

УДК 517.54

И.А. Колесников

**ОТОБРАЖЕНИЕ НА КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК
С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА**

Получено аналитическое представление голоморфного в верхней полуплоскости отображения с симметрией переноса вдоль вещественной оси в виде дифференциального уравнения. Для одного частного случая получено аналитическое представление в интегральном виде.

Ключевые слова: *счетноугольник, симметрия переноса, линейные дифференциальные уравнения класса Фукса, конформные отображения.*

Одним из основных направлений в геометрической теории функций является задача о построении конформного отображения одной односвязной области на другую, возникшая благодаря работе Римана 1851 г. В различных приложениях теории функции комплексного переменного используются, прежде всего, отображения, построенные для конкретных областей, а также количественные оценки и качественные особенности этих отображений. В качестве области определения обычно выбирают каноническую односвязную область или единичный круг, или верхнюю полуплоскость. В данной работе получено уравнение для отображения с симметрией переноса верхней полуплоскости на круговой счетноугольник.

Определение 1. Область Δ назовем областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , если при линейном преобразовании сдвига вида $L(w)=w+2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta)=\Delta$.

Ограничимся рассмотрением областей типа полуплоскости, т. е. таких областей, у которых при указанном преобразовании сдвига среди всех простых концов в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Определение 2. Круговым счетноугольником с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π будем называть односвязную область типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси с границей, состоящей из счетного числа дуг окружностей.

Будем считать, что часть границы кругового счетноугольника с симметрией переноса от точки ω_0 до точки $\omega_0+2\pi$ состоит из конечного числа дуг окружностей.

Согласно теореме Римана, существует однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости на круговой счетноугольник.

Определение 3. Отображением с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π будем называть отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$, такое, что $f(\Pi^+) = \Delta$, где $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость, Δ – круговой счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

Замечание 1. Отображение с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π удовлетворяет условию [1] $f(z+2\pi k)=f(z)+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \Pi^+$.

Аналитическое продолжение отображения с симметрией переноса

Двигаясь от ω_0 к $\omega_0 + 2\pi$ по границе области Δ в положительном направлении, будем обозначать последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0, A_n^0 \neq A_1^0 + 2\pi$, а углы области Δ соответственно $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Пробразы вершин A_s^k счетноугольника Δ обозначим $a_s^k, s = 1, \dots, n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Интервал, начинающийся в точке $a_s^k, s = 1, 2, \dots, n-1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и оканчивающийся в a_{s+1}^k обозначим l_s^k . Когда точка z пробегает интервал l_s^k , двигаясь слева направо, точка $\omega = f(z)$ пробегает дугу L_s^k границы области Δ , начинающуюся в точке A_s^k так, что область Δ остается слева. В силу принципа симметрии Римана – Шварца [1] отображение $f(z)$ голоморфно вплоть до интервалов l_s^k и аналитически продолжается через эти интервалы.

Продолжим отображение f из верхней полуплоскости Π^+ через интервал l_s^k в нижнюю полуплоскость $\Pi^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ согласно принципу симметрии. Получим функцию $f^*(z)$, конформно отображающую нижнюю полуплоскость Π^- на круговой счетноугольник Δ^* симметричный области Δ относительно L_s^k .

Это голоморфное отображение можно снова продолжить через любой интервал $l_{s'}^{k'}$ в верхнюю полуплоскость, причем новое аналитическое продолжение $f^{**}(z)$ будет реализовывать конформное отображение верхней полуплоскости Π^+ на счетноугольник Δ^{**} симметричный счетноугольнику Δ^* относительно дуги $L_{s'}^{k'}$.

Предположим, что мы выполнили все возможные аналитические продолжения описанного вида. В результате получится бесконечнозначная аналитическая функция, для которой исходная функция $f(z)$ является в верхней полуплоскости одной из однозначных ветвей. Различные значения функции в точке z связаны дробно-линейным преобразованием.

Заметим, что различные ветви f^s, f^t продолженной функции f , заданные на верхней или нижней полуплоскостях, связаны дробно-линейным преобразованием

$$f^s(z) = \frac{af^t(z) + b}{cf^t(z) + d}.$$

Определение 4. Пусть функция $f : \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в верхней полуплоскости Π^+ и имеет производную, не принимающую значение ноль. Производной Шварца [1, с. 399] функции f в области Π^+ называется функция

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Замечание 2. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ инвариантна относительно дробно-линейного преобразования функции f .

В силу замечания 2 видим, что $\{f^s, z\} = \{f^t, z\}$, где f^s и f^t – различные ветви продолженной функции $f(z)$, заданные в верхней или нижней полуплоскости. Таким образом, производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции $f(z)$ является однозначной. Заметим, что $f'(z) \neq 0$, поэтому отображение $\{f(z), z\}$ голоморфно во всей плоскости за исключением точек $a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Особые точки функции $\{f(z), z\}$

Обозначим $\{f(z), z\} = F(z)$. Изучим поведение функции $F(z)$ в ее изолированных особых точках. Предположим сначала, что угол в вершине A_s^k образован дугами окружностей или дугой окружности и прямолинейным отрезком $A_{s-1}^k A_s^k$, $A_s^k A_{s+1}^k$ и имеет величину $\alpha_s \pi$, $\alpha_s \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Тогда, при достаточном продолжении сторон такого угла, они пересекутся еще в некоторой точке, обозначим ее A_s^{*k} .

Дробно-линейным отображением $\omega(w) = e^{i\gamma} \frac{w - A_s^k}{w - A_s^{*k}}$ переведем область $U_\varepsilon(A_s^k) \cap \Delta$, где $U_\varepsilon(A_s^k)$ – некоторая окрестность точки A_s^k радиуса ε , $\varepsilon > 0$, в прямолинейный угол с вершиной в начале координат. Причем параметр γ выберем так, чтобы точки из окрестности $U_\varepsilon(A_s^k) \cap \Delta$ переходили в точки

$$0 < \arg \omega < \pi \alpha_s \quad (1)$$

некоторой окрестности нуля.

Последующим преобразованием $\omega_1 = \omega^{\frac{1}{\alpha_s}}$ этот угол переводится на лежащую в верхней полуплоскости ω_1 -плоскости часть окрестности точки ноль. Функция $\omega_1(z) = \omega_1(\omega(f(z)))$ взаимно однозначно и конформно отображает часть верхней полуплоскости z -плоскости на часть верхней полуплоскости ω_1 -плоскости, причем участок вещественной оси в окрестности точки a_s^k переходит в участок вещественной оси в окрестности точки $\omega_1 = 0$. Функция $\omega_1(z)$ согласно принципу симметрии продолжается на полную окрестность точки a_s^k и, являясь голоморфной функцией, представляется рядом

$$\omega_1(z) = \gamma_1^{(s)}(z - a_s^k) + \gamma_2^{(s)}(z - a_s^k)^2 + \dots, \quad \gamma_1^{(s)} \neq 0 \quad (2)$$

с ненулевым радиусом сходимости. В этом ряду отсутствует свободный член, так как $\omega_1(a_s^k) = 0$, однако $\gamma_1^{(s)} = \omega_1'(a_s^k) \neq 0$, так как функция осуществляет конформное отображение. Поскольку при вещественных z вблизи точки $z = a_s^k$ функция $\omega_1(z)$ вещественна, все коэффициенты $\gamma_i^{(s)}$ – вещественны.

Возвращаясь к функции $\omega(z) = (\omega_1(z))^{\alpha_s}$, находим, что в окрестности a_s^k функция $\omega(z)$ представима в виде

$$\omega(z) = (z - a_s^k)^{\alpha_s} [c_0^{(s)} + c_1^{(s)}(z - a_s^k) + \dots].$$

Отсюда можно получить разложение для функции $F(z)$ в окрестности точки a_s^k , если учесть, что в силу замечания 2 $\{f, z\} = \{\omega, z\}$. Тогда получим

$$\{f, z\} = \frac{1 - \alpha_s}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{1}{z - a_s^k} (\mu_0^{(s)} + \mu_1^{(s)}(z - a_s^k) + \dots),$$

причем коэффициенты $\mu_i^{(s)}$ также вещественны. Выделим главную часть разложения производной Шварца в ряд Лорана по степеням $z - a_s^k$. Обозначив $\mu_0^{(s)} = M_s$, $\mu_1^{(s)} + \mu_2^{(s)}(z - a_s^k) + \dots = S_s(z)$, имеем

$$F(z) = \frac{1 - \alpha_s}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^k} + S_s(z), \quad (3)$$

где M_s – вещественный параметр, $S_s(z)$ – голоморфная функция в окрестности точки a_s^k .

Предположим теперь, что угол в вершине A_s^k образован прямолинейными отрезками и имеет величину $\alpha_s \pi$, $\alpha_s \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Тогда стороны угла при их продолжении пересекаются в бесконечно удаленной точке.

В этом случае с помощью линейного преобразования $\omega(w) = e^{i\gamma}(w - A_s^k)$ переведем окрестность $U_\varepsilon(A_s^k) \cap \Delta$ вершины в угловую область (1) и, таким образом, сведем данный случай к предыдущему.

Наконец, рассмотрим случай, когда угол в вершине A_s^k имеет величину $\alpha_s \pi$, где $\alpha_s = 0, 1, 2$, при этом прилегающие стороны могут быть дугами окружностей, дугой окружности и прямолинейным отрезком. Кроме того, если $\alpha_s = 2$, то угол может быть образован двумя прямолинейными отрезками.

В случае если угол имеет величину $\alpha_s = 0, 1, 2$, продолженные стороны такого угла имеют одну общую точку, т. е. они касаются в точке A_s^k .

С помощью дробно-линейной функции $\omega(w) = \frac{a}{w - a_s^k} + b$ переведем вершину

A_s^k в бесконечно удаленную точку. При этом стороны, прилегающие к вершине, переходят в параллельные прямолинейные отрезки, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Область $U_\varepsilon(A_s^k) \cap \Delta$ преобразуется теперь с помощью отображения $\omega(w)$ в прямолинейную полуполосу. Если выбрать a и b так, чтобы одна из сторон перешла в положительную вещественную полуось, а другую – в прямую $\omega = ic$, то функция $\omega_1(\omega)$, определяемая равенством

$$\omega_1^{\alpha_s} + \frac{c}{\pi} \ln \omega_1 = \omega,$$

отображает эту область в верхнюю полуплоскость ω_1 -плоскости в окрестности точки $\omega_1 = 0$. Как и выше, приходим к выводу, что $\omega_1(z) = \omega(f(z))$ голоморфна в окрестности точки a_s^k и разлагается в окрестности этой точки в ряд (2). Записывая с

помощью последнего равенства разложение для производной Шварца $F(z)$ функции $f(z)$, получаем опять формулу (3).

Уравнение для отображения с симметрией переноса

Рассмотрим функцию

$$g(z) = F(z) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^k} \right].$$

Здесь $-\infty < \dots < a_s^{-k} < a_{s+1}^{-k} < \dots < a_1^0 < \dots < a_n^0 < \dots < a_s^k < \dots < +\infty$ – прообразы вершин кругового счетноугольника Δ с симметрией переноса, а $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ – углы в этих вершинах, $\alpha_s \in [0, 2]$. С учетом того, что $a_s^k = a_s^{k-1} + 2\pi$, функцию $g(z)$ запишем

$$g(z) = F(z) - \sum_{s=1}^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi} \right].$$

Перепишем слагаемое $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2}$ следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2} = \frac{1 - \alpha_s^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^2 \pi^2 \left(\frac{\alpha_s^0 - z}{2\pi} - k \right)^2}.$$

Обозначим $\frac{a_s^0 - z}{2\pi} = x$ и учтем [2, с. 50], что

$$\operatorname{cosec}^2 \pi x = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k)^2},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_s^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^2 \pi^2 \left(\frac{a_s^0 - z}{2\pi} - k \right)^2} &= \frac{1 - \alpha_s^2}{8\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k)^2} = \\ &= \frac{1 - \alpha_s^2}{8} \operatorname{cosec}^2 \pi x = \frac{1 - \alpha_s^2}{8} \operatorname{cosec}^2 \frac{z - a_s^0}{2} = \frac{1 - \alpha_s^2}{8 \sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}}. \end{aligned}$$

Перепишем слагаемое $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi}$ следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi} = \frac{M_s}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z - a_s^0}{2\pi} + k}.$$

Введем обозначение $\frac{z-a_s^0}{2\pi} = x$, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z-a_s^0}{2\pi} + k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+k} = \frac{x}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-k^2} + \frac{1}{2x\pi} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(x\pi) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{z-a_s^0}{2}\right).$$

Итак,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\alpha_s^2}{2(z-a_s^0+2k\pi)^2} = \frac{1-\alpha_s^2}{8\sin^2 \frac{z-a_s^0}{2}} \text{ и } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M_s}{z-a_s^0+2k\pi} = \frac{M_s}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{z-a_s^0}{2}\right).$$

Таким образом, функция $g(z)$ является голоморфной в плоскости $\mathbb{C}$, следовательно, целой. Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left[\frac{1-\alpha_s^2}{4\sin^2 \frac{z-a_s^0}{2}} + M_s \operatorname{ctg} \frac{z-a_s^0}{2} \right] + g(z) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1-\alpha_s^2 + 4M_s \cos \frac{z-a_s^0}{2} \sin \frac{z-a_s^0}{2}}{4\sin^2 \frac{z-a_s^0}{2}} + g(z) = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^n \frac{1-\alpha_s^2 + 2M_s \sin(z-a_s^0)}{\sin^2 \frac{z-a_s^0}{2}} + g(z). \end{aligned}$$

Получаем:

Теорема 1. Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^n \frac{1-(\alpha_s)^2 + 2M_s \sin(z-a_s^0)}{4\sin^2 \frac{z-a_s^0}{2}} + g(z), \quad (4)$$

где a_s^0 , $s = 1, 2, \dots, n$, – прообразы вершин A_s^0 счетноугольника, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi)$, $\alpha_s\pi$, $\alpha_s \in [0, 2]$, $s = 1, 2, \dots, n$, – углы при вершинах A_s^0 , M_s , $s = 1, 2, \dots, n$, – константы, $g(z)$ – целая функция.

Целая функция $g(z)$ и константы M_s , $s = 1, 2, \dots, n$, подлежат определению из условий конкретной задачи.

Пример. Рассмотрим круговой счетноугольник с симметрией переноса, вершины которого находятся в точках $A^k = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; углы при вершинах равны $\alpha\pi$.

В области определения функции $f(z)$, отображающей на заданный счетноугольник, промежутку $[0, 2\pi)$ принадлежит только один из прообразов вершин – a_0 . В качестве a_0 берем точку ноль.

Запишем уравнение (4) для данного случая:

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1 - \alpha^2 + 2M \sin z}{8 \sin^2 \frac{z}{2}} + g(z),$$

где M – вычет производной Шварца функции $f(z)$, вычисленный в точке ноль.

Полагаем $g(z)=0$.

Представляя тригонометрические функции через показательные, запишем уравнение

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{(1 - \alpha^2)e^{iz} - iM(e^{iz} - 1)}{2(e^{2iz} - 2e^{iz} + 1)}. \quad (5)$$

Воспользуемся легко проверяемым равенством [3, с. 82]

$$\{f(z), z\} = -2\sqrt{f'(z)} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right).$$

Уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right) + \frac{1 - \alpha^2 + 2M \sin z}{16 \sin^2 \frac{z}{2}} \frac{1}{\sqrt{f'(z)}} = 0.$$

Полагаем $\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} = t(z)$, тогда

$$t'' - \frac{(1 - \alpha^2)e^{iz} - iM(e^{iz} - 1)}{4(e^{2iz} - 2e^{iz} + 1)} t = 0. \quad (6)$$

Пусть t_1, t_2 – два линейно независимых решения уравнения (6). Согласно формуле Остроградского – Лиувилля, между t_1 и t_2 имеет место следующее соотношение: $t_1 t_2' - t_2 t_1' = \text{const}$. Поэтому, если положить $f = \frac{t_2}{t_1}$, то

$$\{f(z), z\} = -2\sqrt{f'(z)} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right) = -\frac{t_1''}{t_1} = \frac{(1 - \alpha^2)e^{iz} - iM(e^{iz} - 1)}{2(e^{2iz} - 2e^{iz} + 1)}.$$

Следовательно, отношение двух линейно независимых интегралов уравнения (6) есть интеграл уравнения (5).

Выполнив замену $e^{iz}=u$ в уравнении (6), получаем уравнение класса Фукса [4]

$$t'' + \frac{1}{u} t' + \frac{-iMu^2 + (1 - \alpha^2 + iM)}{4u^2(u - 1)^2} t = 0. \quad (7)$$

Видим, что точки $u=0, u=1$ являются для уравнения (7) особыми точками.

Проверим, является ли точка ∞ особой для уравнения (7). Сделав замену $u = \frac{1}{\zeta}$,

имеем

$$t'' + \frac{1}{\zeta} t' + \frac{1}{\zeta} \frac{(1 - \alpha^2)\zeta - iM(1 - \zeta^2)}{4(1 - \zeta^2)} t = 0. \quad (8)$$

Для получившегося уравнения (8) точка $\zeta=0$ – особая точка, следовательно, для уравнения (7) точка $u=\infty$ является особой точкой. Итак, в уравнении (7) три особых точки: $\xi_1=0$, $\xi_2=1$, $\xi_3=\infty$.

Введем обозначения для коэффициентов уравнения (7):

$$p(u) = \frac{1}{u}, \quad q(u) = \frac{-iMu^2 + (1-\alpha^2) + iM}{4u^2(u-1)^2}.$$

Запишем разложение функций $(u-\xi_k)^2 p(u)$, $(u-\xi_k)^2 q(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u=\xi_k$, $k=1,2$. При $k=1$ имеем разложение

$$u^2 p(u) = u, \\ u^2 q(u) = \frac{iM}{4} + \left(\frac{1-\alpha^2}{4} + \frac{iM}{2} \right) u + \dots$$

При $k=2$ – разложение

$$(u-1)^2 p(u) = 0(u-1) + (u-1)^2 + \dots, \\ (u-1)^2 q(u) = \frac{1-\alpha^2}{4} - \left(\frac{1-\alpha^2}{4} + \frac{iM}{2} \right) (u-1) + \dots$$

Уравнение (7) можно записать с учетом приведенных для $k=1,2$ разложений в виде

$$(u-\xi_k)^2 t'' + [A_k(u-\xi_k) + A'_k(u-\xi_k)^2 + \dots]t' + \\ + [B'_k + B''_k(u-\xi_k) + B'''_k(u-\xi_k)^2 + \dots]t = 0. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнения в окрестности точки ξ_k , $k=1,2$, как

$$t = (u-\xi_k)^{p^{(k)}} \left(\gamma_1^{(k)} + \gamma_2^{(k)}(u-\xi_k) + \dots \right). \quad (10)$$

Чтобы найти показатель $p^{(k)}$, подставим решение (10) в окрестностях точек $u = \xi_k$, $k=1,2$, в уравнение (9) при соответствующих k :

$$(u-\xi_k)^{p^{(k)}} \left[\gamma_1^{(k)} p^{(k)} (p^{(k)} - 1) + \gamma_2^{(k)} (p^{(k)} + 1) p^{(k)} (u-\xi_k) + \dots \right] + \\ + (u-\xi_k)^{p^{(k)}} (A_k - A'_k(u-\xi_k) + \dots) \left[\gamma_1^{(k)} p^{(k)} + \gamma_2^{(k)} (p^{(k)} + 1) (u-\xi_k) + \dots \right] + \\ + (u-\xi_k)^{p^{(k)}} (B'_k + B''_k(u-\xi_k) + B'''_k(u-\xi_k)^2 + \dots) \left[\gamma_1^{(k)} + \gamma_2^{(k)} (u-\xi_k) + \dots \right] = 0.$$

Суммируя коэффициенты при $(u-\xi_k)^{p^{(k)}}$, получаем определяющие уравнения для показателей $p^{(k)}$, $k=1,2$:

$$p^{(k)}(p^{(k)} - 1) + A_k p^{(k)} + B'_k = 0.$$

Откуда, обозначая корни этих уравнений через $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$, получаем

$$p_1^{(1)} = \frac{i}{2} \sqrt{iM}, \quad p_2^{(1)} = -\frac{i}{2} \sqrt{iM}, \\ p_1^{(2)} = \frac{1+\alpha}{2}, \quad p_2^{(2)} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Особым точкам уравнения ξ_k соответствуют по два параметра $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$. Найдем параметры, соответствующие точке $\xi_3 = \infty$. Разложим коэффициенты уравне-

ния (8), домноженные на ζ в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta = 0$. Запишем уравнение (8) с учетом этих разложений

$$\zeta t'' + t' + \left(-\frac{iM}{4} + \frac{1-\alpha^2}{4}\zeta + \dots \right) t = 0. \quad (11)$$

Подставим в уравнение (11) разложение для t вида

$$t = \zeta^{p^{(\infty)}} [\gamma_1^{(\infty)} + \gamma_2^{(\infty)} \zeta + \dots].$$

Получим для показателя $p^{(\infty)}$ определяющее уравнение

$$(p^{(\infty)})^2 = \frac{iM}{4}.$$

Откуда, обозначив корни уравнения через $p_1^{(\infty)}$, $p_2^{(\infty)}$, имеем

$$p_1^{(\infty)} = \frac{i}{2}\sqrt{iM}, \quad p_2^{(\infty)} = -\frac{i}{2}\sqrt{iM}.$$

Интегралы уравнения (7) вполне определяются положением особых точек ξ_i и параметрами $p_i^{(k)}$, $i=1,2,3$, $k=1,2$. Запишем интегралы уравнения (7) по схеме Р-функций Римана [4, с. 229]:

$$t = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \frac{i}{2}\sqrt{iM} & \frac{1+\alpha}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{iM} \\ -\frac{i}{2}\sqrt{iM} & \frac{1-\alpha}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{iM} \end{array} \right. u \left. \right\}.$$

Сделаем подстановку $\omega = u^{\frac{i}{2}\sqrt{iM}} (u-1)^{\frac{1+\alpha}{2}} t$, по свойству Р-функции Римана находим

$$\omega = u^{\frac{i}{2}\sqrt{iM}} (u-1)^{\frac{1+\alpha}{2}} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha) \\ -i\sqrt{iM} & -\alpha & \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha) \end{array} \right. u \left. \right\}.$$

Уравнение при этом примет вид

$$\omega'' + \left(\frac{1+i\sqrt{iM}}{u} + \frac{1+\alpha}{u-1} \right) \omega' + \frac{(1+\alpha)^2 + 2i(1+\alpha)\sqrt{iM} - 2iM}{4u(u-1)} \omega = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha) = \delta,$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha) = \beta,$$

$$1+i\sqrt{iM} = \gamma.$$

Тогда уравнение перепишется

$$u(u-1)\omega'' + (\gamma - (\delta + \beta + 1)u)\omega' - \delta\beta\omega = 0. \quad (12)$$

Это есть известное уравнение Гаусса. Найдем интеграл этого уравнения, голоморфный в окрестности особой точки $\xi_1=0$. Положим

$$\omega = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots + c_nu^n + \dots \quad (13)$$

Подставляя ряд (13) в уравнение (12) и суммируя коэффициенты при u^n , получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(n+1)nc_{n+1} - n(n-1)c_n + nc_{n+1}\gamma - (n+1)c_n(\delta + \beta + 1) - \delta\beta c_n]u^n = 0.$$

Откуда следует, что

$$c_{n+1}(n+1)(n+\gamma) = c_n(n^2 + (\delta + \beta)n + \delta\beta) = 0,$$

или

$$c_{n+1} = \frac{(n+\delta)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}c_n. \quad (14)$$

Рекуррентная формула (14) позволяет по c_0 последовательно найти все коэффициенты. Полагая $c_0=1$, получим

$$c_1 = \frac{\delta\beta}{1 \cdot \gamma}, \quad c_2 = \frac{\delta(\delta+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}, \dots$$

Подставляя найденные значения в ряд (13), будем иметь интеграл уравнения Гаусса в виде гипергеометрической функции $\omega=Q(\delta, \beta, \gamma, u)$ [5, с. 634], представленной гипергеометрическим рядом, который сходится при $\gamma \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Сделав подстановку $\omega=u^{1-\gamma}\omega_1$ в уравнении (12), получим уравнение, которое можно записать в виде уравнения Гаусса, если положить $\delta-\gamma+1=\delta'$, $\beta-\gamma+1=\beta'$, $2-\gamma=\gamma'$; следовательно, ему удовлетворяет ряд $\omega_1=Q(\delta', \beta', \gamma', u)$. Для уравнения (12) получим второй интеграл $\omega=u^{1-\gamma}Q(\beta-\gamma+1, \delta-\gamma+1, 2-\gamma, u)$, линейно независимый с $Q(\delta, \beta, \gamma, u)$ при $0 < \gamma < 1$ и сходящийся при $\gamma - 2 \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Таким образом, для уравнения (12) имеем два линейно независимых интеграла:

$$Q\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha), 1+i\sqrt{iM}, u\right),$$

$$u^{-i\sqrt{iM}}Q\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)+1+\alpha), 1-i\sqrt{iM}, u\right).$$

Возвращаясь к z , $f(z)$, заключаем, что одним из интегралов уравнения (7) будет функция

$$f(z) = e^{z\sqrt{iM}} \frac{Q\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)+1+\alpha), 1-i\sqrt{iM}, e^{iz}\right)}{Q\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha), 1+i\sqrt{iM}, e^{iz}\right)}.$$

Выразив гипергеометрические ряды через определенные интегралы [4], получим следующий результат.

Теорема 2. Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией

переноса вдоль вещественной оси на 2π , вершины которого находятся в точках $A^k = 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем $f(0)=A^0$, имеет вид

$$f(z) = A e^{z\sqrt{iM}} \frac{\int_a^h v^B (1-v)^C (1-e^{iz}v)^D dv}{\int_a^{\bar{B}} v^{\bar{B}} (1-v)^D (1-e^{iz}v)^C dv},$$

где a, b, g, h – зависят от значений параметров M, α . Константы A, B, C, D определяются формулами

$$A = \frac{\Gamma(1-i\sqrt{iM}) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1-\alpha)\right)}{\Gamma(1+i\sqrt{iM}) \Gamma\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)+1+\alpha)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{iM}(1+i)+1-\alpha)\right)},$$

$$B = \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)-1+\alpha), \quad C = -\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \quad D = \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)-1-\alpha),$$

M – константа, ал, $\alpha \in [0, 2]$ – углы при вершинах A^k , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ, 2002.
2. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. 4-е изд., перераб. М.: ГИФМЛ, 1963.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. 2-е изд. / под ред. В.И. Смирновой. М.: Наука. Физматлит, 1966.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.: ГИТТЛ, 1950.
5. Лаврентьев М.А. Теория функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Физматлит, 1973.

Статья поступила 08.01.2013 г.

Kolesnikov I.A. A MAPPING TO A ROUND NUMERABLE POLYGON WITH THE SYMMETRY OF TRANSFER. An analytical representation for a mapping holomorphic in the upper half-plane with symmetry of transfer along the real axis is obtained in the form of a differential equation. One particular case is represented in the integral form.

Keywords: numerable polygon, symmetry of transfer, linear differential equations of the Fuchs class, conformal mappings.

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich (Tomsk State University)

E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru