УДК 514.76

**А.Г. Седых**

# О ПРИБЛИЖЕННО ИНТЕГРИРУЕМЫХ *SO*(3)-СТРУКТУРАХ НА 5-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Рассматриваются неприводимые $SO(3)$-структуры на пятимерном многообразии. Показано, что для приближенно интегрируемых неприводимых $SO(3)$-структур ковариантная дивергенция структурного тензора равна нулю. Приведены примеры левоинвариантных неприводимых $SO(3)$-структур на пятимерных группах Ли, которые имеют нулевую дивергенцию структурного тензора, но не являются приблизиженно интегрируемыми, а также неприводимых SO(3)-структур с ненулевой дивергенцией структурного тензора.

**Ключевые слова:** *специальная SO(3)-структура, пятимерное многообразие, группа Ли.*

Традиционно в геометрии большой интерес представляют римановы многообразия с некоторой дополнительно заданной структурой, согласованной с метрикой. Примером может служить почти комплексная структура, согласованная с метрикой. Соответствующая структурная группа действует неприводимо на касательных пространствах многообразия. Для нечетномерного аналога – контактной метрической структуры – структурная группа действует приводимо – она имеет два инвариантных подпространства: контактную плоскость и направление Риба. Интересно, что в случае пятимерного риманова многообразия существует [1] структура, у которой структурной группой является $SO(3)$, и она действует неприводимо. Эта структура представляет интерес в контексте характеристических связностей и специальной неинтегрируемой геометрии [5]. В данной работе рассматривается такая неприводимая $SO(3)$-структура на пятимерном многообразии и изучаются свойства ее структурного тензора.

Неприводимое представление группы $SO(3)$ в пространстве $\mathbf{R}^5$ основано на том, что векторное пространство $\mathbf{R}^5$ изоморфно множеству действительных симметричных бесследовых матриц порядка 3. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$X=(x_1,\dots,x_5)\leftrightarrow \sigma(X)=\begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{3}}-x_4 & x_2 & x_3 \\ x_2 & \frac{x_1}{\sqrt{3}}+x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x_1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Неприводимое представление $\rho$ на $\mathbf{R}^5$ задается формулой

$$\rho(h)X=h\sigma(X)h^{-1}, h\in SO(3).$$

Для элемента $X$ рассмотрим характеристический полином матрицы $\sigma(X)$ [1]:

$$P_X(\lambda)=\det(\sigma(X)-\lambda I)=-\lambda^3+\lambda g(X,X)+\frac{2\sqrt{3}}{9}\Psi(X,X,X).$$

Этот полином инвариантен относительно $SO(3)$ действия, заданного представлением ρ. Поэтому его коэффициенты являются $SO(3)$-инвариантными. Квадратичная часть $g(X,X)$ – это стандартное скалярное произведение на $\mathbf{R}^5$, $g(X,X) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2$, а свободный член Ψ имеет вид

$$\Psi(X,X,X) = \frac{1}{2}x_1(6x_2{}^2 + 6x_4{}^2 - 2x_1{}^2 - 3x_3{}^2 - 3x_5{}^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}x_4(x_5{}^2 - x_3{}^2) + 3\sqrt{3}x_2x_3x_5.$$

Он определяет симметричный 3-линейный ковариантный тензор

$$\Psi = \sum\nolimits_{i,j,k=1}^{5} \Psi_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k ,$$

где $\{e^1,..., e^5\}$ – дуальный корепер к стандартному ортонормированному реперу $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ пространства $\mathbf{R}^5$.

Отметим основные свойства тензора Ψ, полученные в работе [1]. Свертка тензора Ψ по любым его двум индексам равна нулю. Чтобы сформулировать следующее свойство, нам потребуется тензор $\Psi_X = \iota_X \Psi$, полученный сверткой с вектором $X$: $\Psi_X(\cdot,\cdot) = \Psi(X,\cdot,\cdot)$. Поскольку мы считаем фиксированным ортонормированный репер, то симметричная 2-форма $\Psi_X$ естественным образом отождествляется с эндоморфизмом пространства $\mathbf{R}^5$. Поэтому можно брать композиции таких эндоморфизмов $\Psi_X$, в частности можно рассматривать квадраты эндоморфизмов $(\Psi_X)^2$. Тогда для всех $X\in\mathbf{R}^5$ имеет место равенство $(\Psi_X)^2X = g(X,X)X$.

При действии $SO(5)$ группа изотропии тензора Ψ совпадает с группой $SO(3)$, неприводимо вложенной в $SO(5)$, т.е. так, как описано выше. Это позволяет определить неприводимую $SO(3)$-структуру на пятимерном ориентированном римановом многообразии $(M,g)$, задавая в каждой точке такой тензор Ψ.

**Определение 1 [1].** *Неприводимой $SO(3)$-структурой на 5-мерном римановом многообразии $(M,g)$ называется тензорное поле Ψ типа $(0,3)$, для которого линейное отображение $X\to\Psi_X \in End(TM)$, $X\in TM$, имеет следующие свойства*:

1) *Симметричность*: $g(X, \Psi_Y Z) = g(Z,\Psi_Y X) = g(X, \Psi_Z Y)$.

2) *Нулевой след*: $tr(\Psi_X)=0$.

3) *Для любого векторного поля $X\in TM$ имеет место равенство* $\Psi_X^2 X = g(X,X)X$.

В [1] показано, что в каждом касательном пространстве можно выбрать адаптированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, т.е. такой, в котором метрика $g$ и тензор Ψ будут иметь канонический вид, а именно $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\Psi = \frac{1}{2}e^1(6(e^2)^2 + 6(e^4)^2 - 2(e^1)^2 - 3(e^2)^2 - 3(e^5)^2) +$$
$$+\frac{3\sqrt{3}}{2}e^4((e^5)^2 - (e^3)^2) + 3\sqrt{3}e^2e^3e^5. \qquad (2)$$

Здесь $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5\}$ – дуальный репер. Из (2) мы получаем ненулевые компоненты тензора Ψ в адаптированном репере (с точностью до симметрий):

$$\psi_{111} = -1,\ \psi_{122} = 1,\ \psi_{144} = 1,\ \psi_{133} = -\frac{1}{2},\ \psi_{155} = -\frac{1}{2},$$
$$\psi_{433} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \psi_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \psi_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (3)$$

Таким образом, неприводимая $SO(3)$-структура на многообразии – это риманова структура $g$ и тензорное поле Ψ, обладающее указанными выше свойствами

1–3 определения 1. Представляют интерес так называемые приближенно интегрируемые $SO(3)$-структуры [1, 2], как некоторые аналоги почти комплексной структуры $J$ приближенно кэлерова многообразия, т.е. такого, что $(\nabla_X J)(X) = 0$.

**Определение 2 [2].** *Неприводимая $SO(3)$-структура на многообразии $M$ называется приближенно интегрируемой, если $(\nabla_X \Psi)(X,X,X) = 0$ для любого векторного поля $X$ на $M$.*

**Теорема 1.** *Если $SO(3)$-структура $\Psi$ приближенно интегрируемая, то дивергенция тензора $\Psi$ равна нулю, $\delta\Psi = 0$.*

***Доказательство.*** Пусть $SO(3)$-структура $\Psi$ приближенно интегрируема, тогда, по определению, $(\nabla_X\Psi)(X,X,X) = 0$. Перепишем это условие в координатах $\nabla_{(i}\Psi_{jkl)}X^i X^j X^k X^l = 0$, или $\nabla_{(i}\Psi_{jkl)} = 0$. Поскольку тензор $Y$ полностью симметричен, то

$$\nabla_i\Psi_{jkl} + \nabla_j\Psi_{ikl} + \nabla_k\Psi_{jil} + \nabla_l\Psi_{jki} = 0,$$

$$\nabla_i\Psi_{jkl} + \nabla_j\Psi_{ikl} = -\nabla_k\Psi_{jil} - \nabla_l\Psi_{jki}.$$

Вычислим дивергенцию $\delta\Psi$ тензорного поля $\Psi$ с учетом последнего равенства:

$$\delta\Psi = -\nabla^j\Psi_{jkl} = -g^{ij}\nabla_i\Psi_{jkl} = -\frac{1}{2}g^{ij}(\nabla_i\Psi_{jkl} + \nabla_j\Psi_{ikl}) =$$

$$= \frac{1}{2}g^{ij}(\nabla_k\Psi_{jil} + \nabla_l\Psi_{jki}) = \frac{1}{2}(\nabla_k g^{ij}\Psi_{ijl} + \nabla_i g^{ij}\Psi_{ijk}) = 0,$$

поскольку $g^{ij}\Psi_{ijl} = g^{ij}\Psi_{ijk} = 0$.

**Замечание 1.** Условие $\delta\Psi = 0$ является только необходимым. Существуют примеры, когда $\delta\Psi = 0$, но $SO(3)$-структура $\Psi$ не является приближенно интегрируемой.

**Замечание 2.** Дивергенция $\delta\Psi$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда тензор $\nabla_{(i}\Psi_{jkl)}$ имеет нулевой след по любым двум индексам.

Рассмотрим левоинвариантные приближенно интегрируемые $SO(3)$ на пятимерных группах Ли. В работе [2] получены необходимые и достаточные условия на левоинвариантный тензор $\Psi$ для приближенной интегрируемости в терминах структурных констант группы. Получим аналогичные условия для равенства нулю дивергенции тензора $\Psi$. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ – адаптированный базис алгебры Ли $L(G)$ группы $G$. Задав такой репер, получаем левоинвариантную риманову метрику $g$ на группе $G$, для которой выбранный репер $\{e_1,..., e_5\}$ является ортонормированным. Кроме того, на группе $G$ можно считать заданной левоинвариантную $SO(3)$-структуру тензором $\Psi$ на алгебре Ли $L(G)$, компоненты которого в выбранном адаптированном репере $\{e_1,..., e_5\}$ определены равенствами (3). Пусть $C_{ij}^{\,k}$ – структурные константы алгебры Ли $L(G)$ в адаптированном базисе.

**Теорема 2.** *Дивергенция $\delta\Psi$ тензора $\Psi$ левоинвариантной $SO(3)$-структуры на пятимерной группе Ли равна нулю тогда и только тогда, когда структурные константы соответствующей алгебры Ли удовлетворяют следующим линейным соотношениям*:

$$2C_{12}^2 = \sqrt{3}(C_{23}^5 + C_{25}^3),\;\; 2C_{14}^4 = \sqrt{3}(C_{34}^3 + C_{45}^5),\;\; C_{13}^3 = \sqrt{3}(C_{23}^5 + C_{34}^3 - C_{35}^2),$$

$$C_{15}^5 + C_{13}^3 = 2(C_{12}^2 + C_{14}^4),$$

$$C_{35}^5 - C_{13}^1 - \sqrt{3}(C_{12}^5 - C_{14}^3 - C_{13}^4 + C_{15}^2) - 2(C_{34}^4 - C_{23}^2) = 0,$$
$$C_{45}^5 - C_{24}^2 - \sqrt{3}(C_{13}^3 - C_{12}^2) + 2(C_{14}^1 - C_{34}^3) = 0,$$
$$C_{12}^3 - 2C_{13}^2 - 3C_{23}^1 - \sqrt{3}(C_{23}^4 + C_{24}^3 - C_{25}^2 - C_{35}^3) = 0,$$
$$C_{15}^1 + C_{35}^3 + \sqrt{3}(C_{12}^3 + C_{13}^2 + C_{14}^5 + C_{15}^4) - 2(C_{25}^2 + C_{45}^4) = 0,$$
$$C_{14}^2 + C_{12}^4 - \frac{3}{2}(C_{13}^5 + C_{15}^3) = \sqrt{3}(2C_{12}^1 + C_{24}^4 - C_{23}^3 + \frac{1}{2}(C_{45}^3 - C_{34}^5)),$$
$$2C_{12}^5 + 5C_{15}^2 + 3(C_{25}^1 - C_{13}^4 - C_{14}^3) = \sqrt{3}(3C_{23}^2 - C_{13}^1 - 2C_{34}^4 + C_{25}^4),$$
$$5C_{14}^3 - C_{13}^4 + 6C_{34}^1 - 9(C_{15}^2 + C_{25}^1) = \sqrt{3}(C_{13}^1 - C_{24}^5 - 5C_{23}^2 - 3C_{25}^4 - 2C_{45}^2),$$
$$C_{15}^3 + C_{13}^5 - C_{45}^3 - \sqrt{3}(C_{35}^4 - C_{24}^4 - 2C_{12}^1 + \frac{1}{2}(C_{45}^3 + C_{34}^5)) = 0,$$
$$2C_{15}^4 - C_{14}^5 + 3C_{45}^1 - \sqrt{3}(C_{45}^4 + C_{35}^3 - C_{24}^3 - C_{34}^2) = 0,$$
$$C_{25}^5 + C_{23}^3 - \sqrt{3}(C_{13}^5 + C_{15}^3) - 4C_{12}^1 - 2C_{24}^4 = 0.$$

***Доказательство.*** Дивергенция $\delta\Psi$ тензорного поля $\Psi = \psi_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k$ находится по формуле $(\delta\psi)_{jk} = -\nabla^i \psi_{ijk} = -g^{is}\nabla_s \psi_{ijk}$, где $e^i$ – ковекторы дуального базиса к адаптированному базису $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ алгебры Ли и $\nabla_s = \nabla_{e_s}$ – ковариантная производная вдоль базисного векторного поля $e_s$. Пусть $\Gamma_{ij}^k$ – компоненты связности Леви-Чивита левоинвариантной римановой метрики $g$, $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$. Тогда для ковекторов имеем: $\nabla_{e_k} e^i = -\Gamma_{kj}^i e^j$. Учитывая, что компоненты $\psi_{ijk}$ левоинвариантного тензорного поля $\Psi$ в левоинвариантном адаптированном репере постоянны на группе Ли, получаем

$$\nabla_s \psi_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k = (-\psi_{rjk}\Gamma_{si}^r - \psi_{ipk}\Gamma_{sj}^p - \psi_{ijp}\Gamma_{sk}^q)(e^i \otimes e^j \otimes e^k),$$

где
$$\Gamma_{ij}^p = C_{ij}^p + g_{js}C_{ki}^s g^{kp} + g_{is}C_{kj}^s g^{kp}.$$

Теперь используем систему Maple для вычислений $\delta\Psi$ (см. ниже листинг программы).

Приведем примеры левоинвариантных неприводимых $SO(3)$-структур на двух пятимерных группах Ли из классификационного списка [3] контактных групп Ли. Первый пример – с ненулевой дивергенцией, а второй – имеет нулевую дивергенцию, но не является приближенно интегрируемым. В этих примерах считается, что выбранный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ алгебры Ли является адаптированным. Следовательно, на группе Ли имеется левоинвариантная риманова структура и левоинвариантный тензор $\Psi$.

**Пример 1.** Алгебра $\boldsymbol{sl}(2)\times_\rho \mathbf{R}^2$. Это алгебра Ли группы аффинных преобразований $\mathbf{R}^2$, у которых линейная часть имеет определитель равный единице. Данная алгебра Ли имеет следующие коммутационные соотношения:

$$[e_2,e_3] = -e_1,\ [e_1,e_4] = -e_1,\ [e_1,e_5] = -e_2,\ [e_2,e_4] = e_2,\ [e_3,e_5] = e_4,$$
$$[e_3,e_4] = -2e_3,\ [e_4,e_5] = -2e_5.$$

Вычислим дивергенцию $\Psi$ (при помощи компьютерных программ, используя вышеприведенные формулы):

$$\delta\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 3 & 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

**Пример 2**. Алгебра $\boldsymbol{g}_{5,1}$ (обозначение взято из классификации [3]) задается следующими коммутационными соотношениями: $[e_2,e_4] = e_1$, $[e_3,e_5] = e_1$. Дивергенция тензора $\Psi$ будет равна 0. Покажем, что данная $SO(3)$-структура не является приближенно интегрируемой. Для этого вычислим тензор $(\nabla_X\Psi)(X,X,X) = 0$ или $\nabla_{(i}\Psi_{jkl)}$. Для доказательства достаточно привести одну ненулевую координату, например

$$\nabla_{(1}\psi_{233)} = -\psi_{p33}\Gamma_{12}^{p} - \psi_{2s3}\Gamma_{13}^{s} - \psi_{23t}\Gamma_{13}^{t} - \psi_{q33}\Gamma_{12}^{q} - \psi_{2u3}\Gamma_{13}^{u} -$$

$$-\psi_{23v}\Gamma_{13}^{v} - \psi_{x33}\Gamma_{12}^{x} - \psi_{2y3}\Gamma_{13}^{y} - \psi_{23z}\Gamma_{13}^{z} - \psi_{a33}\Gamma_{12}^{a} - \psi_{2b3}\Gamma_{13}^{b} - \psi_{23c}\Gamma_{13}^{c},$$

оставляя только ненулевые компоненты тензора $T$, получаем

$$4\psi_{133}\Gamma_{12}^{1} - 4\psi_{433}\Gamma_{12}^{4} - 8\psi_{235}\Gamma_{13}^{5} = \sqrt{3} \neq 0.$$

Приведем программу вычисления дивергенции в программе Maple. Здесь $C[i,j,k] = C_{ij}^{k}$, $\text{Gamma}[i,j,p] = \Gamma_{ij}^{p}$, nabla_Ψ – ковариантная производная тензора Ψ и delta_Ψ – дивергенция тензора Ψ.

### Вычисление компонент связности

```
> for i to 5 do for j to 5 do for p to 5 do
>Gamma[i,j,p]:=simplify((C[i,j,p]+sum(sum(g[j,s]*C[k,i,s]*g[k,p],
'k'=1..5),'s'=1..5)+sum(sum(g[i,s1]*C[k1,j,s1]*g[k1,p],'s1'=1..5)
,'k1'=1..5))/2);
>  od; od; od;
```

### Вычисление ковариантной производной тензора Ψ

```
> nabla_Ψ:=array(1..5,1..5,1..5,1..5):
> for i2 to 5 do for j2 to 5 do for k2 to 5 do for s2 to 5 do
> nabla_Ψ[s2,i2,j2,k2]:=simplify
(-sum(ψ [r2,j2,k2]* Gamma[s2,i2,r2],r2=1..5)-
sum(ψ[i2,p2,k2]*Gamma[s2,j2,p2],p2=1..5)-
sum(ψ[i2,j2,q2]*Gamma[s2,k2,q2],q2=1..5));
>  od; od; od; od;
```

Свертка с метрикой, для нахождения дивергенции тензора Ψ

```
> delta_Ψ:=array(1..5,1..5):
> for j to 5 do for k to 5 do
> delta_Ψ[j,k]:=simplify(sum(sum(g[i,s]*nabla_Ψ [s,i,j,k],
'i'=1..5),'s'=1..5));
> od; od;
```

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bobienski M.M.*, *Nurowski P.* Irreducible $SO(3)$ geometry in dimension five. arXiv:math/0507152v3 [math.DG], 2005.
2. *Fino A.A.*, *Chiossi S.G.* Nearly integrable $SO(3)$ structures on 5-dimentional lie groups // J. Lie Theory. 2007. V. 17. No. 3. P. 539–562. (arXiv:math/0607392v1 [math.DG]).
3. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv:math/0403555v2 [math.DG], 2004.
4. *Кобаяси Ш.*, *Намидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981.
5. *Agricola I.* The Srni lectures on non-integrable geometries with torsion // arXiv:math/0606705v1

Статья поступила 28.06.2012 г.

*Sedykh A.G.* ON APPROXIMATELY INTEGRABLE $SO(3)$ STRUCTURES ON 5-DIMENSIONAL MANIFOLDS. In this work, irreducible $SO(3)$ structures on a 5-dimentional manifold are considered. The covariant divergence of the structure tensor is shown to be zero for approximately integrable irreducible $SO(3)$ structures. Examples of left invariant irreducible SO(3) structures on 5-dimentional Lie groups that have a zero covariant divergence of the structure tensor but are not approximately integrable, as well as of irreducible $SO(3)$ structures with nonzero covariant divergence of the structure tensor are presented.

Keywords: special $SO(3)$ structure, 5-dimentional manifold, Lie group.

*SEDYKH Anna Gennad'evna* (Kemerovo State University)
E-mail: Nuska2522@mail.ru