ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2013 Математика и механика № 3(23)

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, И.Э. Гриншпон

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, НОРМАЛЬНО ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕСЯ СВОИМИ ГОЛОМОРФАМИ[1]

Исследуются абелевы группы без кручения, разложимые в прямые суммы однородных групп, которые нормально определяются своими голоморфами. Изучаются также свойства нормальных абелевых подгрупп голоморфов абелевых групп без кручения.

Ключевые слова: *голоморф*, *почти голоморфно изоморфные группы*, *вполне разложимая группа*, *однородная группа*, *тип группы*.

Пусть G – абелева группа, $\Gamma(G)$ – ее голоморф, то есть полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Для групповой операции в группе $\mathrm{Aut}(G)$ пользуемся мультипликативной записью, а для групповых операций в G и $\Gamma(G)$ – аддитивной записью. Группу $\Gamma(G)$ можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар (g, φ), где $g\in G$, $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$. Групповая операция в $\Gamma(G)$ задается по правилу: $(g, \varphi) + (h, \psi) = (g + \varphi h, \varphi\psi)$ для любых (g, φ), $(h, \psi)\in\Gamma(G)$. Нейтральным элементом в $\Gamma(G)$ является элемент $(0, \varepsilon)$ (ε – тождественный автоморфизм), а элементом, противоположным элементу (g, φ), – элемент $(-\varphi^{-1}g, \varphi^{-1})$. Элементы вида (g, ε) образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G, а элементы вида $(0, \varphi)$ – подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Aut}(G)$. Будем отождествлять эти подгруппы с группами G и $\mathrm{Aut}(G)$ соответственно. Понятно, что $G\cap\mathrm{Aut}(G) = \{(0, \varepsilon)\}$. Часто вместо записи элементов группы $\Gamma(G)$ в виде (g, ε) и $(0, \varphi)$ будем просто писать g и φ соответственно.

Заметим, что если G – абелева группа, то она является максимальной абелевой подгруппой своего голоморфа $\Gamma(G)$. Действительно, если допустить существование абелевой подгруппы G_1 голоморфа $\Gamma(G)$ такой, что $G \subset G_1$ и $G \neq G_1$, то в G_1 есть элемент (g, σ), не принадлежащий G, а, значит, $\sigma \neq \varepsilon$. Тогда

$$(-g, \varepsilon) + (g, \sigma) = (0, \sigma)\in G_1.$$

В силу коммутативности G_1 имеем $(a, \varepsilon) + (0, \sigma) = (0, \sigma) + (a, \varepsilon)$ для любого элемента $a\in G$, то есть $\sigma a = a$ и, значит, $\sigma = \varepsilon$. Получили противоречие. Итак, G – максимальная абелева подгруппа своего голоморфа.

Отметим также, что если H – нормальная абелева подгруппа группы $\Gamma(G)$, H_1, Φ_1 – соответственно множества первых, вторых компонент элементов группы H, то H_1 – характеристическая подгруппа группы G (см. [1]), Φ_1 – нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(G)$.

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с нормальной определяемостью абелевых групп без кручения из некоторых классов своими голоморфами.

[1] Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»; работа выполнена также в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа *A определяется своим голоморфом* в некотором классе групп $\mathfrak{R}$, если любая группа B из этого класса, голоморфно изоморфная группе A, изоморфна группе A. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [2]. В [1] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [3–8]. Полезные результаты о голоморфах абелевых групп и голоморфах (аффинных группах) модулей содержатся в [14] и [15].

Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является понятие почти голоморфного изоморфизма. Группы A и B называются *почти голоморфно изоморфными*, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Понятно, что если две группы являются голоморфно изоморфными, то они почти голоморфно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно. Почти голоморфно изоморфные конечно порожденные абелевы группы исследовались в работе В. Миллса [2]. Почти голоморфно изоморфные абелевы p-группы изучались в работах [8] и [9]. Отметим, что если в некотором классе групп $\mathfrak{R}$ из почти голоморфного изоморфизма двух групп следует их изоморфизм, то всякая группа из класса $\mathfrak{R}$ определяется своим голоморфом в этом классе.

Будем говорить, что группа *G нормально определяется в классе* $\mathfrak{R}$ *своим голоморфом*, если для любой группы H из этого класса из почти голоморфного изоморфизма групп G и H следует изоморфизм самих групп G и H.

Важную роль при изучении голоморфов абелевых групп играют нормальные абелевы подгруппы голоморфов. Справедливы следующие результаты.

Лемма 1 [10]. *Если S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$, $(a, \sigma)\in S$, $g\in G$, то*

$$\sigma a - a \in S,\ (2a, \varepsilon)\in S,\ (0, \sigma^2)\in S; \tag{1}$$

$$\sigma g - g\in S; \tag{2}$$

$$\sigma(\sigma g - g) = \sigma g - g; \tag{3}$$

$$\sigma^n g = g + n(\sigma g - g); \tag{4}$$

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right); \tag{5}$$

$$2(\sigma a - a) = 0. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G, S_1 – множество первых компонент элементов группы S. Справедливы следующие утверждения*:

1) *S – группа без кручения*;

2) *если $S \neq 0$, то $S_1 \neq 0$.*

Доказательство. 1) Пусть $(a, \sigma)\in S$ и $n(a, \sigma) = (0, \varepsilon)$ для некоторого натурального числа n. Имеем (формула (5))

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right).$$

Так как G – группа без кручения, то из равенства (6) следует, что $\sigma a - a = 0$ и формула (5) принимает вид

$$n(a, \sigma) = (na, \sigma^n). \tag{7}$$

Итак, $(na, \sigma^n) = (0, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $na = 0$ и $\sigma^n = \varepsilon$. Значит, $a = 0$, так как G – группа без кручения. Покажем, что $\sigma = \varepsilon$. По формуле (4) $\sigma^n g = g + n(\sigma g - g)$ для любого $g \in G$. Учитывая, что $\sigma^n = \varepsilon$, получаем $g = g + n(\sigma g - g)$, то есть $n(\sigma g - g) = 0$. Так как G – группа без кручения, то $\sigma g - g = 0$ и, следовательно, $\sigma = \varepsilon$.

2) Пусть $(a, \sigma) \in S$ и $(a, \sigma) \neq (0, \varepsilon)$. Если $\sigma \neq \varepsilon$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $\sigma g - g \neq 0$. Применяя формулу (2), получим $\sigma g - g \in S$. Значит, $\sigma g - g \in S_1$ и $S_1 \neq 0$. Если же $\sigma = \varepsilon$, то $a \neq 0$ и S_1 также отлична от нуля. ■

Рассмотрим связи между типами элементов почти голоморфно изоморфных абелевых групп без кручения.

Напомним некоторые обозначения и термины из теории абелевых групп без кручения.

Пусть A – абелева группа, $a \in A$. Наибольшее неотрицательное целое число k, для которого уравнение $p^k x = a$ имеет решение, называется *p-высотой* элемента a в группе A (обозначение: $h_p^{(A)}(a)$ или $h_p(a)$). Если уравнение $p^k x = a$ имеет решение при любом натуральном k, то a называется *элементом бесконечной p-высоты*, то есть $h_p(a) = \infty$.

Пусть $\boldsymbol{X}$ – множество всех последовательностей вида $\chi = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$, где k_n – целое неотрицательное число или символ ∞ ($i \in \mathbb{N}$). Такие последовательности будем называть *характеристиками*.

В множестве $\boldsymbol{X}$ естественным образом вводится частичный порядок, а именно, $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots) \leq (l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполняется условие $k_i \leq l_i$. Относительно этого частичного порядка множество $\boldsymbol{X}$ является полной решеткой.

Пусть $\boldsymbol{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$ – множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Если A – абелева группа без кручения и $a \in A$, то *характеристика* $\chi_A(a)$ (или $\chi(a)$) элемента a в группе A – это такая характеристика $\chi = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$, в которой каждое k_n есть p_n-высота $h_{p_n}^A(a)$ элемента a в группе A ([13, с. 129]). Заметим, что, согласно определению, характеристика нулевого элемента – это последовательность $(\infty, \ldots, \infty, \ldots)$.

Две характеристики $\chi_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi_1 = (l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ считаются *эквивалентными* в том и только в том случае, когда множество $\mathrm{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid k_n \neq l_n\}$ конечно, причем, если $k_n \neq l_n$, то $k_n \neq \infty$ и $l_n \neq \infty$.

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если характеристика элемента a абелевой группы без кручения A принадлежит типу $\boldsymbol{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\boldsymbol{t}$ (что записывается следующим образом: $\boldsymbol{t}_A(a) = \boldsymbol{t}$ или $\boldsymbol{t}(a) = \boldsymbol{t}$, если понятно, о какой группе A идет речь).

Тип $\boldsymbol{t}$ называется *p_n-делимым* ($p_n \in \mathbf{P}$), если для всякой характеристики $\chi = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$, принадлежащей типу $\boldsymbol{t}$, имеем $k_n = \infty$.

Множество типов будем рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного отношения порядка (то есть $\boldsymbol{t}_1 \leq \boldsymbol{t}_2$ тогда и только тогда, когда существуют характеристики χ_1 и χ_2, принадлежащие типам $\boldsymbol{t}_1$ и $\boldsymbol{t}_2$, соответственно такие, что $\chi_1 \le \chi_2$). Частично упорядоченное множество всех типов является полной решеткой.

Абелева группа без кручения, все ненулевые элементы которой имеют один и тот же тип $\boldsymbol{t}$, называется *однородной* ([13, с. 130, 131]). Чтобы подчеркнуть, что все ненулевые элементы однородной группы A имеют фиксированный тип $\boldsymbol{t}$, будем говорить, что *A – однородная группа типа $\boldsymbol{t}$*, и записывать это так: $\boldsymbol{t}(A) = \boldsymbol{t}$. Очевидно, что всякая группа без кручения ранга 1 является однородной.

Для абелевой группы без кручения A обозначим через $\mathrm{T}(A)$ множество всех типов элементов группы A.

Лемма 3. *Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G. Тогда для любого типа $\boldsymbol{t} \in T(S)$ существует тип $\boldsymbol{t}' \in T(G)$, такой, что $\boldsymbol{t}' \ge \boldsymbol{t}$.*

Доказательство. Пусть тип $\boldsymbol{t}$ принадлежит множеству типов группы S. Тогда существует ненулевой элемент $(a, \sigma)\in S$, такой, что его характеристика принадлежит типу $\boldsymbol{t}$ ($\chi((a, \sigma)) \in \boldsymbol{t}$). Эта характеристика имеет вид

$$\chi((a, \sigma)) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots).$$

Пусть $a \ne 0$. Обозначим его тип через $\boldsymbol{t}'$. Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(x_n, \eta_n)\in S$, такой, что $p_n^{k_n}(x_n, \eta_n) = (a, \sigma)$. Тогда, учитывая формулу (7), имеем $(p_n^{k_n} x_n, \eta_n^{p_n^{k_n}}) = (a, \sigma)$. Получили, что $p_n^{k_n} x_n = a$. Значит, уравнение $a = p_n^{k_n} x_n$ разрешимо в группе G. Поэтому $h_{p_n}^{(G)}(a) \ge k_n$. Если $k_n = \infty$, то для любого натурального числа m существует такой элемент $(y_m, \xi_m)\in S$, что уравнение $p_n^m(y_m, \xi_m) = (a, \sigma)$ разрешимо в S, а значит, уравнение $p_n^m y_m = a$ разрешимо в G. Поэтому $h_{p_n}^{(G)}(a) = \infty$.

Таким образом, $\chi_{(G)}(a) \ge \chi_{(S)}((a, \sigma))$ и, значит, $\boldsymbol{t}(a) = \boldsymbol{t}' \ge \boldsymbol{t}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $\sigma \ne \varepsilon$. Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(0, \eta_n)\in S$, такой, что $p_n^{k_n}(0, \eta_n) = (0, \sigma)$ или $\eta_n^{p_n^{k_n}} = \sigma$. Так как $\sigma \ne \varepsilon$, то существует элемент $g\in G$, такой, что $\sigma g \ne g$. Согласно формуле (4), имеем $\sigma g = \eta_n^{p_n^{k_n}} g = g + p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Отсюда следует, что $\sigma g - g = p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Уравнение $\sigma g - g = p_n^{k_n} x$ разрешимо в G. Значит, $h_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) \ge k_n$.

Если $k_n = \infty$, то p_n-высота $h_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) = \infty$.

Таким образом, $\chi_{(G)}(\sigma g - g) \ge \chi_{(S)}((0, \sigma))$. Следовательно, $\boldsymbol{t}(\sigma g - g) = \boldsymbol{t}' \ge \boldsymbol{t}$. ■

Пусть S_1 – множество всех первых компонент элементов подгруппы S из леммы 3. Имеем $\sigma g - g\in S_1$ для каждого элемента $g\in G$, если $(a, \sigma)\in S$. Тогда из доказательства леммы 3 получаем такое утверждение.

Предложение 4. *Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G и S_1 – множество первых компонент элементов группы S. Тогда для любого типа $\boldsymbol{t} \in T(S)$ существует тип $\boldsymbol{t}' \in T(S_1)$, такой, что $\boldsymbol{t}' \ge \boldsymbol{t}$.*

Теорема 5. *Пусть G и H – почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения, G – однородная группа, а группа H обладает свойством: для любых двух ненулевых элементов $b_1, b_2 \in H$, таких, что $\boldsymbol{t}(b_1)$ сравним с $\boldsymbol{t}(b_2)$, имеем $\boldsymbol{t}(b_1) = \boldsymbol{t}(b_2)$. Тогда H – однородная группа и $\boldsymbol{t}(G) = \boldsymbol{t}(H)$.*

Доказательство. Пусть тип однородной группы G равен $\boldsymbol{t}$ и пусть тип $\boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}(H)$. Группы G и H – почти голоморфно изоморфны, значит, $H \cong G'$, где G' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ и $G \cong H'$, где H' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $\boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}(G')$. Тогда из леммы 3 получаем, что тип $\boldsymbol{t}$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t}_1$. Так как $G \cong H'$, то $\boldsymbol{t} \in \mathrm{T}(H')$. Согласно лемме 2, для типа $\boldsymbol{t}$ существует тип $\boldsymbol{t}_2 \in \mathrm{T}(H)$ такой, что $\boldsymbol{t}_2 \geq \boldsymbol{t}$. Получили, что $\boldsymbol{t}_2 \geq \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t}_1$. Так как $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \in \mathrm{T}(H)$, то существуют элементы $b_1, b_2 \in H$, такие, что $\boldsymbol{t}(b_1) = \boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}(b_2) = \boldsymbol{t}_2$. Имеем $\boldsymbol{t}(b_2) \geq \boldsymbol{t}(b_1)$, то есть типы элементов b_1 и b_2 сравнимы. Учитывая условие теоремы на типы элементов группы H, получаем $\boldsymbol{t}(b_1) = \boldsymbol{t}(b_2)$, то есть $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_2$ и, значит, $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}$. В силу произвольности выбора типа $\boldsymbol{t}_1$ получаем, что H – однородная группа и ее тип равен $\boldsymbol{t}$. ■

Следствие 6. *Если G и H – однородные почти голоморфно изоморфные группы, то $\boldsymbol{t}(G) = \boldsymbol{t}(H)$.*

Теорема 7. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{\boldsymbol{t} \in \mathrm{T}_1} G_{\boldsymbol{t}}$, $H = \bigoplus\limits_{\overline{\boldsymbol{t}} \in \mathrm{T}_2} H_{\overline{\boldsymbol{t}}}$, где $G_{\boldsymbol{t}}$ и $H_{\overline{\boldsymbol{t}}}$ – однородные группы типов $\boldsymbol{t}$ и $\overline{\boldsymbol{t}}$ соответственно, T_1 и T_2 – множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Если G и H – почти голоморфно изоморфные группы, то* $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2$.

Доказательство. Группы G и H почти голоморфно изоморфны, то есть $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно.

Пусть $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{T}_1$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H следует, что $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{T}(H')$. По лемме 3 существует тип $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \in \mathrm{T}(H)$, такой, что $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \geq \boldsymbol{t}_0$.

Предположим, что $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \in \mathrm{T}(H) \setminus \mathrm{T}_2$. Тогда $\overline{\boldsymbol{t}}_0 = \inf\{\overline{\boldsymbol{t}}_1, \overline{\boldsymbol{t}}_2, ..., \overline{\boldsymbol{t}}_k\}$, где $\overline{\boldsymbol{t}}_i \in \mathrm{T}_2$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Так как типы в T_2 попарно несравнимы, то $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \leq \overline{\boldsymbol{t}}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Имеем $\overline{\boldsymbol{t}}_1 > \overline{\boldsymbol{t}}_0 \geq \boldsymbol{t}_0$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $\overline{\boldsymbol{t}}_1 \in \mathrm{T}(G')$. По лемме 3 существует тип $\boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}(G)$, такой, что $\boldsymbol{t}_1 \geq \overline{\boldsymbol{t}}_1$.

Возможны 2 случая:

1) Пусть $\boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}_1$. Тогда $\boldsymbol{t}_1 \geq \overline{\boldsymbol{t}}_1 > \overline{\boldsymbol{t}}_0 \geq \boldsymbol{t}_0$, откуда $\boldsymbol{t}_1 > \boldsymbol{t}_0$. Получили, что типы $\boldsymbol{t}_0$ и $\boldsymbol{t}_1$ сравнимы. Это противоречит условию теоремы.

2) Пусть $\boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}(G) \setminus \mathrm{T}_1$. Тогда $\boldsymbol{t}_1 = \inf\{\boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3, \ldots, \boldsymbol{t}_m\}$, где $\boldsymbol{t}_j \in \mathrm{T}_1$, $j = 2, \ldots, m$. Аналогично ранее доказанному получаем, что $\boldsymbol{t}_j > \boldsymbol{t}_1$ для всех $j = 2, \ldots, m$. Имеем $\boldsymbol{t}_2 > \boldsymbol{t}_1 \geq \overline{\boldsymbol{t}}_1 > \overline{\boldsymbol{t}}_0 \geq \boldsymbol{t}_0$. Типы $\boldsymbol{t}_0$ и $\boldsymbol{t}_2$ принадлежат T_1 и сравнимы между собой. Противоречие.

Значит, $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \in \mathrm{T}_2$, $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \geq \boldsymbol{t}_0$.

Аналогично доказывается, что для типа $\overline{\boldsymbol{t}}_0 \in \mathrm{T}_2$ существует тип $\boldsymbol{t}' \in \mathrm{T}_1$, такой, что $\boldsymbol{t}' \geq \overline{\boldsymbol{t}}_0$.

Итак, $\boldsymbol{t}' \geq \overline{\boldsymbol{t}}_0 \geq \boldsymbol{t}_0$. Так как типы в T_1 попарно несравнимы, то $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t}_0$. Значит, $\overline{\boldsymbol{t}}_0 = \boldsymbol{t}_0$ и справедливо включение $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_2$.

Обратное включение $\mathrm{T}_2 \subset \mathrm{T}_1$ доказывается аналогично.

Следовательно, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2$. ■

Рассмотрим теперь делимые части почти голоморфно изоморфных абелевых групп без кручения.

Теорема 8. *Если две абелевы группы почти голоморфно изоморфны и одна из них без кручения, то делимые части этих групп изоморфны.*

Доказательство. Пусть G – абелева группа без кручения, H – почти голоморфно изоморфная ей абелева группа. Тогда $G\cong H'$, $H\cong G'$, где G' и H' – нормальные подгруппы групп $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. По лемме 2 группа H также группа без кручения.

Покажем, что если одна из групп G или H нередуцированная группа, то и другая группа также нередуцированная.

Обозначим через $D(G)$, $D(H)$, $D(G')$ и $D(H')$ – делимые части соответственно групп G, H, G' и H', а через $\overline{G_1}$, $\overline{\Phi}$, $\overline{H_1}$ и $\overline{\Psi}$ – множества всех первых, вторых компонент соответственно групп $D(G')$ и $D(H')$.

Пусть G – нередуцированная группа, значит, H' также нередуцированная и $D(H')\neq 0$. Тогда существует $(h, \psi)\in D(H')$, $(h, \psi)\neq(0, \varepsilon)$. Из делимости группы $D(H')$ следует, что для любого натурального числа n существует такой элемент $(a_n, \xi_n)\in D(H')$, что $n(a_n, \xi_n) = (h, \psi)$. Так как H – группа без кручения, то по формуле (7) имеем $n(a_n, \xi_n) = (na_n, \xi_n^n)$, то есть $h = na_n$, $\psi = \xi_n^n$.

Если $h\neq 0$, то группа H – нередуцированная.

Пусть $h = 0$, тогда $\psi\neq\varepsilon$ и $\xi_n^n = \psi \neq \varepsilon$. По лемме 1 для любого элемента $a\in H$ имеем $\psi\, a - a\in H'$ и существует такой элемент $h_1\in H$, что $\psi\, h_1 - h_1\neq 0$. Из формулы (4) леммы 1 получаем $\xi_n^n h_1 = h_1 + n(\xi_n h_1 - h_1)$ или $\psi\, h_1 - h_1 = n(\xi_n h_1 - h_1)$. Для ненулевого элемента $\psi\, h_1 - h_1$ группы без кручения H мы получили, что уравнение $\psi\, h_1 - h_1 = nx$ разрешимо в этой группе для любого натурального числа n. Это означает, что группа H нередуцированная.

Пусть $(g, \sigma)\in D(G')$, $(g, \sigma)\neq(0, \varepsilon)$. Тогда для всякого натурального числа n существует такой элемент $(b_n, \omega_n)\in D(G')$, что $n(b_n, \omega_n) = (g, \sigma)$, и отсюда следует, что $nb_n = g$ и $\omega_n^n = \sigma$. Значит, $g\in D(G)$ и $\overline{G_1}$ – делимая подгруппа группы $D(G)$.

Аналогично доказывается, что $\overline{H_1}$ делимая подгруппа группы $D(H)$.

Покажем, что группа $D(G')$ разложима в прямую сумму своих подгрупп $\overline{G_1}$ и $\overline{\Phi}$.

Рассмотрим автоморфизм η группы G, действующий следующим образом: $\eta\, g = 2g$, если $g\in D(G)$, и $\eta\, g = g$, если $g\in R(G)$ $(G = D(G)\oplus R(G))$. Имеем – $(0, \eta) + (2g, \varepsilon) + (0, \eta) = (g, \varepsilon)$, но $(2g, \varepsilon)\in D(G')$. Значит, и $(g, \varepsilon)\in D(G')$. Тогда $(0, \sigma)\in D(G')$. Получаем $D(G') = \overline{G_1}\oplus\overline{\Phi}$.

Аналогично $D(H') = \overline{H_1}\oplus\overline{\Psi}$.

$D(G')$ и $D(H')$ – ненулевые нормальные абелевы подгруппы групп $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Тогда $\overline{G_1}\neq 0$, $\overline{H_1}\neq 0$ (лемма 2). Так как $\overline{G_1}$ и $\overline{H_1}$ – характеристические подгруппы групп G и H, то $\overline{G_1} = D(G)$ и $\overline{H_1} = D(H)$.

Учитывая почти голоморфный изоморфизм групп G и H, имеем $D(G)\cong D(H') = \overline{H_1}\oplus\overline{\Psi} = D(H)\oplus\overline{\Psi}$ и, значит, $r(D(G))\geq r(D(H))$. С другой стороны, $D(H)\cong D(G') = \overline{G_1}\oplus\overline{\Phi} = D(G)\oplus\overline{\Phi}$, и отсюда $r(D(H))\geq r(D(G))$. Следовательно, $r(D(G)) = r(D(H))$, и поэтому $D(G)\cong D(H)$. ■

Теорема 9. *Голоморф делимой абелевой группы G без кручения не содержит ненулевых нормальных абелевых подгрупп, отличных от G.*

Доказательство. Пусть G' – ненулевая нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ делимой группы без кручения G. Обозначим через $D(G')$ – делимую часть группы G'.

Пусть $(a, \sigma)\in G'$ и $(a, \sigma) \neq (0, \varepsilon)$.

Если $\sigma \neq \varepsilon$, то существует такой элемент $g\in G$, что $\sigma g - g \neq 0$. Для всякого натурального числа n найдется такой элемент g_n, что $ng_n = g$, и, значит, $n(\sigma g_n - g_n) = \sigma g - g$. Так как $\sigma g_n - g_n \in G'$ и $\sigma g - g\in G'$, то $\sigma g - g\in D(G')$.

Если $\sigma = \varepsilon$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим автоморфизм η_n группы G, такой, что $\eta_n h = \dfrac{h}{n}$ для любого элемента $h\in G$. Тогда $-(0, \eta_n) + (a, \varepsilon) + (0, \eta_n) = (a_n, \varepsilon)$, где a_n определяется из равенства $na_n = a$. Имеем $(a_n, \varepsilon)\in G'$, значит, $a\in D(G')$.

Получили, что подгруппа $D(G') \neq 0$.

В доказательстве теоремы 8 было установлено, что $D(G') = D(G) \oplus \overline{\Phi}$.

Так как G – делимая группа, то $D(G) = G$ и, значит, $D(G') = G \oplus \overline{\Phi}$. Следовательно, $G\subset G'$. Учитывая, что G – максимальная абелева нормальная подгруппа своего голоморфа, получаем $G = G'$. ■

Из теоремы 9 вытекает такой результат.

Теорема 10. *Всякая делимая абелева группа без кручения нормально определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Учитывая полученные результаты, в дальнейшем при исследовании нормальной определяемости абелевых групп без кручения будем рассматривать только редуцированные группы.

Отметим, что для абелевых p-групп утверждение, аналогичное теореме 9, уже не имеет места. Голоморф делимой p-группы G может содержать ненулевые нормальные абелевы подгруппы, отличные от G. Такими подгруппами являются, например, подгруппы вида $G[p^k]$, где k – произвольное натуральное число.

Перейдем к рассмотрению почти голоморфно изоморфных вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Пусть $G = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ – вполне разложимая абелева группа без кручения ($r(G_i) = 1$ для всякого $i\in I$), $G = \bigoplus\limits_{\boldsymbol{t}\in T} G_{\boldsymbol{t}}$ – каноническое разложение группы G, где $G_{\boldsymbol{t}} = \bigoplus\limits_{i\in I(\boldsymbol{t})} G_i$, $I(\boldsymbol{t}) = \{i\in I \mid \boldsymbol{t}(G_i) = \boldsymbol{t}\}$.

Лемма 11. *Если S – характеристическая подгруппа группы G и $S\cap G_{\boldsymbol{t}'} \neq 0$ для некоторого $\boldsymbol{t}'\in T$, то $S\cap G_j \neq 0$ для каждого $j\in I(\boldsymbol{t}')$.*

Доказательство. Пусть $S\cap G_{\boldsymbol{t}'} = A$ и a – некоторый ненулевой элемент группы A. Имеем $G = \langle a\rangle_* \oplus G'$ [13, с. 137], $G = G_j \oplus G''$, $(j\in I(\boldsymbol{t}))$. Из теоремы об изоморфизме прямых разложений вполне разложимых групп [13, предложение 86.1] следует $G' \cong G''$. Пусть ω – автоморфизм группы G, отображающий $\langle a\rangle_*$ на G_j и G' на G''. Получаем $\omega(a)\in G_j$. Следовательно, $S\cap G_j \neq 0$. ■

Сделаем одно замечание о нормальных подгруппах голоморфов абелевых групп без кручения, которое нам понадобится в дальнейшем.

Замечание. *Если S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ группы без кручения G, S_1 и Φ_1 – множества первых, вторых компонент элементов груп-*

пы S соответственно, то $\left\langle 2S_1, \Phi_1^2 \right\rangle \subset S$ *(лемма 1). Так как* S_1 *и* Φ_1 *– абелевы группы без кручения, то* $2S_1 \cong S$, $\Phi_1^2 \cong \Phi_1$. *Итак,* $\left\langle 2S_1, \Phi_1^2 \right\rangle = 2S_1 \oplus \Phi_1^2 \cong S_1 \oplus \Phi_1$, *то есть группа* $S_1 \oplus \Phi_1$ *изоморфно вкладывается в группу S.*

Теорема 12. *Вполне разложимая однородная группа нормально определяется своим голоморфом в классе вполне разложимых однородных групп.*

Доказательство. Пусть $G = \underset{i \in I}{\oplus} G_i$ – вполне разложимая однородная группа, H – почти голоморфно изоморфная ей вполне разложимая однородная группа. Покажем, что $G \cong H$. Имеем $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. По следствию 6 $\mathrm{T}(G) = \mathrm{T}(H)$. Пусть G_1, H_1, Φ_1, Ψ_1 – множества первых, вторых компонент групп G' и H' соответственно. По лемме 11 $r(G_1) = r(G)$ и $r(H_1) = r(H)$. Так как $G_1 \oplus \Phi_1$ изоморфно вкладывается в группу G' и $G' \cong H$, то $r(H) = r(G') = r(G_1) + r(\Phi_1) \geq r(G_1) = r(G)$. Аналогично получаем, что $r(G) = r(H') = r(H_1) + r(\Psi_1) \geq r(H_1) = r(H)$. Значит, $r(G) = r(H)$, и поэтому $G \cong H$. Следовательно, группа G нормально определяется своим голоморфом в классе вполне разложимых однородных групп. ■

Лемма 13. *Пусть* $G = \underset{\boldsymbol{t} \in \mathrm{T}}{\oplus} G_{\boldsymbol{t}}$, *где* $G_{\boldsymbol{t}}$ *– однородная абелева группа типа* $\boldsymbol{t}$, Т *– некоторое множество попарно несравнимых типов. Тогда для всякого ненулевого элемента* $g \in G$ *и любого типа* $\boldsymbol{t} \in \mathrm{T}$, $\boldsymbol{t}(g) \not> \boldsymbol{t}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $0 \neq g_0 \in G$, $\boldsymbol{t}(g_0) > \boldsymbol{t}_0$ для некоторого $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{T}$. Запишем g_0 в виде $g_0 = g_{\boldsymbol{t}_1} + g_{\boldsymbol{t}_2} + \ldots + g_{\boldsymbol{t}_n}$, где $g_{\boldsymbol{t}_i} \neq 0$ – элементы из различных компонент $G_{\boldsymbol{t}_i}$, и пусть $\chi(g_{\boldsymbol{t}_i}) = \chi_i \in \boldsymbol{t}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\boldsymbol{t}_i \in \mathrm{T}$. Тогда $\chi(g_0) = \inf_{\mathbf{X}}\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\}$ и, значит, $\boldsymbol{t}_0 < \boldsymbol{t}(g_0) < \boldsymbol{t}_1$. Итак, получили $\boldsymbol{t}_1 > \boldsymbol{t}_0$, где $\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}$, что невозможно. ■

Обозначим через $\mathfrak{R}$ класс вполне разложимых абелевых групп без кручения с попарно несравнимыми типами прямых слагаемых их канонических разложений.

Теорема 14. *Всякая группа из класса* $\mathfrak{R}$ *нормально определяется своим голоморфом в этом классе.*

Доказательство. Пусть $G = \underset{\boldsymbol{t} \in \mathrm{T}}{\oplus} G_{\boldsymbol{t}}$ – некоторая группа из класса $\mathfrak{R}$, $H = \underset{\boldsymbol{t}' \in \mathrm{T}'}{\oplus} H_{\boldsymbol{t}'}$ – произвольная группа из этого класса почти голоморфно изоморфная группе G. Через $G_{\boldsymbol{t}}$ и $H_{\boldsymbol{t}'}$ обозначены однородные вполне разложимые прямые слагаемые типов $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{t}'$ групп G и H соответственно. Т и Т′ – некоторые множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Следовательно, Т = Т′ согласно теореме 7.

Пусть $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{T}$. Имеем $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Обозначим через H_1, Ψ_1 – множества первых, вторых компонент элементов группы H'. В группе H_1 найдется элемент $h_1 \neq 0$, такой, что $\boldsymbol{t}_{H_1}(h_1) \geq \boldsymbol{t}_0$ (предложение 4). Если бы $\boldsymbol{t}_{H_1}(h_1) > \boldsymbol{t}_0$, то $\boldsymbol{t}_H(h_1) > \boldsymbol{t}_0$, чего не может быть в силу леммы 13. Значит, $\boldsymbol{t}_{H_1}(h_1) = \boldsymbol{t}_0$, то есть $\boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{T}(H_1)$.

Покажем, что если $h \in H_1$ и $\boldsymbol{t}_{H_1}(h) = \boldsymbol{t}_0$, то $h \in H_{\boldsymbol{t}_0}$. Действительно, пусть $h \in H_1$ и $\boldsymbol{t}_{H_1}(h) = \boldsymbol{t}_0$. Тогда по лемме 13 $\boldsymbol{t}_H(h) = \boldsymbol{t}_0$. Если бы $h \notin H_{\boldsymbol{t}_0}$, то существовал бы тип $\boldsymbol{t}_1 \in \mathrm{T}$, $\boldsymbol{t}_1 \neq \boldsymbol{t}_0$, что $h = h_{\boldsymbol{t}_1} + h'$, где $0 \neq h_{\boldsymbol{t}_1} \in H_{\boldsymbol{t}_1}$, $h' \in \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{t}' \in T \\ \boldsymbol{t}' \neq \boldsymbol{t}_1}} H_{\boldsymbol{t}'}$. Поэтому $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{t}_H(h) < \boldsymbol{t}_H(h_{\boldsymbol{t}_1}) = \boldsymbol{t}_1$, чего быть не может, так как $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_0 \in \mathrm{T}$.

Итак, установлено, что группа H_1 содержит элемент h_1, такой, что $\boldsymbol{t}_{H_1}(h_1) = \boldsymbol{t}_0$ и $h_1 \in H_{\boldsymbol{t}_0}$. Пусть $h_2 \in H_1 \cap H_{\boldsymbol{t}_0}$, $h_2 \neq 0$. Имеем $H_{\boldsymbol{t}_0} = \langle h_1 \rangle_* \oplus C$, $H_{\boldsymbol{t}_0} = \langle h_2 \rangle_* \oplus C_1$. Существует автоморфизм η группы H, отображающий $\langle h_1 \rangle_*$ на $\langle h_2 \rangle_*$. Так как H_1 – характеристическая подгруппа группы H, то $\boldsymbol{t}_{H_1}(h_1) = \boldsymbol{t}_{H_1}(\eta h_1)$. Но $s(\eta\, h_1) = mh_2$ для некоторых целых чисел s и m, и поэтому $\boldsymbol{t}_{H_1}(h_2) = \boldsymbol{t}_{H_1}(\eta h_1) = \boldsymbol{t}_{H_1}(h_1) = \boldsymbol{t}_0$. Значит, $H_1 \cap H_{\boldsymbol{t}_0}$ – однородная группа и $\boldsymbol{t}(H_1 \cap H_{\boldsymbol{t}_0}) = \boldsymbol{t}_0$. В силу леммы 11 $r(H_1 \cap H_{\boldsymbol{t}_0}) = r(H_{\boldsymbol{t}_0})$.

Так как $G \cong H'$, то по лемме 13 в группе H' нет элементов, типы которых больше $\boldsymbol{t}_0$. Группа $H_1 \oplus \Psi_1$ изоморфно вкладывается в H'. При этом вложении образ всякого элемента из $H_1 \cap H_{\boldsymbol{t}_0}$ имеет тип $\boldsymbol{t}_0$ в группе H'. Таким образом, $r(G_{\boldsymbol{t}_0}) \geq r(H_1 \cap H_{\boldsymbol{t}_0}) = r(H_{\boldsymbol{t}_0})$. Аналогично получаем, что $r(H_{\boldsymbol{t}_0}) \geq r(G_{\boldsymbol{t}_0})$. В силу произвольности типа $\boldsymbol{t}_0$ из Т имеем $G \cong H$. ■

В теореме 14 рассматривались вполне разложимые группы из класса $\mathfrak{R}$. Результат этой теоремы нельзя перенести на произвольные вполне разложимые группы.

Лемма 15. *Пусть $G = A \oplus B$, где A – характеристическая подгруппа группы G, $S(A) = \{(a,\sigma) \in \Gamma(G) \mid a \in A, (\forall \bar{a} \in A)\sigma\bar{a} = \bar{a},\ (\exists \eta \in \mathrm{Hom}(B,A))(\forall b \in B)\sigma b = b + \eta b\}$. Тогда $S(A)$ – нормальная абелева подгруппа голоморфа группы G и $S(A) = A \oplus C$, где $C \cong \mathrm{Hom}(B, A)$.*

Доказательство. Покажем, что $S(A)$ – подгруппа голоморфа группы $\Gamma(G)$. Пусть (a, σ) и $(a_1, \sigma_1) \in S(A)$. Тогда $(a,\sigma) - (a_1,\sigma_1) = (a - \sigma\sigma_1^{-1}a_1, \sigma\sigma_1^{-1}) = (a - a_1, \sigma\sigma_1^{-1})$. Для всякого элемента $g \in A$ имеем $\sigma\sigma_1^{-1}g = g$. Пусть $b \in B$ и $\sigma\, b = b + \eta\, b$, $\sigma_1\, b = b + \eta_1\, b$, где $\eta, \eta_1 \in \mathrm{Hom}(B, A)$. Имеем $\sigma_1^{-1}b = b - \sigma_1^{-1}\eta_1 b = b - \eta_1 b$. Итак, $\sigma\sigma_1^{-1}b = \sigma(b - \eta_1 b) = b + \eta b - \eta_1 b = b + (\eta - \eta_1)b$. Значит, $(a, \sigma) - (a_1, \sigma_1) \in S(A)$ и $S(A)$ – подгруппа группы $\Gamma(G)$.

Если (a_1, σ_1) и (a_2, σ_2) – элементы группы $S(A)$, то $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Имеем $(a_1, \sigma_1) + (a_2, \sigma_2) = (a_1 + a_2, \sigma_1\sigma_2)$ и $(a_2, \sigma_2) + (a_1, \sigma_1) = (a_2 + a_1, \sigma_2\sigma_1)$. Значит, $S(A)$ – абелева подгруппа группы $\Gamma(G)$.

Покажем, что $S(A)$ – нормальная подгруппа группы $\Gamma(G)$. Пусть (g, φ) – произвольный элемент из $\Gamma(G)$. Рассмотрим сумму $-(g, \varphi) + (a, \sigma) + (g, \varphi) = (-\varphi^{-1}g + \varphi^{-1}a + \varphi^{-1}\sigma g, \varphi^{-1}\sigma\varphi) = (\bar{a}, \bar{\sigma})$. Элемент g как элемент прямой суммы запишем в виде $a_0 + b_0$, где $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Получаем $\varphi^{-1}\sigma g = \varphi^{-1}a_0 + \varphi^{-1}b_0 + \varphi^{-1}\eta\, b_0$, где $\sigma\, b_0 = b_0 + \eta\, b_0$, $\eta \in \mathrm{Hom}(B, A)$. В силу характеристичности A в G $\varphi^{-1}\eta\, b_0 \in A$, $\varphi^{-1}a \in A$. Итак, $-\varphi^{-1}g + \varphi^{-1}a + \varphi^{-1}\sigma g = -\varphi^{-1}a_0 - \varphi^{-1}b_0 + \varphi^{-1}a + \varphi^{-1}a_0 + \varphi^{-1}b_0 + \varphi^{-1}\eta b_0 = \varphi^{-1}(a + \eta\, b_0) = \bar{a} \in A$. Пусть $\varphi b = b' + a'$, $b' \in B$, $a' \in A$. Тогда $\sigma\,\varphi\, b = \sigma\, b' + \sigma\, a' = b' + \lambda b' + a'$, где $\sigma\, b' = b' + \lambda b'$, $\lambda \in \mathrm{Hom}(B, A)$. Имеем $\varphi^{-1}\sigma\,\varphi\, b = \varphi^{-1}b' + \varphi^{-1}\lambda b' + \varphi^{-1}a'$, но $\varphi^{-1}b' = b - \varphi^{-1}a'$, откуда $\varphi^{-1}\sigma\,\varphi b = b + \varphi^{-1}\lambda b' = b + \varphi^{-1}\lambda\,\pi\,\varphi \mid Bb$, где π – проекция G на B, $\varphi \mid B$ – ограничение автоморфизма φ на B. Очевидно, что $\varphi^{-1}\lambda\pi\,\varphi \mid B \in \mathrm{Hom}(B, A)$. На элементах из A автоморфизм $\varphi^{-1}\sigma\,\varphi$ действует тождественно, так как $\sigma\, a = a$ для всех $a \in A$.

Следовательно, $\bar{\sigma}$ обладает всеми свойствами вторых компонент элементов из $S(A)$. Итак, $S(A)$ – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$. Всякому элементу $(a, \sigma) \in S(A)$ поставим в соответствие пару (a, η), где η – гомоморфизм группы B в группу A, индуцированный автоморфизмом σ. Полученное соответствие и будет изоморфизмом $S(A) \cong A \oplus \mathrm{Hom}(B, A)$. ■

Теорема 16. *Существует вполне разложимая абелева группа без кручения, которая нормально не определяется своим голоморфом в классе всех вполне разложимых групп без кручения.*

Доказательство. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Будем говорить, что тип $\boldsymbol{t}$ является π-*делимым*, если он p-делим для тех и только тех простых чисел p, которые принадлежат π.

Для любых двух типов $\boldsymbol{t}_1$ и $\boldsymbol{t}_2$, где $\boldsymbol{t}_1 \geq \boldsymbol{t}_2$, определим их *разность* $\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2$ как тип, содержащий характеристику $\chi_1 - \chi_2$ ($\chi_1 \in \boldsymbol{t}_1$, $\chi_2 \in \boldsymbol{t}_2$, $\chi_1 \geq \chi_2$).

Разность характеристик определяется покомпонентно, где, конечно, ∞ минус нечто равняется ∞.

Пусть $G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_{\boldsymbol{t}_i}$, где $G_{\boldsymbol{t}_i}$ – однородная вполне разложимая группа конечного ранга типа $\boldsymbol{t}_i$, все $\boldsymbol{t}_i$ – π-делимые типы (π – некоторое множество простых чисел), $\boldsymbol{t}_1 > \boldsymbol{t}_2 > \ldots > \boldsymbol{t}_n$, $r(G_{\boldsymbol{t}_1}) = 1$ и для некоторого $k \in \{2, \ldots, n\}$ $\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_k \neq \boldsymbol{t}_i$ для всякого $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим группу $H = \bigoplus_{i=1}^{n} H_{\boldsymbol{\tau}_i}$, где $H_{\boldsymbol{\tau}_i}$ – однородная вполне разложимая группа типа $\boldsymbol{\tau}_i$, где $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_i$ для всех $i = 2, \ldots, n$, $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{t}_1$ и $r(G_{\boldsymbol{t}_i}) = r(H_{\boldsymbol{\tau}_i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $G_{\boldsymbol{t}_1}$ – характеристическая подгруппа группы G. Используем эту подгруппу для построения нормальной абелевой подгруппы $S(G_{\boldsymbol{t}_1})$ голоморфа $\Gamma(G)$ так, как это указано в лемме 15. Имеем $S(G_{\boldsymbol{t}_1}) \cong G_{\boldsymbol{t}_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} \mathrm{Hom}(G_{\boldsymbol{t}_i}, G_{\boldsymbol{t}_1})$. Известно, что если C_1 и C_2 – группы без кручения ранга 1, то $\mathrm{Hom}(C_1, C_2) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{t}(C_1) \leq \boldsymbol{t}(C_2)$, и в этом случае $\mathrm{Hom}(C_1, C_2)$ есть группа без кручения ранга 1, причем $\boldsymbol{t}(\mathrm{Hom}(C_1, C_2)) = \boldsymbol{t}(C_2) - \mathrm{t}(C_1)$ [13, с. 133].

Следовательно, $S(G_{\boldsymbol{t}_1}) \cong G_{\boldsymbol{t}_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} H_{\boldsymbol{\tau}_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} H_{\boldsymbol{\tau}_i} \cong H$.

Аналогично, в голоморфе $\Gamma(H)$ рассмотрим нормальную абелеву подгруппу $S(H_{\boldsymbol{\tau}_i})$. Имеем $S(H_{\boldsymbol{\tau}_1}) \cong H_{\boldsymbol{\tau}_1} \oplus \mathrm{Hom}(\bigoplus_{i=2}^{n} H_{\boldsymbol{\tau}_i}, H_{\boldsymbol{\tau}_1}) \cong H_{\boldsymbol{\tau}_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} G_{\boldsymbol{t}_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} G_{\boldsymbol{t}_i} \cong G$. Итак, группы G и H почти голоморфно изоморфны, но $G \ncong H$, так как $\boldsymbol{\tau}_k \neq \boldsymbol{t}_i$ для всякого $i \in \{2, \ldots, n\}$.

Следовательно, группа G нормально не определяется своим голоморфом в классе вполне разложимых групп. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mills W.H.* On the non-isomorphism of certain holomorphs. // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. No. 3. P. 428–443.
2. *Miller G.A.* On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. 1908. V. 66. P. 133–142.
3. *Беккер И.Х.* О голоморфах абелевых групп // Сиб. матем. журнал. 1964. Т. 5. No. 6. С. 1228– 1238.
4. *Беккер И.Х.* О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 1968. № 8. С. 3–8.
5. *Беккер И.Х.* О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1974. No. 3. С. 3–13.
6. *Беккер И.Х.* Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. вузов. Математика. 1975. No. 3. С. 97–99.
7. *Беккер И.Х.* Абелевы голоморфные группы. // Междунар. конф. «Всесибирские чтения по матем. и мех». Избранные доклады. Т. 1. Математика. 1997. С. 43–47.
8. *Беккер И.Х.*, *Гриншпон С.Я.* Почти голоморфно изоморфные примарные абелевы группы // Группы и модули: межвуз. тематич. сб. науч. трудов. 1976. С. 90–103.
9. *Гриншпон С.Я.* Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Труды ТГУ. 1975. Т. 220. Вопросы математики. Вып. 3. С. 78–84.
10. *Mills W.H.* Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 71. № 3. P. 379–392.
11. *Гриншпон И.Э.* Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и приклад. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 9–16.
12. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.
13. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977. 416 с.
14. *Крылов П.А.* Аффинные группы модулей и их автоморфизмы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 1. С. 60–82.
15. *Беккер И.Х.*, *Крылов П.А.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. 1994. С. 3–52.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Grinshpon S.Ya., *Grinshpon I.E.* TORSION FREE ABELIAN GROUPS NORMALLY DETERMINED BY THEIR HOLOMORPHS. In this paper, we study homogeneously decomposable into direct sums torsion free abelian groups that are normally determined by their holomorphs. Properties of normal abelian subgroups of holomorphs of torsion free abelian groups are also studied.

Keywords: holomorph, almost holomorphically isomorphic groups, completely decomposable group, homogeneous group, type of a group.

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Tomsk State University)
E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

GRINSHPON Irina Eduardovna (Tomsk State University
of Control Systems and Radioelectronics)
E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru