ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2013 Математика и механика № 3(23)

УДК 514.754.7

М.С. Бухтяк

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЛОЖЕННЫХ КОВЕКТОРОВ

Данная работа продолжает серию публикаций автора, посвященных погружениям различных многообразий в точечно-векторные пространства (см., например, [2,3,7]). Для исходного трехмерного аффинного пространства строится шестимерное точечно-векторное пространство D_6, точка которого – приложенный ковектор, а вектор – упорядоченная пара, составленная из вектора и ковектора. Гиперповерхность полученного пространства снабжена псевдоримановой метрикой, индуцированной естественной метрикой пространства D_6. Построена связность гиперповерхности, названная «естественной», и связность Леви-Чивита. Исследованы геодезические линии обеих связностей (для первой из них – до полной характеризации).

Ключевые слова: *ковектор, псевдориманово пространство, связность Леви-Чивита, геодезические.*

1. Операции над векторами и ковекторами

Пусть V – линейное 3-пространство над R и V^* – сопряженное ему пространство ковекторов.

Множество реперов пространства V обозначим E. Символ $<,>$ обозначает свёртку вектора и ковектора. Пусть $\boldsymbol{e}=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ – базис пространства V, $\boldsymbol{e}^*=\left(\underline{e}^1,\underline{e}^2,\underline{e}^3\right)^{\mathrm{T}}$ – базис сопряженного пространства V^*. Сопряжённость базисов означает, что

$$<\overline{e}_i,\underline{e}^j>=<\underline{e}^j,\overline{e}_i>=\delta_i^j \quad (i,j=1,2,3).$$

Примем интерпретацию ковекторов, описанную в [5]. Тогда ковектор $\underline{b}=b_1\underline{e}^1+b_2\underline{e}^2+b_3\underline{e}^3$ интерпретируется упорядоченной парой параллельных плоскостей. Если первая из них $\Pi_{(1)}$ проходит через начало координат O, то она и вторая ($\Pi_{(2)}$) задаются соответственно уравнениями

$$\Pi_{(1)}:\ b_1x^1+b_2x^2+b_3x^3=0,$$
$$\Pi_{(2)}:\ b_1x^1+b_2x^2+b_3x^3=1.$$

Пусть из точки O отложен и вектор $\overline{OA}=\overline{a}$. Если B – точка пересечения прямой (OA) и плоскости $\Pi_{(2)}$, то

$$\overline{OA}=<\overline{a}\underline{b}>\overline{OB},$$

что и придает наглядный смысл инварианту $\langle\overline{a}\underline{b}\rangle$. Ковектор (как и вектор) может быть отложен из любой точки, это не повлияет на истолкование геометрического смысла инварианта $<\overline{a}\underline{b}>$.

Таким образом, если базисы $\boldsymbol{e}=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$, $\boldsymbol{e}^*=\left(\underline{e}^1,\underline{e}^2,\underline{e}^3\right)^{\mathrm{T}}$ сопряжены (мы откладываем векторы первого базиса и первые плоскости пары параллельных плоскостей, изображающих ковектор второго базиса, из начала координат O), то ковектор $\underline{e}^1$ изобразится упорядоченной парой параллельных плоскостей $\left(\Pi^1_{(1)},\Pi^1_{(2)}\right)$, каждая из которых параллельна векторам $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$, причём первая проходит через $O(0,0,0)$, а вторая – через точку $(1,0,0)$. Проделав то же для остальных ковекторов, получим изображение репера $(O,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$ и корепера $\left(O,\underline{e}^1,\underline{e}^2,\underline{e}^3\right)$, где обозначены только вторые плоскости $\left(\Pi^1_{(2)},\Pi^2_{(2)},\Pi^3_{(2)}\right)$, изображающие базисные ковекторы (рис. 1).

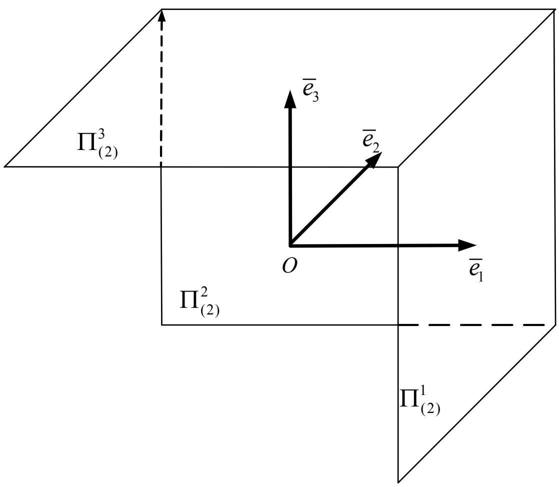

Рис. 1. Репер и корепер (условное изображение)

Определим отображения

$$f:V\times V\times V\times \mathrm{E}\to\mathbb{R},\quad f^*:V^*\times V^*\times V^*\times \mathrm{E}\to\mathbb{R}$$

следующим образом. Если

$$\overline{a}_i=a_i^j\overline{e}_j,\quad \underline{b}^i=b^i_j\underline{e}^j,\quad i,j=1,2,3,$$

то

$$f(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3,\boldsymbol{e})=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{vmatrix},\quad f^*(\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3,\boldsymbol{e})=\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1\\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2\\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3\end{vmatrix}.$$

Для введённых нами функций f и f^* примем (на наш взгляд, более удобные) обозначения $[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}}$ и $\left[\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3\right]_{\boldsymbol{e}}$. Таким образом,

$$[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}}=\det\left\|a_i^j\right\|.\ \left[\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3\right]_{\boldsymbol{e}}=\det\left\|b_i^j\right\|.$$

Определение. Величина $[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}}$ называется косым произведением векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3$ в базисе $\boldsymbol{e}$, а величина $\left[\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3\right]_{\boldsymbol{e}}$ – косым произведением ковекторов $\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3$ в том же базисе.

Запишем закон преобразования базисов, а также координат вектора $\left(x^i\right)$ и ковектора (y_i) с невырожденной матрицей $\boldsymbol{A}=\left\|A_{i'}^i\right\|$ и обратной к ней матрицей $\boldsymbol{A}^{-1}=\left\|A_i^{i'}\right\|$.

$$\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{e}\boldsymbol{A},\ \overset{*}{\boldsymbol{e}'}=\boldsymbol{A}^{-1}\overset{*}{\boldsymbol{e}},$$

или, в подробной записи,

$$\overline{e}_{i'}=\overline{e}_iA_{i'}^i,\quad \underline{e}^{i'}=A_i^{i'}\underline{e}^i,\quad x^{i'}=A_i^{i'}x^i,\quad y_{i'}=y_iA_{i'}^i. \tag{*}$$

Эти объекты преобразуются по правилу

$$[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}'}=A_{1'}^iA_{2'}^jA_{3'}^k\left[\overline{a}_i,\overline{a}_j,\overline{a}_k\right]_{\boldsymbol{e}}=\det(\boldsymbol{A})\cdot[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}};$$

$$\left[\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3\right]_{\boldsymbol{e}'}=A_i^{1'}A_j^{2'}A_k^{3'}\left[\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3\right]_{\boldsymbol{e}}=\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot\left[\underline{b}^1,\underline{b}^2,\underline{b}^3\right]_{\boldsymbol{e}}.$$

Определим операцию ***векторного умножения*** над ковекторами $\underline{x}=x_i\underline{e}^i$, $\underline{y}=y_i\underline{e}^i$ в базисе $\boldsymbol{e}$ следующим образом:

$$\left[\underline{x},\underline{y}\right]_{\boldsymbol{e}}\triangleq\begin{vmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}\in V. \tag{1.1}$$

Из (*) следует, что при преобразовании базиса $\overline{e}_{i'}=\overline{e}_iA_{i'}^i$

$$\left[\underline{x},\underline{y}\right]_{\boldsymbol{e}'}=\left[\underline{x},\underline{y}\right]_{\boldsymbol{e}}\det\left\|A_{i'}^i\right\|=\left[\underline{x},\underline{y}\right]_{\boldsymbol{e}}\det(\boldsymbol{A}). \tag{1.2}$$

Таким образом, результат векторного умножения ковекторов есть вектор, свертка которого с каждым из ковекторов-сомножителей равна нулю. В интерпретации ковекторов, предложенной в [5], вектор $\left[\underline{x},\underline{y}\right]$ параллелен плоскостям, изображающим первый ковектор, и плоскостям, изображающим второй ковектор. Операция векторного умножения ковекторов относительно инвариантна, если в V действует полная линейная группа, и инвариантна относительно специальной линейной группы. Для характеризации нормировки вектора $\left[\underline{x},\underline{y}\right]$ в этом последнем случае рассмотрим отображение

$$\varphi\left(\underline{x},\underline{y},\boldsymbol{e},t\right)=t\left[\underline{x},\underline{y}\right]_{\boldsymbol{e}},\ t\in\mathbb{R}.$$

Для тройки векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3$ тогда получаем равенство

$$[\varphi(\overline{a}_2,\overline{a}_3,\boldsymbol{e},t),\varphi(\overline{a}_3,\overline{a}_1,\boldsymbol{e},t),\varphi(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\boldsymbol{e},t)]_{\boldsymbol{e}}-[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}}^2=\left(t^3-1\right)[\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3]_{\boldsymbol{e}}^2.$$

Нуль в правой части равенства мы и получаем только при $t=1$.

Определим операцию ***ковекторного умножения*** над векторами $\overline{x} = x^i \overline{e}_i$, $\overline{y} = y^i \overline{e}_i$ в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$[\overline{x}, \overline{y}]_{\boldsymbol{e}} \triangleq \begin{vmatrix} \overline{e}^1 & \overline{e}^2 & \overline{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} \in V^* .$$

При тех же условиях, что справедливы для (3), мы констатируем, что

$$[\overline{x}, \overline{y}]_{\boldsymbol{e}'} = [\overline{x}, \overline{y}]_{\boldsymbol{e}} \det \left\| A_i^{i'} \right\| = [\overline{x}, \overline{y}]_{\boldsymbol{e}} \det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right).$$

Пусть имеем аффинное пространство A_3 с репером

$$\{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\} .$$

Для ковектора $\underline{b} = b_1 \underline{e}^1 + b_2 \underline{e}^2 + b_3 \underline{e}^3$ в A_3 примем геометрическую интерпретацию [5] посредством класса аффинной эквивалентности пар параллельных плоскостей с представителем в виде пары

$$\Pi_1 : \ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0,$$
$$\Pi_2 : \ b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 1.$$

В этом случае скажем, что ковектор $\underline{b}$ отложен из точки O или что мы рассматриваем приложенный ковектор $(O, \underline{b})$. Пусть из точки O отложен и вектор $\overline{OA} = \overline{a}$. Если B – точка пересечения прямой (OA) и плоскости Π_2 , то

$$\overline{OA} = < \overline{a}\underline{b} > \overline{OB} ,$$

что и придает наглядный смысл инварианту $\langle \overline{a}\underline{b} \rangle$. Ковектор может быть отложен из любой точки.

2. Пространство D_6

Составим шестимерное линейное пространство $\left(V \times V^*, \mathbb{R}, +, \cdot\right)$ следующим образом: вектор в $V \times V^*$ есть упорядоченная пара $\overline{\alpha} = (\overline{a}, \underline{b})$, сложение и умножение на скаляр – покомпонентные. С каждым вектором $\overline{\alpha} = (\overline{a}, \underline{b})$ связывается число

$$\overline{\alpha}^2 = < \overline{a}\underline{b} > ,$$

которое мы называем (псевдо) скалярным квадратом вектора $\overline{\alpha}$. Пространство $V \times V^*$ с указанным скалярным квадратом имеет структуру пространства R_6^3. Если в некотором базисе $(\overline{e}_i)$ и взаимном базисе $\left(\underline{e}^i\right)$ имеем $\overline{a} = a^i \overline{e}_i$, $\underline{b} = b_i \underline{e}^i$, то

$$\overline{\alpha}^2 = a^i b_i .$$

Для квадратичной формы (1) полярной билинейной формой является

$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = \frac{1}{2}\left(< \overline{a}\underline{p} > + < \overline{c}\underline{b} >\right),$$

где $\overline{\alpha} = (\overline{a}, \underline{b})$, $\overline{\beta} = \left(\overline{c}, \underline{p}\right)$.

Если базис-строка $\boldsymbol{e} = (\overline{e}_i)$ подвергается линейному преобразованию

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}\boldsymbol{A},$$

то вектор $\overline{\alpha} = (\overline{a}, \underline{b})$ переходит в вектор

$$\overline{\alpha}' = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\overline{a}, \underline{b}\boldsymbol{A}\right).$$

Таким образом, в линейном пространстве $V \times V^*$ действует 9-членная группа преобразований, изоморфная группе матриц

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & 0 \\ 0 & \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь структуру $\left(U \times V_3^*, V_3 \times V_3^*, \varphi\right)$, где U – точечное множество аффинного пространства A_3, V_3 – его векторное пространство. Элементы множества $U \times V_3^*$ называем точками и обозначаем $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$,…. Отображение φ упорядоченной паре $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x} = (A, \underline{a})$, $\boldsymbol{y} = (B, \underline{b})$, сопоставляет вектор $\overline{\boldsymbol{xy}} \in V_3 \times V_3^*$ по правилу

$$\overline{\boldsymbol{xy}} = \left(\overline{AB}, \underline{b} - \underline{a}\right).$$

Нетрудно проверить, что для построенной структуры выполнены аксиомы точечно-векторного пространства [1]. Построенное здесь шестимерное пространство будем обозначать D_6.

Как отмечено выше, приложенный ковектор аффинного пространства A_3 интерпретируется парой $(M, \underline{a})$, состоящей из точки M и не проходящей через нее плоскости Π – второй плоскости, изображающей ковектор $\underline{a}$ [5] (первая плоскость, изображающая ковектор, проходит через M). Пусть из точки O отложены вектор $\overline{OA} = \overline{a}$ и ковектор $(O, \underline{b})$. Прямая линия пространства D_6 интерпретируется как прямолинейный ряд точек в пространстве A_3 и пучок плоскостей этого же пространства, находящихся в аффинном соответствии.

2-плоскость пространства D_6 задается параметрическим уравнением

$$\left(\overline{M}, \underline{Y}\right) = \left(\overline{M}, \underline{Y}^0\right) + u\left(\overline{a}, \underline{p}\right) + v\left(\overline{b}, \underline{q}\right). \tag{2.1}$$

Необходимое и достаточное ограничение на направляющие векторы:

$$Rang\left\{\left(\overline{a}, \underline{p}\right), \left(\overline{b}, \underline{q}\right)\right\} = 2.$$

Будем говорить, что плоскость (2.1) есть плоскость $L(n, m)$, если

$$Rang\left\{\overline{a}, \overline{b}\right\} = n, \ Rang\left\{\underline{p}, \underline{q}\right\} = m.$$

Ясно, что $(n, m) \in \{(2,2), (2,1), (2,0), (1,2), (1,1), (0,2)\}$. Ясно также, что плоскость $L(2,2)$ интерпретируется как плоскость в A_3, натянутая на $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и 2-семейство ковекторов $\underline{y} = \underline{Y}^0 + u\underline{p} + v\underline{q}$, находящихся в аффинном соответствии. Остальные плоскости $L(n,m)$ отличаются лишь понижением размерности либо одного из семейств (точек либо ковекторов), либо обоих сразу (для $L(1,1)$). Однако больший интерес представляет другая интерпретация.

Именно, пусть точка M совмещена с вершиной O репера. Пусть к этой же точке приложен и ковектор $\underline{y}$. Тогда (2.1) есть параметрическое уравнение 2-семейства, образующий элемент которого состоит из точки

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + u\overline{a} + v\overline{b} \qquad (2.2)$$

и плоскости

$$\left\langle \underline{Y}^0 + u\underline{p} + v\underline{q}, \overline{x} \right\rangle = 1 \,. \qquad (2.3)$$

Плоскости (2.3) образуют связку с центром, который определяется системой уравнений

$$\left\langle \underline{Y}^0 \overline{x} \right\rangle - 1 = \left\langle \underline{p}\overline{x} \right\rangle = \left\langle \underline{q}\overline{x} \right\rangle = 0 \,,$$

и с неоднородными координатами u , v в связке. В то же время u , v есть не что иное, как неоднородные координаты несобственной прямой, по которой плоскость (2.3) пересекает несобственную плоскость. Таким образом, (2.2) и (2.3) задают аффинное отображение точек плоскости $\left(\overline{M} - \overline{M}_0, \overline{a}, \overline{b}\right) = 0$ в тангенциальную несобственную плоскость пространства A_3 . Не составляет особого труда построить интерпретацию остальных плоскостей $L(n,m)$.

3. Подвижной репер в пространстве D_6

В пространстве A_3 подвижной репер $\{M, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ имеет деривационные формулы

$$d\overline{M} = \omega^i \overline{e}_i, \quad d\overline{e}_i = \omega_i^j \overline{e}_j \quad (i, j = 1,2,3) \,, \qquad (3.1)$$

где ω_j^i – формы Пфаффа [4] , подчиненные уравнениям структуры

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j, k = 1,2,3 \,. \qquad (3.2)$$

В пространстве D_6 рассматриваем репер

$$\left\{ \boldsymbol{x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \right\}, \qquad (3.3)$$

где $$\boldsymbol{x} = \left(\overline{M}, \underline{e}^3\right), \ \varepsilon_i = \left(\overline{e}_i, \underline{0}\right), \ \varepsilon^i = \left(\overline{0}, \underline{e}^i\right), \ i = 1,2,3 \,. \qquad (3.4)$$

Поскольку для векторов пространства D_6 операции определены покомпонентно, то деривационные формулы подвижного репера (3.3) имеют (в силу (3.1) и (3.4)) вид

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= \omega^i \varepsilon_i - \omega_i^3 \varepsilon^i, \\ d\varepsilon_i &= \omega_i^j \varepsilon_j, \, d\varepsilon^i = -\omega_j^i \varepsilon^j. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Формулам (3.5) соответствуют следующие матрицы коэффициентов:

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}, \qquad (3.6)$$

$$\Theta = \begin{Vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{Vmatrix}. \tag{3.7}$$

Поскольку пространство D_6 – точечно-векторное, то базовая форма θ и слоевая форма Ω определяют на нашем пространстве локально-плоскую аффинную связность, что, впрочем, подтверждается и непосредственным вычислением с использованием (3.2), (3.6) и (3.7):

$$d\vartheta - \vartheta \wedge \Theta = 0, \quad d\Theta - \Theta \wedge \Theta = 0 .$$

Инфинитезимальная (псевдоевклидова) метрика определена квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = -\left(\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 + \omega^3\omega_3^3\right). \tag{3.8}$$

Матрица указанной квадратичной формы имеет вид

$$g = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.9}$$

Без труда проверяется, что обнаруженная нами связность ∇ пространства D_6 является связностью Леви-Чивита для инфинитезимальной метрики (3.8). В самом деле, из (3.7) и (3.9) видно, что

$$\nabla g = dg - \theta g - (\theta g)^{\mathrm{T}} = 0 .$$

4. Гиперповерхность в пространстве D_6

Рассмотрим в пространстве D_6 гиперповерхность Σ, для которой вершина репера – текущая точка. Тогда 6 пфаффовых форм ω^i, ω_3^i окажутся связанными одним линейным уравнением вида

$$\lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2 + \lambda_3\omega^3 + \lambda^1\omega_1^3 + \lambda^2\omega_2^3 + \lambda^3\omega_3^3 = 0 ,$$

постоянного ранга равного единице. Мы предполагаем, что элемент, состоящий из точки и направляющего ковектора $\underline{e}^3$ (то есть ковектора, определённого с точностью до произвольного ненулевого множителя), зависит от 5 параметров, то есть

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \neq 0 . \tag{4.1}$$

Тогда последнее уравнение перепишется в виде

$$\omega_3^3 = a_i\omega^i + a^1\omega_1^3 + a^2\omega_2^3, \; i = 1,2,3 . \tag{4.2}$$

Требуем полной интегрируемости уравнения (4.2), для чего присоединяем к нему результат внешнего дифференцирования:

$$\left(da_i - a_j\omega_i^j\right)\wedge\omega^i + \left(da^\alpha + a^\beta\omega_\beta^\alpha - a^\alpha\omega_3^3 - \omega_3^\alpha\right)\wedge\omega_\alpha^3 = 0,\qquad i = 1,2,3;\ \ \alpha = 1,2. \tag{4.3}$$

Разрешая последнее уравнение по лемме Картана и полагая $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$, получим в обозначениях [4] соотношения

$$\delta a_i = a_\alpha\pi_i^\alpha,\quad \delta a^\alpha = \pi_3^\alpha - a^\beta\pi_\beta^\alpha,\quad i = 1,2,3;\ \alpha,\beta = 1,2\,. \tag{4.4}$$

Эти соотношения позволяют провести частичную специализацию репера

$$a^1 = a^2 = 0,\quad \pi_3^1 = \pi_3^2 = 0\,. \tag{4.5}$$

Смысл проведённой частичной специализации, как видно из (4.2) и (3.1), в том, что вследствие её имеем

$$\left(d\overline{M} = \overline{0}\right) \Rightarrow \left(\langle d\overline{e}_3, \underline{e}^3\rangle = 0\right).$$

Уравнение (4.3) теперь принимает вид

$$\left(da_i - a_j\omega_i^j\right)\wedge\omega^i - \omega_3^\alpha\wedge\omega_\alpha^3 = 0,\qquad i,j = 1,2,3;\ \ \alpha = 1,2.$$

Вследствие выбора базисных форм и частичной специализации репера можно записать, что

$$d\boldsymbol{x} = \left(d\overline{M}, d\underline{e}^3\right) = \omega^i\left(\overline{e}_i, -a_i\underline{e}^3\right) - \omega_\alpha^3\left(\overline{0}, \underline{e}^\alpha\right),\ \ i = 1,2,3;\ \alpha = 1,2\,. \tag{4.6}$$

Нетрудно заметить, что базис касательной плоскости составляют векторы

$$\boldsymbol{e}_i = \left(\overline{e}_i, -a_i\underline{e}^3\right),\ \ i = 1,2,3,\quad \boldsymbol{e}_4 \equiv \boldsymbol{e}^1 = \left(\overline{0}, \underline{e}^1\right),\quad \boldsymbol{e}_5 \equiv \boldsymbol{e}^2 = \left(\overline{0}, \underline{e}^2\right).$$

Теперь в исходном аффинном пространстве A_3 деривационные формулы репера имеют вид

$$\begin{aligned}
&d\overline{M} = \omega^i\overline{e}_i,\quad d\overline{e}_\alpha = \omega_\alpha^i\overline{e}_i,\quad d\overline{e}_3 = \omega_3^\alpha\overline{e}_\alpha + a_i\omega^i\overline{e}_3,\\
&d\underline{e}^\alpha = -\omega_i^\alpha\underline{e}^i,\quad d\underline{e}^3 = -\omega_\alpha^3\underline{e}^\alpha - a_i\omega^i\underline{e}^3,\\
&i = 1,2,3;\ \alpha = 1,2.
\end{aligned}$$

Построим геометрическую интерпретацию касательной гиперплоскости, основываясь на (4.8). Зафиксировав параметры – как базовые так и слоевые – получим неподвижный репер в пространстве D_6. Именно,

$$\boldsymbol{x}_0 = \left(\overline{M}_0, \underline{e}_0^3\right),\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_i = \left(\overline{e}_i^0, \underline{0}\right),\ \ \boldsymbol{\varepsilon}^i = \left(\overline{0}, \underline{e}_0^1\right),\ \ i = 1,2,3\,.$$

Параметрические уравнения касательной гиперплоскости (при помещении нового начала координат О в точку M_0) имеют вид

$$\left(\overline{R}, \underline{y}\right) = \left(\overline{O}, \underline{e}_0^3\right) + u^i\left(\overline{e}_i^0, -a_i^0\underline{e}_0^3\right) + v_\alpha\left(\overline{0}, \underline{e}_0^\alpha\right),\qquad i = 1,2,3;\ \ \alpha = 1,2.$$

Здесь a_i^0 – значения коэффициентов a_i при фиксации всех параметров. Соответственно в пространстве A_3 получим параметрические уравнения

$$\overline{R} = u^i \overline{e}_i^{\,0}, \quad \underline{y} = -v_1 \underline{e}_0^{\,1} - v_2 \underline{e}_0^{\,2} + \left(1 - a_i^0 u^i\right) \underline{e}_0^{\,3}, \quad i = 1,2,3 .$$

Эти уравнения задают отображение: каждой точке $\overline{R} = u^i \overline{e}_i^{\,0}$ сопоставляется 2-семейство ковекторов (параметры – v_1, v_2), чьи вторые плоскости имеют уравнения

$$v_1 x^1 + v_2 x^2 + \left(a_i^0 u^i - 1\right) x^3 + 1 = 0 .$$

Данные плоскости образуют связку с центром

$$C\left(0, 0, \frac{1}{1 - a_i^0 u^i}\right).$$

При этом точкам $\overline{R} = x^i \overline{e}_i^{\,0}$, принадлежащим плоскости $\pi(\lambda)$, заданной уравнением

$$a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 + a_3^0 x^3 = \lambda = const ,$$

отвечает одна и та же точка $C(\lambda) = \left(0, 0, \frac{1}{1-\lambda}\right)$. Указанное соответствие и даёт описание касательной гиперплоскости.

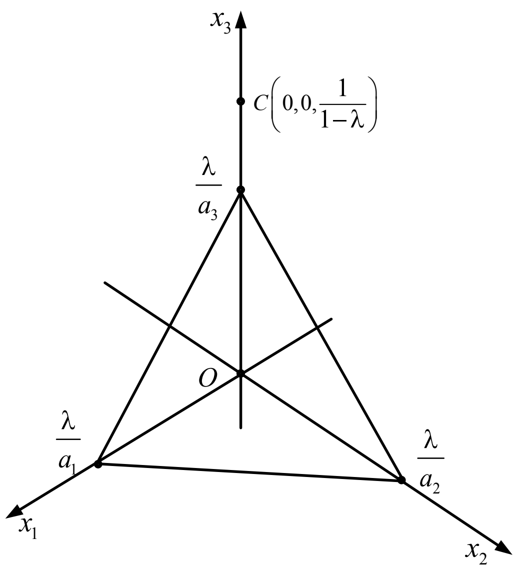

Рис. 2. Вторая плоскость из интерпретации касательной гиперплоскости

Соотношения (4.4) после частичной специализации репера принимают вид

$$\delta a_\beta = a_\alpha \pi_\beta^\alpha, \quad \delta a_3 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 .$$

Величина a_3 есть инвариант. Для его характеризации рассмотрим распределение

$$\omega^1 = \omega^2 = 0 ,$$

в общем случае неинтегрируемое. Вдоль этого подмногообразия имеем соотношения

$$\langle d\overline{e}_3, \underline{e}^3 \rangle = a_3 \langle d\overline{M}, \underline{e}^3 \rangle .$$

Матрица Грама для базиса касательной плоскости имеет вид

$$\Gamma = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -2a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} . \qquad (4.7)$$

Заметим, что ранг матрицы Γ равен 5 при $a_3 \neq 0$ и 4 при $a_3 = 0$, других же значений он не принимает.

Квадратичная метрика пространства D_6 индуцирует нормаль гиперповерхности, натянутую на вектор

$$\boldsymbol{n} = \left(\overline{e}_3, a_i \underline{e}^i \right) . \qquad (4.8)$$

Мы, однако, нормализуем нашу поверхность вектором

$$\boldsymbol{e}_6 \equiv \boldsymbol{e}^3 = \left(\overline{0}, \underline{e}^3 \right) .$$

В репере (3.4) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -a_1), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -a_2), \\ \boldsymbol{e}_3 &= (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -a_3), \\ \boldsymbol{e}_4 &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0), \\ \boldsymbol{e}_5 &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0), \\ \boldsymbol{e}_6 &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1). \end{aligned}$$

Теперь (4.8) вместе с результатом дифференцирования векторов $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_6$ приводят к деривационным формулам

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= \omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega^3 \boldsymbol{e}_3 - \omega_1^3 \boldsymbol{e}^1 - \omega_2^3 \boldsymbol{e}^2, \\ d\boldsymbol{e}_i &= \omega_i^j \boldsymbol{e}_j + a_i \omega_\alpha^3 \boldsymbol{e}^\alpha - \Delta a_i \boldsymbol{e}^3, \\ d\boldsymbol{e}^i &= -\omega_i^i \boldsymbol{e}^i, \;\; i, j = 1, 2, 3; \;\; \alpha = 1, 2, \end{aligned} \qquad (4.9)$$

где

$$\Delta a_i = da_i - a_j \omega_i^j - a_i \omega_3^3 . \qquad (4.10)$$

Для дальнейшего полезна формула

$$\begin{aligned} d(\Delta a_i) &= -da_j \wedge \omega_i^j - a_k \omega_i^j \wedge \omega_j^k - da_i \wedge \omega_3^3 - a_i \omega_3^j \wedge \omega_j^3 = \\ &= \omega_i^j \wedge \Delta a_j + \omega_3^3 \wedge \Delta a_i + a_i \omega_\alpha^3 \wedge \omega_3^\alpha , \\ & i, j = 1, 2, 3; \; \alpha = 1, 2. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Введём в рассмотрение вектор-строку из пфаффовых форм

$$\theta = \left(\omega^1 \quad \omega^2 \quad \omega^3 \quad -\omega_1^3 \quad -\omega_2^3 \right) . \qquad (4.12)$$

Матрица коэффициентов деривационных формул (4.9) имеет вид

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & a_1\omega_1^3 & a_1\omega_2^3 & -\Delta a_1 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & a_2\omega_1^3 & a_2\omega_2^3 & -\Delta a_2 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & a_3\omega_1^3 & a_3\omega_2^3 & -\Delta a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{Vmatrix}. \tag{4.13}$$

Как видно из (4.12) и (4.13), вторая квадратичная форма гиперповерхности есть форма

$$\boldsymbol{II} = -\omega^1\Delta a_1 - \omega^2\Delta a_2 - \omega^3\Delta a_3 + \omega_3^1\omega_1^3 + \omega_3^2\omega_2^3 . \tag{4.14}$$

Форму-строку (4.12) рассматриваем как базовую. Тогда слоевая форма есть матричнозначная форма

$$\Omega = \begin{Vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & a_1\omega_1^3 & a_1\omega_2^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & a_2\omega_1^3 & a_2\omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & a_3\omega_1^3 & a_3\omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 \end{Vmatrix}. \tag{4.15}$$

Предложение. Матричнозначные формы (4.12) и (4.15) определяют на нашей гиперповерхности аффинную связность.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$d\theta - \theta\wedge\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d\Omega - \Omega\wedge\Omega = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(da_1 - a_i\omega_1^i - a_1\omega_3^3\right)\wedge\omega_1^3 & \left(da_1 - a_i\omega_1^i - a_1\omega_3^3\right)\wedge\omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \left(da_2 - a_i\omega_2^i - a_2\omega_3^3\right)\wedge\omega_1^3 & \left(da_2 - a_i\omega_2^i - a_2\omega_3^3\right)\wedge\omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \left(da_3 - a_i\omega_3^i - a_3\omega_3^3\right)\wedge\omega_1^3 & \left(da_3 - a_i\omega_3^i - a_3\omega_3^3\right)\wedge\omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^1\wedge\omega_1^3 & \omega_3^1\wedge\omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^2\wedge\omega_1^3 & \omega_3^2\wedge\omega_2^3 \end{Vmatrix}. \tag{4.16}$$

Если форма кривизны связности (4.16) нулевая, то

$$\begin{aligned} & da_i - a_j\omega_i^j - a_i\omega_3^3 = 0,\ \ i, j = 1, 2, 3, \\ & \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Внешнее дифференцирование этих соотношений приводит к тождествам. Матричнозначная форма (4.13) при выполнении условий (4.17) принимает вид

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & a_1\omega_1^3 & a_1\omega_2^3 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & a_2\omega_1^3 & a_2\omega_2^3 & 0 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & a_3\omega_1^3 & a_3\omega_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{Vmatrix}.$$

Наша гиперповерхность в этом случае есть гиперплоскость.

Определение. Связность ∇, определяемая формами θ и Ω, называем ***естественной связностью***.

Решим вопрос о геодезических линиях естественной связности, следуя [8]. Линия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ называется геодезической, если параллельно переносится вектор

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\theta^I \boldsymbol{e}_I}{dt} = \left(\frac{\theta^I}{dt}\right)\boldsymbol{e}_I, \quad I = 1,..,5 .$$

Условие параллельного переноса имеет вид $\nabla\left(\frac{\theta^I}{dt}\right) = \varphi\frac{\theta^I}{dt}$, или, иначе, $\Delta\theta^I = \varphi\theta^I$.

Окончательно уравнения геодезических запишем в виде

$$d\theta^I + \theta^J \Omega_J^I = \varphi\theta^I, \quad I, J = 1,...,5, \tag{4.18}$$

где φ – некоторая форма Пфаффа. Дифференцирование в (4.18) обыкновенное. Учитывая (4.12) и (4.15), приводим уравнения геодезических к виду

$$\begin{aligned} &d\omega^i + \omega^j \omega_j^i = \varphi\omega^i, \\ &-d\omega_\alpha^3 + \omega_\alpha^i \omega_i^3 = -\varphi\omega_\alpha^3, \\ &i, j = 1,2,3; \alpha = 1,2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Для прояснения геометрического смысла полученных уравнений заметим, что

$$\begin{aligned} &d^2\overline{M} = \left(d\omega^i + \omega^j \omega_j^i\right)\overline{e}_i, \\ &d^2\underline{e}^3 = \left(-d\omega_i^3 + \omega_j^3 \omega_i^j\right)\underline{e}^i, \\ &i, j = 1,2,3. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Если выполнено (4.19), и только в этом случае, (4.20) принимает вид

$$\begin{aligned} &d^2\overline{M} = \varphi d\overline{M}, \\ &d^2\underline{e}^3 = -\varphi d\underline{e}^3 + \left(-d\omega_3^3 + \omega_i^3 \omega_3^i + \varphi\omega_3^3\right)\underline{e}^3, \\ &i = 1,2,3; \ \alpha = 1,2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Предложение 1. Линия на гиперповерхности пространства D_6 является ∇-геодезической тогда и только тогда, когда вдоль неё выполнены следующие условия:

1) точка M пробегает прямую;

2) вектор $\left[d\underline{e}^3, \underline{e}^3\right]$ сохраняет постоянное направление;

3) $d < d\overline{M}, d\underline{e}^3 > \equiv 0\left(\mathrm{mod} < d\overline{M}, \underline{e}^3 >\right)$.

Доказательство. Перепишем (4.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} &d^2\overline{M} = \varphi\, d\overline{M}, \quad d^2\underline{e}^3 = -\lambda d\underline{e}^3 + L\underline{e}^3, \\ &\varphi = \lambda. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Здесь $L = -d\omega_3^3 + \omega_i^3 \omega_3^i + \varphi\omega_3^3$.

Пункт 1) сомнений не вызывает, как и пункт 2). Для доказательства пункта 3) заметим, что согласно (4.22)

$$d < d\overline{M}, d\underline{e}^3 >= (\varphi - \lambda) < d\overline{M}, d\underline{e} > + L < d\overline{M}, \underline{e}^3 >,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

5. Связность Леви-Чивита для гиперповерхности общего вида ($a_3 \neq 0$)

Ковариантное дифференцирование метрического тензора приводит к равенству

$$\nabla g = dg - \Omega g - (\Omega g)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \Delta a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta a_2 & 0 & 0 \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & 2\Delta a_3 & -\omega_3^1 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & -\omega_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_3^2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Обозначим $\overline{\Omega}$ – слоевую форму, которая определит для метрического тензора g связность Леви-Чивита. Тогда разность форм $\overline{\Omega}$ и Ω , как показывает непосредственный подсчёт, есть форма аффинной деформации

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2a_3}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \Delta a_1 & a_1\Delta a_1 & a_2\Delta a_1 \\ 0 & 0 & \Delta a_2 & a_1\Delta a_2 & a_2\Delta a_2 \\ 0 & 0 & \Delta a_3 & a_1\Delta a_3 & a_2\Delta a_3 \\ 0 & 0 & \omega_3^1 & a_1\omega_3^1 & a_2\omega_3^1 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & a_1\omega_3^2 & a_2\omega_3^2 \end{Vmatrix}.$$

Соответственно искомая слоевая форма имеет вид

$$\overline{\Omega} = \begin{Vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 + \dfrac{\Delta a_1}{2a_3} & a_1\omega_1^3 + \dfrac{a_1\Delta a_1}{2a_3} & a_1\omega_2^3 + \dfrac{a_2\Delta a_1}{2a_3} \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 + \dfrac{\Delta a_2}{2a_3} & a_2\omega_1^3 + \dfrac{a_1\Delta a_2}{2a_3} & a_2\omega_2^3 + \dfrac{a_2\Delta a_2}{2a_3} \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 + \dfrac{\Delta a_3}{2a_3} & a_3\omega_1^3 + \dfrac{a_1\Delta a_3}{2a_3} & a_3\omega_2^3 + \dfrac{a_2\Delta a_3}{2a_3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\omega_3^1}{2a_3} & \dfrac{a_1\omega_3^1}{2a_3} - \omega_1^1 & \dfrac{a_2\omega_3^1}{2a_3} - \omega_2^1 \\ 0 & 0 & \dfrac{\omega_3^2}{2a_3} & \dfrac{a_1\omega_3^2}{2a_3} - \omega_1^2 & \dfrac{a_2\omega_3^2}{2a_3} - \omega_2^2 \end{Vmatrix}. \tag{5.1}$$

Обозначим $\overline{\nabla}$ – оператор ковариантного дифференцирования для связности Леви-Чивита. Тогда, используя (5.1) и (4.14) и действуя так же, как и для естественной связности, можем записать уравнение геодезических в виде

$$\begin{gathered} d\omega^1 + \omega^i\omega_i^1 = \varsigma\omega^1, \quad d\omega^2 + \omega^i\omega_i^2 = \varsigma\omega^2, \quad d\omega^3 + \omega^i\omega_i^3 = \varsigma\omega^3 + \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}, \\ -d\omega_1^3 + \omega_1^\alpha\omega_\alpha^3 = -\varsigma\omega_1^3 + \frac{a_1}{2a_3}\boldsymbol{II}, \quad -d\omega_2^3 + \omega_2^\alpha\omega_\alpha^3 = -\varsigma\omega_2^3 + \frac{a_2}{2a_3}\boldsymbol{II}, \end{gathered} \tag{5.2}$$

где ς – некоторая пфаффова форма. Дифференцирование в этих формулах и всех последующих – обычное.

Для прояснения геометрического смысла полученных уравнений заметим, что из (4.9) следует

$$d^2\boldsymbol{x} = d^2\left(\overline{M}, \underline{e}^3\right) = \left(d\omega^1 + \omega^i\omega_i^1\right)\left(\overline{e}_1, -a_1\underline{e}^3\right) + \left(d\omega^2 + \omega^i\omega_i^2\right)\left(\overline{e}_2, -a_2\underline{e}^3\right) +$$
$$+\left(d\omega^3 + \omega^i\omega_i^3\right)\left(\overline{e}_3, -a_3\underline{e}^3\right) + \left(-d\omega_1^3 + \omega_1^i\omega_i^3\right)\left(\overline{0}, \underline{e}^1\right) +$$
$$\left(-d\omega_2^3 + \omega_2^i\omega_i^3\right)\left(\overline{0}, \underline{e}^2\right) + \boldsymbol{II}\left(\overline{0}, \underline{e}^3\right).$$

При выполнении условий (5.2) получим соотношение

$$d^2\boldsymbol{x} = \varsigma d\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}\boldsymbol{n}\ .$$

Развернутая запись последнего соотношения

$$d^2\left(\overline{M}, \underline{e}^3\right) = \varsigma d\left(\overline{M}, \underline{e}^3\right) + \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}\left(\overline{e}_3, a_i\underline{e}^i\right).$$

Покомпонентная запись последнего уравнения равносильна следующим уравнениям в пространстве A_3:

$$d^2\overline{M} = \varsigma d\overline{M} + \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}\overline{e}_3,$$
$$d^2\underline{e}^3 = \varsigma d\underline{e}^3 + \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}\left(a_1\underline{e}^1 + a_2\underline{e}^2 + a_3\underline{e}^3\right).$$

Исключение пфаффовой формы ς приводит к соотношениям, необходимо выполняющимся вдоль геодезических:

$$\left(d\overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3\right)\left(d^2\overline{M} - \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}\overline{e}_3\right) = \left(d^2\overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3\right)d\overline{M},$$
$$\left(d\overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3\right)\left(d^2\underline{e}^3 - \frac{\boldsymbol{II}}{2a_3}a_i\underline{e}^i\right) = \left(d^2\overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3\right)d\underline{e}^3. \quad (5.9)$$

Для завершения дополнения характеристики геодезических линий отметим, что ковектор $a_i\underline{e}^i$ есть ковекторная компонента вектора нормали $\boldsymbol{n} = \left(\overline{e}_3, a_i\underline{e}^i\right)$ гиперповерхности (введена в (4.8)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970. 528 с.
2. *Бухтяк М.С.* Естественная связность на гиперповерхности пространства B_6 // Геом. сб. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. Вып. 31. С. 51–57.
3. *Бухтяк М.С.* Об одном шестимерном пространстве // Геом. сб. Томск, 1982. Вып. 22. С. 51–61.
4. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
5. *Схоутен И.А, Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.-Л.: ГОНТИ, 1939. 181 с.
6. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. 303 с.

7. *Бухтяк М.С.* Интерпретация нуль-пар трехмерного центроаффинного пространства // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: ТГУ, 2001. С. 39–45.
8. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин: Калининский госуниверситет, 1977. 83 с.

Статья поступила 24.09.2012 г.

Bukhtyak M. S. ON A HYPERSURFACE IN THE SPACE OF APPLIED COVECTORS

The present paper continues a series of the author's publications devoted to immersions of various manifolds into point-vector spaces (see examples in the list of references [2,3,7]). A six-dimensional point-vector space *D*6 is constructed for the original three-dimensional affine space. A point of the space is an applied covector and a vector is an ordered couple composed of a vector and a covector. A hypersurface of the obtained space contains pseudo-Riemannian metrics induced by the intrinsic metrics of space *D*6. A connection of the hypersurface called natural has been built, as well as the Levi-Civita connection. Geodesic lines of both connections are examined (for the first one, up to the full characterization).

Keywords: covector, pseudo-Riemannian space, Levi-Civita connection, geodesic lines.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Tomsk State University)
E-mail: bukhtyakm@mail.ru