{w_\eta(-\ell_1,y;0,y)},\ \gamma(x)=\frac{1}{w_\eta(-\ell_1,y;0,y)}\{\varphi_1(y)+$$

$$+\int\limits_{-\ell_1}^{0}[B_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_1'(\xi)-w(-\ell_1,y;\xi,0)\psi_2'(\xi)+C_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_2(\xi)+E_2(-\ell_1,y;\xi)\psi_1(\xi)]d\xi\}.$$

Определив $\tau_2(y)$ из (34), однозначно находим решение задачи 1 в области D_3 по формуле (32). Тогда из (32) можно определить $\nu_2(y)=u_x(0,y)$.

6. Решение задачи 1 в области D_1

Выписывая решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям

$$u_x(0,y)=\nu_2(y),u(\ell,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h,u(x,0)=\tau_1(x),0\le x\le \ell,$$

из (24) имеем

$$u(x,y)=-\int\limits_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y G(x,y;\xi,\eta)[\omega(\eta)-a_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)+$$
$$+\int\limits_0^\xi \tilde d_1(t,\eta)u(t,\eta)dt+T_0(\xi,\eta)]d\eta,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Представим полученное решение в виде

$$u(x,y)=-\int\limits_0^y M(x,y,\eta)\omega(\eta)d\eta+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+T_1(x,y), \qquad (35)$$

где $$M(x,y,\eta)=\int\limits_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi,K_1(x,y;\xi,\eta)=$$
$$=a_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)-\tilde d_1(\xi,\eta)\int\limits_0^\ell G(x,y;t,\eta)dt,$$

$$T_1(x,y)=\int\limits_0^\ell G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int\limits_0^y G(x,y;0,\eta)\nu_2(\eta)d\eta-$$
$$-\int\limits_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y T_0(\xi,\eta)d\eta.$$

Используя условие $u(0,y)=\tau_2(y)$, из (35) имеем

$$\int\limits_0^y M(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r_0(y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^\ell K_1(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \tag{36}$$

где $r_0(y)=-\tau_2(y)+T_1(0,y)$.

Представим $M(0,y,\eta)$ в виде

$$M(0,y,\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}} e^{-s^2}ds+\int\limits_0^\ell q(y,\xi,\eta)d\xi,$$

где
$$q(y,\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{\exp\left[-\frac{(\xi-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi+2\ell-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Здесь $'$ – означает отсутствие члена суммы при $n=0$.

Нетрудно заметить, что $\lim\limits_{\eta\to y}M(0,y,\eta)=1$. Поэтому, дифференцируя уравнения (36), получим

$$\omega(y)+\int\limits_0^y M_y(0,y,\eta)\omega(\eta)d\eta = r_0'(y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K_{1y}(0,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta.$$

Обращая это уравнение, найдем $\omega(y)$:

$$\omega(y)=r(y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta\,, \tag{37}$$

где

$$K_2(y,\xi,\eta)=K_{1y}(0,y;\xi,\eta)+\int\limits_\eta^y R(y,t)K_{1t}(0,t;\xi,\eta)dt,\, r(y)=r_0'(y)+\int\limits_0^y R(y,\eta)r_0'(\eta)d\eta,$$

$R(y,\eta)$ – резольвента ядра – $M_y(0,y,\eta)$. Исключая $\omega(y)$ из (35) и (37), получим интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(x,y)=T(x,y)+\int\limits_0^\ell d\xi\int\limits_0^y K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \tag{38}$$

где
$$K(x,y;\xi,\eta)=K_1(x,y;\xi,\eta)-\int\limits_0^y M(x,y,t)K_2(t,\xi,\eta)dt,\, T(x,y)=$$
$$=T_1(x,y)-\int\limits_0^y M(x,y,\eta)r(\eta)d\eta.$$

В силу свойств функций $K(x,y;\xi,\eta)$ и $T(x,y)$ уравнение (38) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Таким образом, доказана

Теорема. Если выполняются условия (4), (10), (11) и (31), то задача имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т.Д.*, *Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1734–1745.
2. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. 1972. № 12. P. 559–565.
3. *Rundell W.*, *Stecher M.* Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 63. № 1. P. 77–81.
4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
5. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
6. *Салахитдинов М.С.*, *Уринов А.К.* Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984. № 3. С. 29–34.
7. *Сопуев А.* Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений с двумя линиями изменения типа // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 4. С. 31–37.
8. *Исломов Б.* К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и плоскостями вырождения: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.: 01.01.02. Ташкент, 1995. 32 с.
9. *Шхануков М.Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Нальчик, 1985. 225 с.
10. *Жегалов В.И.*, *Уткина Е.А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76.
11. *Жегалов В.И.*, *Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. матем. об-во, 2001. 226 с.
12. *Жегалов В.И.* О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадуратурах // Изв. вузов. Математика. 2004. № 7. С. 47–52.
13. *Уткина Е.А.* Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2006. № 9. С. 70–67.
14. *Миронов А.Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 2(15). С. 27–32.
15. *Тихонова О.А.* Понижение порядка и решение в квадратурах дифференциальных уравнений со старшими частными производными: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань, 2010. 17 с.

Статья поступила 21.12.2011 г.

Sopuev A., *Arkabaev N.K.* INTERFACE PROBLEMS FOR LINEAR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER. Existence of the unique solution of the interface problem for linear pseudo-parabolic equations of the third order with two lines of type change is proved.

Keywords: interface problems, linear pseudo-parabolic equations, boundary conditions, Riemann functions, integral equations.

SOPUEV Adahimjan (Osh State University)
E-mail: sopuev@rambler.ru

ARKABAEV Nurkasym Kylychbekovich (Osh State University)
E-mail: nurkasym@gmail.com