УДК 517.54

В.А. Пчелинцев

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА КЛАССЕ ПАР ФУНКЦИЙ

В статье методом внутренних вариаций решена задача о множестве Δ значений функционала Φ на классе пар функций однолистных в системе круг – внешность круга. Получена система функционально-дифференциальных уравнений для пар функций $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$, которым соответствуют неособые граничные точки Φ_0 множества Δ. Каждое уравнение из системы содержит параметр, являющийся корнем алгебраического уравнения шестой степени.

Ключевые слова: *класс $\mathfrak{M}'$, функционал, множество значений, граничные функции, дифференциальные уравнения.*

Большое внимание в геометрической теории однолистных функций уделяется различным экстремальным задачам, в которых речь идёт об экстремумах и множествах значений функционалов, характеризующих свойства конформных отображений. Возникновение данного направления геометрической теории функций комплексной переменной связано с работами П. Кёбе, К. Каратеодори, Л. Бибербаха, К. Лёвнера 10-х, 20-х годов прошлого столетия. В дальнейшем тематика такого рода задач получила развитие в работах как отечественных, так и зарубежных авторов (см., например, [1–3, 5–7, 9]). В настоящей работе ищется множество значений функционала $\Phi = \ln f'(z_1)/F'(\zeta_1)$.

Пусть D и D^* – односвязные области в w-плоскости и такие, что $0 \in D$, а $\infty \in D^*$. Пусть функция f принадлежит классу S, т.е. $f: U \to D$ – голоморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

а функция F принадлежит классу Σ, т.е. $F: U^* \to D^*$ – мероморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$F(\zeta) = \zeta + d_0 + \frac{d_{-1}}{\zeta} + \ldots + \frac{d_{-n}}{\zeta^n} + \ldots,$$

где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. Семейство пар функций $(f(z), F(\zeta))$ такого вида назовём классом $\mathfrak{M}'$.

Целью данной работы является нахождение множества Δ значений функционала

$$\Phi = \ln \frac{f'(z_1)}{F'(\zeta_1)} = \int_0^{z_1} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz - \int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} d\zeta \qquad (1)$$

при фиксированных $z_1 \in U$ и $\zeta_1 \in U^*$ на классе $\mathfrak{M}'$ (т.е. множество всех тех значений функционала Φ, которые он принимает, когда пара функций $(f(z), F(\zeta))$ пробегает весь класс $\mathfrak{M}'$).

Для решения поставленной задачи применяется вариационный метод Голузина [5].

Пусть $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область и $\mathcal{K}$ – некоторое подмножество множества голоморфных или мероморфных в G функций. Говорят, что в классе $\mathcal{K}$ имеет место вариационная формула

$$g(z,\varepsilon) = g(z) + \varepsilon R(z) + o(z,\varepsilon), \tag{2}$$

если для каждой функции $g(z) \in \mathcal{K}$ и любого достаточно малого ε, $\varepsilon > 0$, функция $g(z,\varepsilon) \in \mathcal{K}$, причём $R(z)$ голоморфная в G функция и $o(z,\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри G.

Пусть пара функций $(f(z), F(\zeta))$ принадлежит классу $\mathfrak{M}'$. Тогда известно [2], [см. также 3, 5, 6, 9], что при ε положительном достаточно малом классу $\mathfrak{M}'$ также принадлежат следующие пары варьированных функций:

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - w_0},$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{w_0^* F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0^*} + o(\zeta,\varepsilon), \tag{3}$$

где w_0 и w_0^* – внешние точки соответственно для областей D и D^*, A_0 – произвольная комплексная постоянная;

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon \left[z f'(z) \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} + f(z) \right] + o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) - \varepsilon \left[\zeta F'(\zeta) \frac{1 + e^{i\theta}\zeta}{1 - e^{i\theta}\zeta} + F(\zeta) \right] + o(\zeta,\varepsilon), \tag{4}$$

где θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, – произвольная постоянная;

$$f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon \Bigg(A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_0)} - \frac{A_0}{2} \left[z f'(z) \frac{z + z_0}{z - z_0} + f(z) \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 -$$

$$- \frac{\overline{A_0}}{2} \left[z f'(z) \frac{\overline{z_0} z + 1}{\overline{z_0} z - 1} + f(z) \right] \left[\overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}} \right]^2 \Bigg) + o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon \Bigg(A_0 \frac{F(\zeta_0) F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} + \frac{A_0}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0 - \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 +$$

$$+ \frac{\overline{A_0}}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{1 + \overline{\zeta_0}\zeta}{1 - \overline{\zeta_0}\zeta} + F(\zeta) \right] \left[\overline{\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0 F'(\zeta_0)}} \right]^2 \Bigg) + o(\zeta,\varepsilon), \tag{5}$$

где $z_0 \in U$, $\zeta_0 \in U^*$, A_0 – произвольная комплексная постоянная.

Отметим, что множество Δ значений функционала (1) не зависит от $\arg z_1$ и $\arg\zeta_1$. Для того чтобы это показать, введём функции $f_1(z)=e^{-i\varphi}f\left(e^{i\varphi}z\right)\in S$ и $F_1(\zeta)=e^{-i\psi}F\left(e^{i\psi}\zeta\right)\in\Sigma$, где $\varphi=\arg z_1$, а $\psi=\arg\zeta_1$. Тогда $f(z)=e^{i\varphi}f_1\left(e^{-i\varphi}z\right)\in S$ и $F(\zeta)=e^{i\psi}F_1\left(e^{-i\psi}\zeta\right)\in\Sigma$, а

$$\Phi=\ln\frac{f'(z_1)}{F'(\zeta_1)}=\ln\frac{f_1'\left(e^{-i\varphi}z_1\right)}{F_1'\left(e^{-i\psi}\zeta_1\right)}=\ln\frac{f_1'(|z_1|)}{F_1'(|\zeta_1|)}.$$

Отсюда и следует независимость множества Δ от аргументов точек z_1 и ζ_1. Поэтому будем считать в дальнейшем $|z_1|=r\in(0,1),\ |\zeta_1|=\rho\in(1,+\infty)$.

Поскольку рассматриваемый функционал непрерывен [2], а класс $\mathfrak{M}'$ – компактен в себе и связен [1–3], то множество Δ – замкнуто и связно [1]. Следовательно, чтобы отыскать множество Δ, достаточно найти его границу.

Пусть Γ – граница множества Δ. Точку $\Phi_0\in\Gamma$ назовём неособой точкой Γ, если существует такая точка $a\notin\Delta$, что для любых $\Phi\in\Delta$ величина $|\Phi-a|$ достигает наименьшего значения в классе $\mathfrak{M}'$ при $\Phi=\Phi_0$ [7]. Множество неособых точек Γ оказывается всюду плотным на Γ [7], следовательно, наша задача сводится к разысканию наименьшего значения выражения

$$|\Phi-a|=\left|\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)}-a\right|$$

в классе $\mathfrak{M}'$ при всевозможных $a\notin\Delta$.

Итак, ищется пара функций $(f(z),F(\zeta))$, доставляющая величине $|\Phi-a|$, $a\notin\Delta$, наименьшее значение в классе $\mathfrak{M}'$. Такая пара функций называется граничной.

Записывая вариационные формулы для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ на классе $\mathfrak{M}'$ в виде

$$f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon P(z)+o(z,\varepsilon),$$

$$F(\zeta,\varepsilon)=F(\zeta)+\varepsilon Q(\zeta)+o(\zeta,\varepsilon)$$

при ε положительном и достаточно малом, укажем функциональные производные для выражения $|\Phi-a|$. В силу неравенств

$$\left|\Phi\left(f^*,F\right)-a\right|^2\ge|\Phi(f,F)-a|^2,$$

$$\left|\Phi\left(f,F^*\right)-a\right|^2\ge|\Phi(f,F)-a|^2,$$

имеем
$$\left|\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)}+\ln\left(1+\varepsilon\frac{P'(r)}{f'(r)}\right)+o(\varepsilon)-a\right|^2\ge\left|\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)}-a\right|^2,$$

$$\left|\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)}-(1-\lambda)\ln\left(1+\varepsilon\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)}\right)+o(\varepsilon)-a\right|^2\ge\left|\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)}-a\right|^2.$$

Разложив слагаемые в левых частях последних неравенств по степеням ε, получим необходимые условия для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$:

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}\frac{P'(r)}{f'(r)}\right]\geq 0 \qquad (6)$$

и

$$\operatorname{Re}\left[-e^{-i\alpha}\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)}\right]\geq 0, \qquad (7)$$

где $\alpha=\arg(\Phi-a)$, $f^*=f(z,\varepsilon)$, $F^*=F(\zeta,\varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ – граничные функции функционала (1). Тогда области D и D^* не имеют внешних точек.

Доказательство. Допустим, что w_0 есть внешняя точка для области D. Рассмотрим условие (6) , выбрав первую варьированную функцию из (3) в качестве функции сравнения. Оно примет вид

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}A_0\frac{f(r)\left(f(r)-2w_0\right)}{\left(f(r)-w_0\right)^2}\right]\geq 0.$$

Так как выражение, стоящее в скобках, не обращается в нуль при данном w_0, то ввиду произвольности $\arg A_0$, вещественная часть этого выражения может быть сделана отрицательной. Но это противоречит тому условию, что величина $|\Phi-a|$ для функции $f(z)$ принимает наименьшее значение. Следовательно, область D не имеет внешних точек. Подобным образом доказывается, что область D^* не имеет внешних точек. Нужно только рассмотреть неравенство (7) и выбрать вторую варьированную функцию из (3) в качестве функции сравнения. Лемма доказана. ◄

1. Вывод дифференциальных уравнений для граничных функций

Используя в совокупности условие (6) с первой вариационной формулой из (5), а условие (7) со второй вариационной формулой из (5), получим систему дифференциальных уравнений для граничных функций множества Δ, соответствующих неособым точкам. Уравнения этой системы зависят от параметра $\alpha=\arg(\Phi-a)$.

Теорема 1. Каждая граничная пара функций $\left(f(z),F(\zeta)\right)$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений

$$e^{-i\alpha}\frac{f(r)\left(f(r)-2f(z)\right)}{\left(f(z)-f(r)\right)^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{S(z)}{(z-r)^2\left(z-\dfrac{1}{r}\right)^2}; \qquad (8)$$

$$e^{-i\alpha}\frac{F^2(\zeta)}{\left(F(\zeta)-F(\rho)\right)^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2=\frac{T(\zeta)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\dfrac{1}{\rho}\right)^2}, \qquad (9)$$

где

$$S(z)=Az^4+Bz^3+\left(C+\overline{C}\right)z^2+\overline{B}z+\overline{A},$$

$$A=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}\left[\overline{H}+1\right]-e^{-i\alpha}\left[H-1\right]\right),\ B=e^{-i\alpha}\left(\left[H-1\right]\frac{1}{r}-2r\right)+e^{i\alpha}\left(\left[\overline{H}+1\right]r+\frac{4}{r}\right),$$

$$C=\frac{e^{-i\alpha}}{2r^2}\left(\left[H+1\right]r^4-\left[H-1\right]+8r^2\right),\ H=H(r)=1+\frac{rf''(r)}{f'(r)},$$

$$T(\zeta)=A^*\zeta^4+B^*\zeta^3+\left(C^*+\overline{C^*}\right)\zeta^2+\overline{B^*}\zeta+\overline{A^*},$$

$$A^*=\frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha}\left[H^*+1\right]-e^{i\alpha}\left[\overline{H^*}-1\right]\right),\ B^*=e^{i\alpha}\left[\overline{H^*}-1\right]\rho-e^{-i\alpha}\left[H^*+1\right]\frac{1}{\rho},$$

$$C^*=\frac{e^{-i\alpha}}{2\rho^2}\left(\left[H^*+1\right]-\left[H^*-1\right]\rho^4\right),\ H^*=H^*(\rho)=1+\frac{\rho F''(\rho)}{F'(\rho)}.$$

Причём правые части уравнений (8) и (9) на единичной окружности $|z|=|\zeta|=1$ неотрицательны.

Доказательство. Неравенство (6) в случае выбора первой вариационной формулы из (5) примет вид

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}A_0\frac{f(r)(f(r)-2f(z_0))}{(f(r)-f(z_0))^2}-\frac{e^{-i\alpha}A_0}{2}\left[H\frac{r+z_0}{r-z_0}-\frac{2rz_0}{(r-z_0)^2}+1\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-i\alpha}\overline{A_0}}{2}\left[H\frac{r\overline{z_0}+1}{r\overline{z_0}-1}-\frac{2r\overline{z_0}}{\left(r\overline{z_0}-1\right)^2}+1\right]\left[\overline{\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}}\right]^2\right)\geq 0.$$

Заменяя последнее слагаемое под знаком вещественной части на его сопряженное значение, имеем

$$\mathrm{Re}\,A_0\left(e^{-i\alpha}\frac{f(r)(f(r)-2f(z_0))}{(f(r)-f(z_0))^2}-\frac{e^{-i\alpha}}{2}\left[H\frac{r+z_0}{r-z_0}-\frac{2rz_0}{(r-z_0)^2}+1\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{i\alpha}}{2}\left[\overline{H}\frac{rz_0+1}{rz_0-1}-\frac{2rz_0}{(rz_0-1)^2}+1\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2\right)\geq 0.$$

Ввиду произвольности $\arg A_0$, заключаем, что стоящая здесь под знаком вещественной части величина, за выделением множителя A_0, должна быть равна нулю. Так как в этом соотношении z_0 – любая точка из круга U, то заменив z_0 на z, получаем для граничной функции $f(z)$ дифференциальное уравнение

$$e^{-i\alpha}\frac{f(r)(f(r)-2f(z))}{(f(z)-f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{S(z)}{(z-r)^2\left(z-\frac{1}{r}\right)^2}.$$

Записав теперь неравенство (6) совместно с первой вариационной формулой из (4), приходим к неравенству

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\left[H\frac{r+e^{i\theta}}{r-e^{i\theta}}-\frac{2re^{i\theta}}{\left(r-e^{i\theta}\right)^2}+1\right]\right)\geq 0$$

или $$e^{-i\alpha}\left[H\frac{r+e^{i\theta}}{r-e^{i\theta}}-\frac{2re^{i\theta}}{\left(r-e^{i\theta}\right)^2}+1\right]+e^{i\alpha}\left[\overline{H}\frac{re^{i\theta}+1}{re^{i\theta}-1}-\frac{2re^{i\theta}}{\left(re^{i\theta}-1\right)^2}+1\right]\geq 0,$$

из которого следует неотрицательность правой части уравнения (8) на единичной окружности $|z|=1$.

Аналогично получаем дифференциальное уравнение (9), только надо рассмотреть неравенство (7) совместно со вторыми вариационными формулами из (5) и (4). Теорема доказана. ◄

На основании аналитической теории дифференциальных уравнений [4, 8] заключаем, что граничные функции $f(z)$ и $F(\zeta)$ являются голоморфными не только в U и U^*, но и на единичной окружности $|z|=|\zeta|=1$ за исключением конечного числа алгебраических особых точек. Вспомним, что области D и D^* не имеют внешних точек. Следовательно, границы областей D и D^* состоят из конечного числа аналитических дуг.

Введем следующие обозначения:

$\mathbf{M_1}$ – множество конечных концевых точек $f(\mu)$, $|\mu|=1$, границы области D.

$\mathbf{M_2}$ – множество конечных концевых точек $F(\eta)$, $|\eta|=1$, границы области D^*.

Предположим, что $f(\mu)\in\mathbf{M_1}$, а $F(\eta)\in\mathbf{M_2}$. Тогда существуют окрестности $K(\mu)$ и $K(\eta)$ соответственно точек μ и η, такие, что на множествах $U\cap K(\mu)$ и $U^*\cap K(\eta)$ граничные функции и их производные могут быть представлены в виде

$$f(z)=f(\mu)+(z-\mu)^2\left[a_0(\mu)+a_1(\mu)(z-\mu)+\ldots\right],\ a_0(\mu)\neq 0,$$
$$f'(z)=(z-\mu)\left[a_0'(\mu)+a_1'(\mu)(z-\mu)+\ldots\right],\ a_0'(\mu)\neq 0 \qquad (10)$$

и $$F(\zeta)=F(\eta)+(\zeta-\eta)^2\left[b_0(\eta)+b_1(\eta)(\zeta-\eta)+\ldots\right],\ b_0(\eta)\neq 0,$$
$$F'(\zeta)=(\zeta-\eta)\left[b_0'(\eta)+b_1'(\eta)(\zeta-\eta)+\ldots\right],\ b_0'(\eta)\neq 0. \qquad (11)$$

Используя разложения (10) и (11), отметим, что если $f(\mu)\in\mathbf{M_1}$, а $F(\eta)\in\mathbf{M_2}$, то левые части уравнений (8) и (9) имеют в точках $z=\mu$ и $\zeta=\eta$ нули не ниже второго порядка. Следовательно, правые части уравнений в этом случае содержат множители $(z-\mu)$ и $(\zeta-\eta)$ по меньшей мере во второй степени, в то время как $S(z)$ и $T(\zeta)$ являются многочленами четвертой степени. Таким образом, граница области D и граница области D^* могут иметь не более двух конечных концевых точек.

Рассмотрим вещественные функции

$$I(\varphi)=\frac{S\left(e^{i\varphi}\right)}{\left(e^{i\varphi}-r\right)^2\left(e^{i\varphi}-\frac{1}{r}\right)^2},\ J(\psi)=\frac{T\left(e^{i\psi}\right)}{\left(e^{i\psi}-\rho\right)^2\left(e^{i\psi}-\frac{1}{\rho}\right)^2},$$

где φ, ψ, $0\leqslant\varphi$, $\psi<2\pi$, – произвольные постоянные. Они неотрицательны по теореме 1 и достигают своих минимумов соответственно, когда $S\left(e^{i\varphi}\right)=0$ и $T\left(e^{i\psi}\right)=0$. Следовательно, их производные обращаются в нули соответственно в нулях многочленов $S(z)$ и $T(\zeta)$, по модулю равных единице. Таким образом, эти многочлены не могут иметь простых нулей, по модулю равных единице. Но поскольку $S(z)$ и $T(\zeta)$, как было отмечено, обязательно содержат множители соответственно $(z-\mu)^2$ и $(\zeta-\eta)^2$, то они на окружности $|z|=|\zeta|=1$ не могут иметь нулей нечётной кратности. Согласно вышесказанному, уравнения (8) и (9) перепишем как

$$e^{-i\alpha}\frac{f(r)(f(r)-2f(z))}{(f(z)-f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{\left(1-\overline{\mu}z\right)^2\left(A\mu^2z^2-E\mu z+\overline{A}\right)}{(z-r)^2\left(z-\frac{1}{r}\right)^2} \qquad (12)$$

и

$$e^{-i\alpha}\frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2=\frac{(\zeta-\eta)^2\left(A^*\zeta^2-E^*\overline{\eta}\zeta+\overline{A^*\eta^2}\right)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\frac{1}{\rho}\right)^2}, \qquad (13)$$

где E, E^* – вещественные числа.

Отметим, что E и E^* должны быть такими, чтобы правые части уравнений (12) и (13) на окружности $|z|=|\zeta|=1$ были неотрицательными.

Устремляя в уравнении (12) z к нулю, а в уравнении (13) ζ к бесконечности, получаем $\overline{A}=A^*=e^{-i\alpha}$.

Таким образом, уравнения примут вид

$$e^{-i\alpha}\frac{f(r)(f(r)-2f(z))}{(f(z)-f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{\left(1-\overline{\mu}z\right)^2\left(e^{i\alpha}\mu^2z^2-E\mu z+e^{-i\alpha}\right)}{(z-r)^2\left(z-\frac{1}{r}\right)^2}; \qquad (14)$$

$$e^{-i\alpha}\frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2=\frac{(\zeta-\eta)^2\left(e^{-i\alpha}\zeta^2-E^*\overline{\eta}\zeta+e^{i\alpha}\overline{\eta^2}\right)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\frac{1}{\rho}\right)^2}. \qquad (15)$$

Умножая обе части равенства (14) на $(z-r)^2$, а обе части равенства (15) на $(\zeta-\rho)^2$ и устремляя соответственно z к r, а ζ к ρ, в пределах получим

$$Er=\mu e^{i\alpha}+\overline{\mu}e^{-i\alpha}r^2+\mu e^{i\alpha}\frac{\left(1-r^2\right)^2}{\left(1-\mu r\right)^2} \qquad (16)$$

и

$$E^*\rho=\eta e^{-i\alpha}+\overline{\eta}e^{i\alpha}\rho^2-\overline{\eta}e^{i\alpha}\frac{\left(\rho^2-1\right)^2}{\left(\rho-\overline{\eta}\right)^2} \qquad (17)$$

Учитывая, что $\operatorname{Im}(Er)=0$ и $\operatorname{Im}\left(E^*\rho\right)=0$, имеем

$$\operatorname{Im}\left(\mu e^{i\alpha}+\mu e^{i\alpha}\frac{1-r^2}{(1-\mu r)^2}\right)=0 \qquad (18)$$

и $$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{-i\alpha}}{\overline{\eta}}-\overline{\eta}e^{i\alpha}\frac{\rho^2-1}{\left(\rho-\overline{\eta}\right)^2}\right)=0. \tag{19}$$

Из равенств (18) и (19) получаем следующие уравнения шестой степени относительно μ и $\overline{\eta}$.

Уравнение относительно μ:

$$c_1\mu^6+c_2\mu^5+c_3\mu^4+\left(c_4-\overline{c_4}\right)\mu^3-\overline{c_3}\mu^2-\overline{c_2}\mu-\overline{c_1}=0, \tag{20}$$

где $$c_1=e^{i\alpha}r^2,\ c_2=-2e^{i\alpha}r\left(1+r^2\right),$$
$$c_3=e^{i\alpha}r^2\left(4+r^2\right)+\left(2-r^2\right)\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}r^2\right),\ c_4=-4e^{i\alpha}r.$$

Уравнение относительно $\overline{\eta}$:

$$c_1^*\overline{\eta}^6+c_2^*\overline{\eta}^5+c_3^*\overline{\eta}^4+\left(c_4^*-\overline{c_4^*}\right)\overline{\eta}^3-\overline{c_3^*}\overline{\eta}^2-\overline{c_2^*}\overline{\eta}-\overline{c_1^*}=0, \tag{21}$$

где $$c_1^*=-e^{i\alpha}\rho^2,\ c_2^*=2e^{i\alpha}\rho\left(\rho^2+1\right),$$
$$c_3^*=\left(e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}\left(\rho^2-1\right)\right)\left(\rho^2-1\right)-e^{i\alpha}\rho^2\left(\rho^2+4\right),$$
$$c_4^*=2\rho\left(\rho^2-1\right)\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right).$$

Подлежат рассмотрению только те корни этих уравнений, по модулю равные единице, которые при подстановке соответственно в формулу (16) и в формулу (17) дают E и E^* такие, что правые части уравнений (12) и (13) на окружности $|z|=|\zeta|=1$ неотрицательны.

Пусть μ и $\overline{\eta}$ одни из таких корней, соответствующие фиксированному $\alpha\in(0;2\pi]$. Подставляя μ в формулу (16), найдём E, а $\overline{\eta}$ в формулу (17), найдём E^*. Обозначим через R корень уравнения

$$R+\frac{1}{R}=E,$$

а через T – корень уравнения

$$T+\frac{1}{T}=E^*.$$

Теперь уравнения (12) и (13) можно записать в следующих видах:

$$\frac{f(r)\left(f(r)-2f(z)\right)}{\left(f(z)-f(r)\right)^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{\left(1-\overline{\mu}z\right)^2\left(1-e^{i\alpha}\mu Rz\right)\left(1-\dfrac{e^{i\alpha}\mu}{R}z\right)}{(z-r)^2\left(z-\dfrac{1}{r}\right)^2} \tag{22}$$

и $$\frac{F^2(\zeta)}{\left(F(\zeta)-F(\rho)\right)^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2=\frac{(\zeta-\eta)^2\left(\zeta-\overline{\eta}e^{i\alpha}T\right)\left(\zeta-\dfrac{\overline{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\dfrac{1}{\rho}\right)^2}. \tag{23}$$

Умножая обе части равенства (22) на $(z-r)^2$, а обе части равенства (23) на $(\zeta-\rho)^2$ и устремляя соответственно z к r, а ζ к ρ, получим

$$-\left(1-r^2\right)^2=\left(1-\overline{\mu}r\right)^2\left(1-e^{i\alpha}\mu Rr\right)\left(1-\frac{e^{i\alpha}\mu}{R}r\right) \tag{24}$$

и

$$\left(\rho^2-1\right)^2=(\rho-\eta)^2\left(\rho-\overline{\eta}e^{i\alpha}T\right)\left(\rho-\frac{\overline{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right). \tag{25}$$

2. Интегрирование уравнений (22) и (23)

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (22), имеем

$$\frac{\sqrt{1-2y}}{y(1-y)}dy=\frac{\left(1-\overline{\mu}z\right)\left(1-e^{i\alpha}\mu Rz\right)\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{e^{i\alpha}\mu}{R}z}{1-e^{i\alpha}\mu Rz}}}{z(z-r)\left(z-\dfrac{1}{r}\right)}dz,\ y=\frac{f(z)}{f(r)}.$$

Под радикалами понимаются ветви главных значений, т.е. ветви, характеризующиеся условием $\sqrt{1}=1$. Сделав в этом уравнении замены переменных по формулам

$$u=u(y)=\sqrt{1-2y},\ t=t(z)=\sqrt{\frac{1-\dfrac{e^{i\alpha}\mu}{R}z}{1-e^{i\alpha}\mu Rz}},$$

получим

$$\frac{4u^2du}{\left(u^2-1\right)\left(u^2-(1-2)\right)}=$$

$$=\frac{2e^{i\alpha}R\left(e^{i\alpha}\mu^2R-1\right)\left(1-\dfrac{1}{R^2}\right)^2}{\left(1-e^{i\alpha}\mu Rr\right)\left(1-e^{i\alpha}\mu R\dfrac{1}{r}\right)}\frac{\left(t^2-t^2(\mu)\right)t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2-\dfrac{1}{R^2}\right)\left(t^2-t^2(r)\right)\left(t^2-t^2\left(\dfrac{1}{r}\right)\right)}$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{2}{u^2-1}-\frac{2(1-2)}{u^2-(1-2)}\right)du=\left(\frac{2}{t^2-1}-\frac{2e^{i\alpha}}{R}\frac{1}{t^2-\dfrac{1}{R^2}}-\frac{2\left(1-\overline{\mu}r\right)\left(1-\dfrac{e^{i\alpha}\mu}{R}r\right)}{1-r^2}\frac{1}{t^2-t^2(r)}+\right.$$

$$\left.+2e^{i\alpha}\frac{(1-\mu r)\left(1-e^{-i\alpha}\overline{\mu}Rr\right)}{\left(1-r^2\right)R}\frac{1}{t^2-t^2\left(\dfrac{1}{r}\right)}\right)dt.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-2y}}{1-t(z)}}{\dfrac{1+\sqrt{1-2y}}{1+t(z)}}-i\ln\frac{\dfrac{i-\sqrt{1-2y}}{t(r)-t(z)}}{\dfrac{i+\sqrt{1-2y}}{t(r)+t(z)}}=-e^{i\alpha}\left(\ln\frac{\dfrac{1}{R}-t(z)}{\dfrac{1}{R}+t(z)}+i\ln\frac{t\left(\dfrac{1}{r}\right)-t(z)}{t\left(\dfrac{1}{r}\right)+t(z)}\right). \tag{26}$$

Здесь

$$t(r)=-i\frac{\left(1-\overline{\mu}r\right)\left(1-\dfrac{e^{i\alpha}\mu}{R}r\right)}{1-r^2},\quad t\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{i}{R}\frac{(1-\mu r)\left(1-e^{-i\alpha}\overline{\mu}Rr\right)}{\left(1-r^2\right)},\quad t\left(\frac{1}{r}\right)\overline{t(r)}=\frac{1}{R}.$$

Коэффициенты $t(r)$ и $t(1/r)$ получаются из равенства (24). Ветви логарифмов выбраны так, что при $z=e^{-i\alpha}\overline{\mu}R$ $\left(y=\dfrac{1}{2}\right)$ все логарифмы обращаются в нуль. Уравнение (26) неявно определяет граничную функцию $f(z)$.

Устремляя в (26) z к нулю, в пределе получим

$$\ln\frac{2R}{e^{i\alpha}\mu\left(1-R^2\right)f(r)}-i\left(\ln\frac{1-i}{1+i}-\ln\frac{1-t(r)}{1+t(r)}\right)=-e^{i\alpha}\left(\ln\frac{1-R}{1+R}+i\ln\frac{1-R\overline{t(r)}}{1+R\overline{t(r)}}\right). \tag{27}$$

Устремляя теперь в (26) z к r, в пределе будем иметь

$$\ln\frac{2\left(1-r^2\right)^2Rf'(r)}{\left(1-\overline{\mu}r\right)^2e^{i\alpha}\mu\left(1-R^2\right)f(r)}+i\left(\ln\frac{1-i}{1+i}-\ln\frac{1-t(r)}{1+t(r)}\right)=$$
$$=-e^{i\alpha}\left(i\ln\frac{1-Rt(r)}{1+Rt(r)}-\ln\frac{1-R|t(r)|^2}{1+R|t(r)|^2}\right). \tag{28}$$

Вычитая почленно из равенства (28) равенство (27), получим

$$\ln f'(r)=2\ln\frac{1-\overline{\mu}r}{1-r^2}+2i\ln\frac{1-t(r)}{1+t(r)}+$$
$$+e^{i\alpha}\left(\ln\frac{(1-R)\left(1-R|t(r)|^2\right)}{(1+R)\left(1+R|t(r)|^2\right)}+i\ln\frac{\left(1-R\overline{t(r)}\right)(1+Rt(r))}{\left(1+R\overline{t(r)}\right)(1-Rt(r))}\right)-\pi. \tag{29}$$

Выполним теперь интегрирование в уравнении (23). Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (23), находим

$$\frac{dv}{v-1}=\frac{(\zeta-\eta)\left(\zeta-\overline{\eta}e^{i\alpha}T\right)\sqrt{\dfrac{\zeta-\dfrac{\overline{\eta}e^{i\alpha}}{T}}{\zeta-\overline{\eta}e^{i\alpha}T}}}{\zeta(\zeta-\rho)\left(\zeta-\dfrac{1}{\rho}\right)},\quad \mathrm{v}=\frac{F(\zeta)}{F(\rho)}.$$

Ветвь радикала выбрана так, что при $\zeta\to\infty$ радикал обращается в единицу. Сделав в правой части этого уравнения замену переменной по формуле

$$\tau=\tau(\zeta)=\sqrt{\frac{\zeta-\dfrac{\overline{\eta}e^{i\alpha}}{T}}{\zeta-\overline{\eta}e^{i\alpha}T}},$$

получим

$$\frac{dv}{v-1}=\frac{2e^{i\alpha}T\left(1-\overline{\eta}^2e^{i\alpha}T\right)\left(1-\dfrac{1}{T^2}\right)^2}{\left(\rho-\overline{\eta}e^{i\alpha}T\right)\left(\dfrac{1}{\rho}-\overline{\eta}e^{i\alpha}T\right)}\frac{\left(\tau^2-\tau^2\left(\overline{\eta}\right)\right)\tau^2d\tau}{\left(\tau^2-1\right)\left(\tau^2-\dfrac{1}{T^2}\right)\left(\tau^2-\tau^2(\rho)\right)\left(\tau^2-\tau^2\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\right)}.$$

Воспользовавшись теперь методом неопределенных коэффициентов, находим

$$\frac{dv}{v-1}=\left(\frac{2}{1-\tau^2}-\frac{2e^{i\alpha}}{T}\frac{1}{\dfrac{1}{T^2}-\tau^2}-\frac{2(\rho-\eta)\left(\rho-\dfrac{\overline{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right)}{\rho^2-1}\frac{1}{\tau^2(\rho)-\tau^2}+\right.$$
$$\left.+2e^{i\alpha}\frac{\left(\rho-\overline{\eta}\right)\left(\rho-\eta e^{-i\alpha}T\right)}{\left(\rho^2-1\right)T}\frac{1}{\tau^2\left(\dfrac{1}{\rho}\right)-\tau^2}\right)d\tau.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln(v-1)-\ln\frac{1+\tau(\zeta)}{1-\tau(\zeta)}+\ln\frac{\tau(\rho)+\tau(\zeta)}{\tau(\rho)-\tau(\zeta)}=$$
$$=-e^{i\alpha}\left(\ln\frac{\dfrac{1}{T}+\tau(\zeta)}{\dfrac{1}{T}-\tau(\zeta)}-\ln\frac{\tau\left(\dfrac{1}{\rho}\right)+\tau(\zeta)}{\tau\left(\dfrac{1}{\rho}\right)-\tau(\zeta)}\right),\tag{30}$$

где $\tau(\rho)=\dfrac{(\rho-\eta)\left(\rho-\dfrac{\overline{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right)}{\rho^2-1}$, $\tau\left(\dfrac{1}{\rho}\right)=\dfrac{\left(\rho-\overline{\eta}\right)\left(\rho-\eta e^{-i\alpha}T\right)}{\left(\rho^2-1\right)T}$, $\tau\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\overline{\tau(\rho)}=\dfrac{1}{T}$.

Константы $\tau(\rho)$ и $\tau(1/\rho)$ получаются из уравнения (25). В равенстве (30) ветви логарифмов выбраны так, что при $\zeta=\overline{\eta}e^{i\alpha}/T$ $(v=2)$ все логарифмы обращаются в нуль. Уравнение (30) неявно определяет граничную функцию $F(\zeta)$.

Устремляя в этом равенстве ζ к ρ, в пределе получим

$$\ln(-1)\frac{4\left(\rho^2-1\right)^2F'(\rho)}{(\rho-\eta)^2\,\overline{\eta}e^{i\alpha}\left(\dfrac{1}{T}-T\right)F(\rho)}-\ln\frac{1+\tau(\rho)}{1-\tau(\rho)}=$$
$$=-e^{i\alpha}\left(\ln\frac{1+T\tau(\rho)}{1-T\tau(\rho)}-\ln\frac{1+T|\tau(\rho)|^2}{1-T|\tau(\rho)|^2}\right).\tag{31}$$

Устремляя теперь в уравнении (30) ζ к бесконечности, в пределе будем иметь

$$\ln\frac{\overline{\eta}e^{i\alpha}\left(\frac{1}{T}-T\right)\rho^2}{4F(\rho)}+\ln\frac{\tau(\rho)+1}{\tau(\rho)-1}=-e^{i\alpha}\left(\ln\frac{1+T}{1-T}-\ln\frac{1+T\overline{\tau(\rho)}}{1-T\overline{\tau(\rho)}}\right). \tag{32}$$

Вычитая почленно из уравнения (31) уравнение (32), получим

$$\ln F'(\rho)=2\ln\frac{\overline{\eta}e^{i\alpha}\left(T^2-1\right)}{4\rho T}+2\ln\frac{\rho-\eta}{\rho^2-1}+2\ln\frac{\tau(\rho)+1}{\tau(\rho)-1}-$$

$$-e^{i\alpha}\left(\ln\frac{T-1}{T+1}+\ln\frac{T|\tau(\rho)|^2-1}{T|\tau(\rho)|^2+1}-\ln\frac{T\tau(\rho)-1}{T\tau(\rho)+1}-\ln\frac{T\overline{\tau(\rho)}-1}{T\overline{\tau(\rho)}+1}\right). \tag{33}$$

Вычитая почленно (33) из (29), находим

$$\ln\frac{f'(r)}{F'(\rho)}=2\ln\frac{1-\overline{\mu}r}{1-r^2}\frac{\rho^2-1}{\rho-\eta}-2\ln\frac{\overline{\eta}e^{i\alpha}\left(T^2-1\right)}{4\rho T}+2\ln\left(\frac{1-t(r)}{1+t(r)}\right)^i\frac{\tau(\rho)-1}{\tau(\rho)+1}+$$

$$+e^{i\alpha}\left\{\ln\frac{(1-R)\left(1-R|t(r)|^2\right)}{(1+R)\left(1+R|t(r)|^2\right)}\frac{(T-1)\left(T|\tau(\rho)|^2-1\right)}{(T+1)\left(T|\tau(\rho)|^2+1\right)}+\right.$$

$$\left.+\ln\left(\frac{\left(1-R\overline{t(r)}\right)(1+Rt(r))}{\left(1+R\overline{t(r)}\right)(1-Rt(r))}\right)^i\frac{\left(T\overline{\tau(\rho)}+1\right)(T\tau(\rho)+1)}{\left(T\overline{\tau(\rho)}-1\right)(T\tau(\rho)-1)}\right\}-\pi\,. \tag{34}$$

Здесь параметры μ и η определяются из уравнений (20) и (21) соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Множество Δ значений функционала (1) на классе $\mathfrak{M}'$ ограничено кривой, заданной уравнением (34).

В заключение выражаю благодарность профессору И.А. Александрову и доценту С.А. Копаневу за внимание к выполненной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* К вопросу о связности множества значений функционала // Вопросы математики. Труды Томск. гос. ун-та. 1961. Т. 155. С. 72–76.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
3. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Том. гос. ун-т, 2001.
4. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Голузин Г.М.* Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. № 2. С. 203–236.
6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. *Лебедев Н.А.* Мажорантная область для выражения $I=\ln\left\{z^\lambda[f'(z)]^{1-\lambda}/[f(z)]^\lambda\right\}$ в классе S // Вестн. Ленингр. ун-та. Матем., физ. и хим. 1955. № 8(3). С. 29–41.

8. *Матвеев П.Н.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. СПб.: Лань, 2008.
9. *Пчелинцев В.А.* Об одной экстремальной задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 22–30.

Статья поступила 20.02.2013 г.

Pchelintsev V.A. ON A FUNCTIONAL ON THE CLASS OF PAIRS OF FUNCTIONS. The problem about the range Δ of the functional Φ is solved by the method of internal variations on the class of pairs of functions univalent in the «disk – exterior of the disk» system. We have obtained a system of functional-differential equations for pairs of functions $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$ that are in correspondence with nonsingular boundary points Φ_0 of the set Δ. Each equation from the system contains a parameter which is a root of an algebraic equation of the sixth degree.

Keywords: class $\mathfrak{M}'$, functional, range, boundary functions, differential equations

PCHELINTSEV Valerij Anatoljevich (Tomsk State University)
E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru