НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 556.532

Н.И. Алексеевский, А.Г. Косицкий, А.В. Христофоров

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕЧНЫХ СИСТЕМ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-05-0069).

Фрактал – геометрический объект, обладающий свойством самоподобия. В гидрологии фрактальными свойствами обладает речной бассейн. Разные бассейны отличаются по типу рисунка речной сети. Фрактальность речного бассейна характеризует порядок реки, определяемый по схеме А. Шейдеггера. Его величина возрастает с увеличением площади бассейна и ростом густоты речной сети. Изменение гидрологических характеристик с ростом порядка реки называется масштабным эффектом. Использование фрактальных свойств речных систем перспективно при проведении гидрологических расчетов и прогнозов.

Ключевые слова: фрактал; река; бассейн; порядок.

В последнее время в гидрологических исследованиях все больше используется теория фракталов. Под фракталом подразумевается геометрический объект, обладающий свойством самоподобия. Каждая (даже самая малая) часть этого объекта подобна любой более крупной его части и в целом объекту [1]. В гидрологии суши наиболее выраженными фрактальными свойствами обладают системы временных и постоянных водотоков.

В границах любого речного бассейна эти водотоки образуют иерархию временных ручейковых, овражно-балочных и постоянных речных систем разного (постепенно возрастающего) размера. В результате возникает подобие (фрактальность) строения русловой сети.

Однако это подобие имеет относительный характер. Сравнение русловых систем р. Ока, ее крупного притока р. Мокша, главного притока Мокши – р. Цна, главного притока Цны – р. Выша показывает, что русловые сети, имея одинаковый древовидный характер строения, сильно отличаются по рисунку русловой сети (рис. 1).

Рис. 1. Гидрографические схемы рек Ока (*а*), Мокша (*б*), Цна (*в*) и Выша (*г*)

В общем случае русловые сети имеют стволовой или древовидный рисунок (рис. 2). Стволовые сети характеризуются предельно малым числом водотоков. Часто в русловой сети представлен лишь один водоток. Такой характер организации русловой сети возможен в верховьях рек (если не рассматривать временных и постоянных водотоков в овражно-балочной сети речных бассейнов). При увеличении размера главной реки вероятность сохранения стволового типа сети минимальна. Стволовой рисунок речной сети характерен для некоторых озерных рек. К стволовому рисунку близка сеть водотоков в бассейне Невы [2].

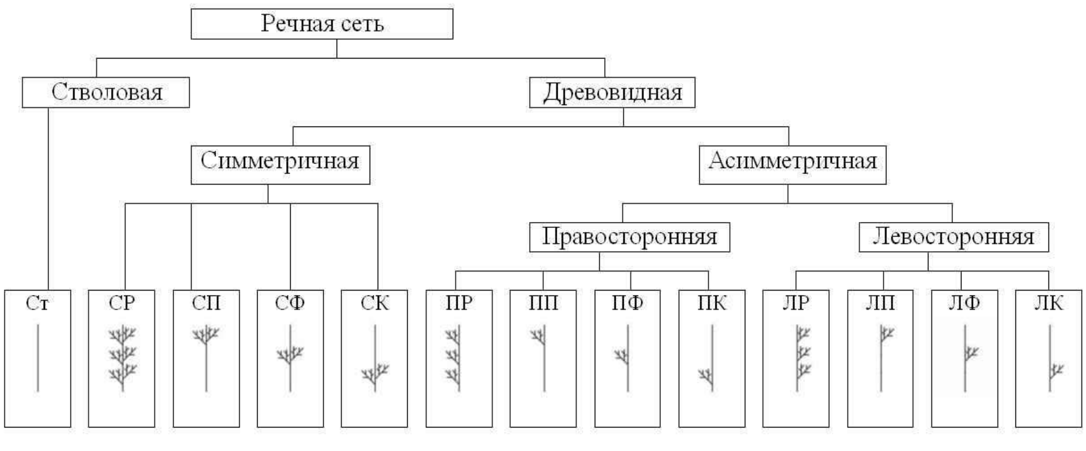

Рис. 2. Классификация рисунков речной сети: Ст – стволовая; СР – симметричная равномерная; СП – симметричная привершинная; СФ – симметричная Ф-образная; СК – симметричная корневая; ПР – правобережная равномерная; ПП – правобережная привершинная; ПФ – правобережная Ф-образная; ПК – правобережная корневая; ЛР – левобережная равномерная; ЛП – левобережная привершинная; ЛФ – левобережная Ф-образная; ЛК – левобережная корневая

Однако абсолютное большинство рек имеют древовидную структуру, которая может быть выражена в большей или меньшей мере. Степень выраженности древовидного строения речной сети определена ее симметричностью. Симметричность или асимметрия русловой сети территории зависят от соотношения площади водосборов право- ($F_{пр}$) и левобережных ($F_л$) притоков. При условии $F_{пр} = F_л$ древовидная русловая сеть симметрична. Симметричной русловой сетью обладают бассейны рр. Ока и Цна (рис. 1, *а*, *в*). Чаще формируются асимметричные русловые сети (рис. 1, *б*, *г*), для которых $F_{пр} \neq F_л$.

Для количественного определения меры выраженности симметричности (или асимметричности) рисунка русловых систем можно использовать отношение между суммарной площадью бассейнов правобережных и левобережных притоков. Если выполняется неравенство

$$0{,}5 < \Sigma F_{пр}/\Sigma F_л < 2, \qquad (1)$$

речную сеть можно считать симметричной. В случае $\Sigma F_{пр}/\Sigma F_л < 0{,}5$ речная сеть имеет левостороннюю, а при $\Sigma F_{пр}/\Sigma F_л > 2$ – правостороннюю асимметрию [2].

Особенности строения русловой сети определены равномерностью (неравномерностью) впадения притоков в главную реку. При равномерном впадении притоков число узлов слияния водотоков в бассейне реки – возрастающая функция ее длины (рис. 3, *а*). Большинство речных систем имеет квазиравномерную сеть. Для таких систем увеличение числа узлов слияния мало отличается от «идеальной» древовидности русловой сети. Если основные притоки реки сосредоточены в ее верховьях, то русловая сеть называется неравномерной привершинной (рис. 3, *б*). Она характерна для случаев расположения верховий реки в зоне избыточного (или достаточного) увлажнения, а средней и нижней части ее бассейна – в аридной области. Неравномерный привершинный рисунок русловой сети имеет, например, р. Урал. Если основное количество притоков приурочено к среднему или нижнему течению главной реки, то такой рисунок сети считается неравномерным Ф-образным (рис. 3, *в*) и корневым (рис. 3, *г*). Такие рисунки русловой сети формируются относительно редко [2].

Рис. 3. Нарастание общего числа узлов слияния в бассейне по длине главной реки при равномерном (*а*, *1*), привершинном (*б*, *2*), Ф-образном (*в*, *3*) и корневом (*г*, *4*) типах рисунка речной сети

Несмотря на возможные различия в строении русловой сети, элементы этой сети обладают свойствами самоподобия (фрактальности). Их подобие устанавливает, в частности, порядки рек N, закономерно изменяющиеся от истока к их устьям. Большинство гидрографических, гидрологических и морфодинамических характеристик рек на их произвольном участке являются функцией величины N, если она определена в соответствии с концепцией Р. Хортона [3] и его последователей. В рамках данной концепции рекой первого порядка ($N = 1$) принимается самый малый водоток, не имеющий притоков. По схеме формализации структуры водотоков Стралера – Философова [4] слияние двух рек первого порядка дает реку с $N = 2$. Слияние двух рек второго порядка даст реку третьего порядка и т.д. (рис. 4, *б*). В общем случае слияние двух рек разного порядка приводит к возникновению объединенного потока, порядок которого N равен наибольшему из порядков сливающихся водотоков. При последовательном впадении в главную реку многих небольших притоков изменения ее порядка не происходит, хотя изменение ряда гидрологических характеристик вполне ощутимо и может оказывать заметное воздействие на их фрактальную размерность.

В этом смысле определение порядка притока N по отношению к очередности его впадения в главную реку (рис. 4, *а*) полностью исключает исследование фрактальных свойств русловых систем. Притоки, непосредственно впадающие в главную реку, в рамках такой схематизации считаются притоками первого порядка. Притоки рек первого порядка являются притоками второго порядка и т.д. Для схем, представленных на рис. 1, Ока является рекой первого порядка, Мокша – второго, Цна – третьего, а Выша – четвертого порядка по отношению к Волге. Из этого следует, что Ока, Сура, Кама, Чапаевка и Сок имеют одинаковый (первый) порядок и, тем не менее, они не подобны друг другу по длине, площади водосбора и другим характеристикам водотоков.

Фрактальность русловой сети в максимальной степени характеризует величина порядков рек, определенная по схеме (рис. 4, *в*) А. Шейдеггера [5]:

$$N_ш = 1 + \log_2 P, \qquad (2)$$

где P – количество рек первого порядка в речном бассейне выше створа определения $N_ш$. В качестве P можно принимать количество рек длиной менее 10 км, которое определяется по справочнику «Гидрологическая изученность» серии «Ресурсы поверхностных вод СССР».

В соответствии с уравнением (2) порядок реки $N_ш = 1, 2, \ldots T$, где T – максимальная величина порядка реки выше вершины ее устьевой области. В результате порядок реки оказывается размером элементов русловой сети территории. Лишь в частном случае величина порядков рек является целочисленной. Порядки рек, представленных на рис. 1, по системе А. Шейдеггера соответственно равны 15,1 (Ока); 12,7 (Мокша); 11,3 (Цна); 9,7 (Выша). Этим размерам элементов русловой сети (порядкам) соответствуют вполне определенные гидрографические характеристики («меры» в терминологии теории фракталов). Увеличение порядков рек сопровождается возрастанием их длины L, а также площадей их бассейнов F. Закономерно изменяются при этом средние гидрологические (характерные расходы воды, сток взвешенных и влекомых наносов) и морфодинамические характеристики русла [2].

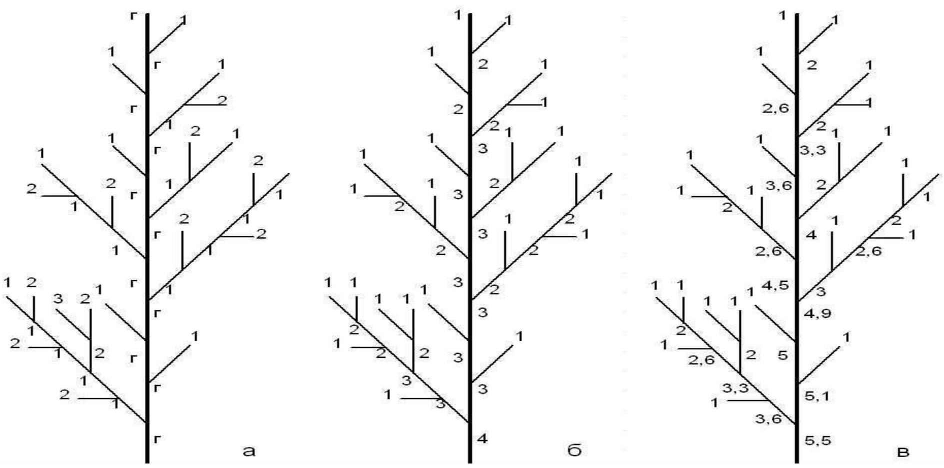

Рис. 4. Схемы определения порядков рек: *а* – классическая; *б* – Стралера – Философова, *в* – Шейдеггера

В теории фракталов меру M и размер самоподобных объектов S дополняет фрактальная размерность D [1, 6]. Эта характеристика отражает закономерное увеличение (уменьшение) меры объекта при увеличении (уменьшении) его размера. Все перечисленные переменные связаны между собой соотношением

$$M = S^D. \tag{3}$$

В русловых системах эта закономерность выполняется при замене S на N. Масштабные эффекты изменения их характеристик («меры») определяются фрактальной размерностью, величина которой является функцией условий формирования речной сети, речного стока и т.п. В практике геоморфологических и гидрологических исследований в качестве фрактальной размерности рассматривается коэффициент бифуркации [3] или коэффициент масштабных изменений длины рек, площади их водосборов, характерных расходов воды и т.п. [2]. Они отражают изменение этих характеристик при увеличении порядка реки (проявление масштабного эффекта). Мерой масштабного эффекта является, в частности, коэффициент масштабного изменения

$$K_i = \frac{M_{N+1}}{M_N}, \tag{4}$$

который показывает кратность изменения той или иной гидрографической, гидрологической или морфодинамической характеристики рек при последовательном увеличении их порядка на единицу. Фрактальная размерность некоторых перечисленных характеристик является переменной или постоянной (преобладающий случай) величиной не только для одного, но и многих речных бассейнов [2]. В частности, стабильность фрактальной размерности (масштабного эффекта) характерна для изменения площади бассейна, поскольку значение $K_F = 2{,}0$ инвариантно по отношению к разнообразию изученных водосборов. Это связано с тем, что увеличение порядка реки на единицу предполагает (в соответствии с уравнением (2)) двукратное увеличение числа водотоков длиной менее 10 км и аналогичное изменение площади водосбора, если густота водотоков в его пределах есть величина постоянная. Чем больше густота водотоков d, тем меньше площадь водосбора F, необходимая для формирования реки заданного порядка N.

Соответствие порядка реки, площади бассейна и густоты речной сети (при учете формулы (2)) устанавливает зависимость типа

$$P = cF^a d^b. \tag{5}$$

Из формул (2) и (5) следует, что

$$N = a\log_2 F + b\log_2 d + C, \tag{6}$$

где C = 1+ $\log_2 c$. Универсальность зависимости (5) подтверждает обобщение данных по рекам в бассейнах Верхней Волги, Печоры и Амура (российская часть), разделенного (для сокращения разницы в численности рек) на Верхний, Средний и Нижний Амур. В пределах каждого из пяти частных бассейнов выделялось n водосборов с характерными для них значениями N_i, F_i и d_i (i = 1, …, n). Эмпирические параметры a, b и C в формуле (6) оценивались на основе метода наименьших квадратов, а ее погрешность для каждого бассейна − стандартной оценки средней квадратической погрешности (таблица):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-3}\sum_{i=1}^{n}(N_i - a\cdot\log_2 F_i - b\cdot l\mathrm{og}_2 d_i - C)^2}. \tag{7}$$

Анализ табл. 1 позволяет констатировать узкий диапазон изменения параметров a и b в сильно изменяющихся ландшафтных условиях сопоставляемых водосборных территорий. Для объединенного ряда значений N, F и d по всем 274 водосборам, находящимся в частных пяти бассейнах, использование метода наименьших квадратов приводит к обобщенной зависимости

$$N = 1{,}05\log_2 F + 1{,}75\log_2 d - 0{,}55. \tag{8}$$

Статистические характеристики зависимостей вида (6)

Название бассейна	Статистические характеристики (обозначения в тексте)					
	n	a	b	C	σ	σ_0
Верхняя Волга	81	1,04	1,68	−0,81	0,17	0,22
Печора	46	1,02	1,46	−1,14	0,15	0,27
Верхний Амур	34	0,98	1,79	−0,02	0,19	0,31
Средний Амур	54	0,99	1,83	−0,28	0,24	0,32
Нижний Амур	59	1,05	2,12	−0,65	0,20	0,24

Стандартная оценка средней квадратической погрешности σ = 0,24, что свидетельствует о достаточно высокой эффективности использования формулы (8) для определения N.

Структуру этой формулы можно получить и на основе теории фракталов. Из геометрического подобия всех элементов фрактала на плоскости [6] следует, что длина каждого элемента русловой сети L пропорциональна квадратному корню из значения площади его водосбора (т.е. $L = \gamma F^{0,5}$, где γ − общий коэффициент пропорциональности). Анализ фактического соотношения между длиной реки и площадью ее водосбора показал, что коэффициент $\gamma \approx 1{,}4$ [7]. Если количество рек на территории бассейна равно P, то средняя площадь каждой реки $f_{ср} = F/P$, а средняя длина $l_{ср} = L_п/P$, где $L_п$ – протяженность русловой сети. При выполнении для средних значений показателей $f_{ср}$ и $l_{ср}$ условия геометрического подобия $l_{ср} = \gamma\sqrt{f_{ср}}$ возведение в квадрат обеих частей уравнения приводит к соотношению

$$\frac{L_п^2}{P^2} = \gamma^2 \frac{F}{P}. \quad (9)$$

С учетом равенства $L_п = dF$ из уравнения (9) следует, что

$$P = \frac{1}{\gamma^2} d^2 F. \quad (10)$$

При относительно устойчивом значении $\gamma \approx 1{,}4$ для рек России и сопредельных территорий [7] приходим к полуэмпирической формуле

$$P = 0{,}5 d^2 F. \quad (11)$$

Из формул (2) и (11) следует выражение, определяющее величину порядка реки N:

$$N = \log_2 F + 2\log_2 d. \quad (12)$$

Полуэмпирическая формула (12) лишь незначительно отличается от обобщенной формулы (8), что подтверждает ее эффективность для рек, находящихся в разных природных условиях.

Среднее отклонение фактических значений N от рассчитанных величин по формуле (12) мало отличается от нуля. Для пяти изученных бассейнов (см. таблицу) коэффициент корреляции между фактическими и рассчитанными по формуле (12) значениями N превышал 0,95. Эффективность этой формулы для оценки порядка рек в бассейнах рр. Волга, Печора, Амур характеризует средняя квадратическая погрешность σ_0, рассчитанная по формуле (7) при $a = 1$, $b = 2$ и $C = 0$. Разность $n - 3$ в знаменателе подкоренного выражения заменялось на n, так как ни один из параметров формулы (12) не оценивался по данным о водосборах рассматриваемых бассейнов. Значения σ_0 несколько превышают значения погрешностей σ для случая использования зависимостей вида (6) со специально подобранными для каждого бассейна значениями ее параметров. Отметим, однако, что значения σ_0 достаточно малы по сравнению со значениями порядков рек N. Вычисленная по всем 274 водосборам общая средняя квадратическая погрешность σ_0 формулы (12) равна 0,27. Это позволяет использовать ее для определения порядка реки без предварительного учета особенностей ее водосбора.

Таким образом, порядок реки является характеристикой размера элементов структуры русловых потоков, мерой их подобия в отношении изменения гидрографических, гидрологических параметров речного бассейна. В частности, существует закономерное увеличение площади водосбора F при возрастании порядка реки N. Верно и обратное утверждение: чем больше площадь водосбора, тем больше река, которая может сформироваться в ее пределах. При F = const порядок реки является возрастающей функцией густоты речной сети: чем больше d, тем больше N. Густота речной сети определяет условия изменения характеристик речного стока по длине русловых систем. При прочих равных условиях большим значениям густоты речной сети соответствуют более полноводные реки. Учет фрактальных особенностей русловых систем открывает перспективы развития методов гидрологических расчетов и прогнозов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. N. Y. : Freeman, 1982. (Пер. на рус.: Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. Ижевск : Изд-во РХД, 2002).
2. *Алексеевский Н.И., Айбулатов Д.Н., Косицкий А.Г.* Масштабные эффекты изменения стока в русловой сети территории // География, Общество, Окружающая среда. Т. VI. М. : Городец, 2004. С. 345−374.
3. *Хортон Р.* Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. М. : Иностр. лит., 1948. 158 с.
4. *Философов В.П.* О значении порядков долин и водораздельных линий при геолого-географических исследованиях // Вопросы морфометрии. Вып. 2. Саратов : Изд-во СГУ, 1967. С. 4−6.
5. *Scheidegger A.E.* Theoretical geomorphology. Berlin : Springer, 1961. 333 p.
6. *Федер Е.* Фракталы. М. : Мир, 1991. 254 с.
7. *Михайлов В.Н., Добровольский А.Д., Добролюбов С.А.* Гидрология. М. : Высш. шк., 2005. 462 с.

Статья представлена научной редакцией «Науки о Земле» 29 марта 2013 г.