ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 3(23)

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

О ПРЯМЫХ СУММАХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП С ИНВАРИАНТНЫМИ МОНОМОРФИЗМАМИ[1]

Описаны прямые суммы циклических групп с инвариантными слева или справа мономорфизмами.

Ключевые слова: *инвариантные слева или справа мономорфизмы, кольцо эндоморфизмов, прямая сумма циклических групп, периодически полная группа.*

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A, через $o(a)$ – порядок элемента a, 1_A – тождественный автоморфизм группы A, $h(a)$ – высота элемента a p-группы. Если f: $A \to B$ – гомоморфизм, то $f \mid H$ – ограничение f на $H \subseteq A$.

Будем говорить, что A – группа с *инвариантными слева* (соответственно *справа*) *мономорфизмами*, если для любых мономорфизмов α, β группы A найдется ее мономорфизм γ со свойством $\alpha\beta = \gamma\alpha$ (соответственно $\alpha\beta = \beta\gamma$). Рядом авторов изучались группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами [1, § 19, 34].

Отметим, что автоморфизмы любой группы инвариантны как слева, так и справа. Следовательно, у конечной группы все мономорфизмы инвариантны слева и справа. Для сравнения отметим, что периодические группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами имеют коммутативное кольцо эндоморфизмов [1, следствие 19.3]. В [2] изучались группы с нормальными кольцами эндоморфизмов, т.е. группы, все идемпотентные эндоморфизмы которых центральны. В [3] исследовались такие периодические группы A, что любые два элемента группы A одинакового порядка переводятся один в другой некоторым ее автоморфизмом. Близкие вопросы рассматривались в [4–24] и др.

Автором получены следующие результаты:

Теорема 1. *Для делимой группы D эквивалентны следующие условия*:

а) *ее мономорфизмы инвариантны справа*;

б) *любой ее мономорфизм является автоморфизмом*;

в) *часть без кручения группы D, а также каждая ее p-компонента имеют конечный ранг*.

Теорема 2. 1) *Мономорфизмы каждой делимой группы инвариантны слева*.

2) *Если делимая часть группы A является группой, рассматриваемой в теореме* 1, *то мономорфизмы группы A инвариантны слева тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная часть*.

3) *У нередуцированной группы мономорфизмы инвариантны справа тогда и только тогда, когда этим свойством обладают ее редуцированная и делимая части*.

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, № 14. В 37.21.0354 и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Автором изучались также группы без кручения с инвариантными мономорфизмами. Так, доказано, что у редуцированной группы без кручения с инвариантными слева или справа мономорфизмами кольцо эндоморфизмов является нормальным.

Ясно, что при изучении периодических групп с инвариантными мономорфизмами можно ограничиться примарным случаем. Ввиду отмеченного выше свойства конечных групп следующая теорема требует доказательства только необходимости.

Теорема 3. *Пусть A – p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Мономорфизмы группы A инвариантны справа тогда и только тогда, когда она является конечной группой.*

Доказательство. Если A – бесконечная прямая сумма циклических групп, то можно так подобрать ее мономорфизмы α и β, что $\operatorname{im}\alpha \cap \operatorname{im}\beta = 0$, но тогда равенство $\alpha\beta = \beta\gamma$ невозможно.

Всякую чистую подгруппу, являющуюся прямой суммой циклических групп, можно вложить в некоторую базисную подгруппу p-группы. Однако не всякий мономорфизм базисной подгруппы, даже если он продолжается до эндоморфизма самой группы, является ее мономорфизмом.

Предложение 4. *Пусть A – неограниченная редуцированная периодически полная p-группа. Тогда для каждой ее базисной подгруппы B существует такой эндоморфизм* $\varphi \in E(A)$, *что* $\ker(\varphi \mid B) = 0$, $\varphi \mid B \in E(B)$ *и* $\ker\varphi \neq 0$.

Доказательство. Поскольку группа A неограничена, то ее базисная подгруппа $B \neq A$. Запишем B в виде $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{k_n}$, где B_{k_n} – прямая сумма циклических групп порядка p^{k_n}, $B_{k_n} \neq 0$ и $k_1 < k_2 < \ldots$. Выберем в каждой B_{k_n} по циклическому прямому слагаемому $\langle b_{k_n} \rangle$ и построим отображение:

$$b_{k_1} \mapsto p^{k_2-k_1} b_{k_2} \text{ и } b_{k_n} \mapsto -b_{k_n} + p^{k_{n+1}-k_n} b_{k_{n+1}} \text{ при } n > 1;$$

ясно, что его можно продолжить до мономорфизма f группы B (в общем случае не однозначно). Подгруппа $B_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle b_{k_n} \rangle$ является прямым слагаемым в B, $B = B_1 \oplus B_2$. Имеем $A = \overline{B_1} \oplus \overline{B_2}$, где черта обозначает периодическое p-адическое пополнение (т.е. всякая ограниченная последовательность Коши этой группы в p-адической топологии имеет предел). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $A = \overline{B_1}$. В силу периодической полноты группы A f продолжается (единственным образом) до эндоморфизма φ группы A. Каждый элемент группы A можно представить в виде $(b'_{k_1}, b'_{k_2}, \ldots)$, где $b'_{k_i} \in B_{k_i}$. Если теперь

$$a = (p^{k_1-1} b_{k_1}, p^{k_2-1} b_{k_2}, \ldots, p^{k_n-1} b_{k_n}, \ldots), \text{ то } \varphi a = 0.$$

Действительно,

$$a = p^{k_1-1} b_{k_1} + p^{k_2-1} b_{k_2} + \ldots + p^{k_n-1} b_{k_n} + p^{k_{n+1}-1} a_n,$$

где

$$a_n = (0, \ldots, 0, b_{k_{n+1}}, p^{k_{n+2}-k_{n+1}} b_{k_{n+2}}, \ldots).$$

Откуда $\varphi a = p^{k_{n+1}-1}(b_{k_{n+1}} + \varphi a_n) \in p^{k_{n+1}-1} A$ и, значит, $\varphi a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} p^{k_n} A = 0$.

Заметим, что всякий эпиморфизм f базисной подгруппы B периодически полной p-группы A продолжается до эпиморфизма группы A. Действительно, f продолжается до эндоморфизма φ группы A, а так как $A = \overline{B}$ и $\varphi B = B$, то $\varphi A = \varphi\overline{B} = \overline{\varphi B} = \overline{B} = A$. Аналогичное утверждение справедливо для p-адической алгебраически компактной группы.

Пусть p-группа A имеет подгруппу вида $H = \langle b\rangle \oplus \langle g\rangle \oplus C$, где $o(b) \le o(g)$, а C – бесконечная прямая сумма циклических групп, каждый образующий которой имеет порядок $> o(g)$; причем мономорфизмы подгруппы H продолжаются до мономорфизмов группы A. Тогда A не обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов.

Действительно, так как группа C бесконечна, то можно построить такие мономорфизмы α, β группы H, что $\alpha b = b$, $\alpha g = p^k x$, где $x \in C$, $k \ge 1$ и $\beta g = b + g$. Тогда $\alpha\beta(g) = \alpha(b + g) = b + p^k x \ne \gamma\alpha(g) = \gamma(p^k x)$ для любого $\gamma \in E(A)$.

В частности, пусть A – редуцированная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп и ее мономорфизмы инвариантны слева. Тогда, как это вытекает из предыдущего абзаца, либо A – конечная группа, либо имеет вид (∗) $A = B \oplus G \oplus F$, где $B = \langle b\rangle$ – циклическая группа, G – бесконечная прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^r и, если $B \ne 0$, то $p^r > o(b)$, а $F = 0$ или $F = \bigoplus_{i=1}^{n}\langle x_i\rangle$ – такая конечная группа, что $p^r < o(x_i)$ для каждого $i = 1,\ldots,n$.

Теорема 5. *У всякой p-группы A, имеющей вид* (∗), *мономорфизмы инвариантны слева.*

Доказательство. Пусть α – мономорфизм группы A. Так как высоты элементов из цоколя $F[p] = \{x \in F \mid px = 0\}$ группы F больше высот элементов из $B \oplus G$, то $(\alpha(F[p]))\cap(B \oplus G) = 0$ и, значит, $(\alpha F)\cap(B \oplus G) = 0$. Следовательно, если θ – проекция группы A на F, то $(\theta\alpha) \mid F$ – мономорфизм конечной группы F, поэтому $(\theta\alpha)F = F$. Таким образом, $(B \oplus G) \oplus \alpha F = A$. Далее $\alpha B\cap\alpha G = 0$ и $\alpha(B \oplus G)\cap\alpha F = 0$. А поскольку прямое слагаемое αF является абсолютным в A [25, § 9, упр. 8], то существует такое разложение $A = C \oplus \alpha F$, что $\alpha(B \oplus G) \subseteq C$. Здесь $C \cong B \oplus G$, поэтому αG является ограниченной чистой подгруппой в C, значит, αG – прямое слагаемое в C, $C = \alpha G \oplus E$ [25, предложение 27.1]. Имеем $C = K \oplus (\alpha G \oplus Z)$, где $K \cong B$, а $\alpha G \oplus Z \cong G$. Аналогичным образом, для всякого мономорфизма β группы A получаем

$$A = V \oplus (\alpha\beta G \oplus U) \oplus \alpha\beta F, \text{ где } V \cong B,\ \alpha\beta G \oplus U \cong G, \text{ а } \alpha\beta F \cong F.$$

Поэтому существует мономорфизм γ: $\alpha G \oplus \alpha F \to \alpha\beta G \oplus \alpha\beta F$, такой, что $\gamma\alpha = \alpha\beta$ на подгруппе $G \oplus F$ (достаточно задать γ на образующих этих подгрупп). Осталось показать, что мономорфизм γ можно распространить на $K \oplus Z$ так, чтобы равенство $\gamma\alpha = \alpha\beta$ осталось верным. Заметим, что так как $\alpha\beta A \subseteq \alpha A$, то несложно показать, что ранг группы U не меньше ранга группы Z. Поэтому, если $B = 0$, то можно продолжить γ на Z как произвольный мономорфизм $Z \to U$, и в этом случае утверждение доказано.

Допустим, что $B \ne 0$ и $o(b) = p^k$. Имеем

$$\alpha b = x + y + z, \text{ где } x \in K, y \in \alpha G, z \in Z,$$

$$\alpha\beta b = v + w + u + h, \text{ где } v \in V, w \in \alpha\beta G, u \in U, h \in \alpha\beta F.$$

Элемент u можно вложить в циклическое прямое слагаемое $\langle u_0\rangle$ группы U, $U = \langle u_0\rangle \oplus U'$.

Предположим, что высота $h(\alpha b)$ элемента αb равна 0. Так как $h(y), h(z) > 0$, то $h(x) = 0$ и поэтому $K = \langle x\rangle$. Кроме того, $C = \langle x + y + z\rangle \oplus \alpha G \oplus Z$. Значит, можно считать, что $y = z = 0$, т.е. $\alpha b = x$ и $K = \langle \alpha b\rangle$. Если $h(\alpha b) = 0$, то и $h(\alpha\beta b) = 0$. Поэтому можно считать, что $V = \langle \alpha\beta b\rangle$. Положим $\gamma(\alpha b) = \alpha\beta b$ и зададим γ на Z как произвольный мономорфизм $Z \to U$. Построенный γ будет искомым мономорфизмом; γ можно построить и в том случае, если $h(\beta b) > 0$, а Z имеет бесконечный ранг.

Пусть ранг группы Z конечен и $h(\beta b) > 0$. Покажем, что ранг группы U больше ранга группы Z. Так как $h(\alpha b) = 0$, то $K = \langle \alpha b\rangle = \alpha B$ и, значит, $K \oplus \alpha G \oplus \alpha F = \alpha A$. Ранги групп Z и U совпадают с соответствующими рангами их цоколей $Z[p]$ и $U[p]$. Поскольку $h(\alpha\beta b) > 0$, то $h(v) > 0$ и, значит, $p^{k-1}v = 0$. Поэтому

$$p^{k-1}\alpha\beta b \in (p^{r-1}A)[p] = (\alpha\beta G \oplus U \oplus \alpha\beta F)[p],$$

а так как $Z[p] \subseteq (p^{r-1}A)[p]$, то, если ранги подгрупп $Z[p]$ и $U[p]$ совпадают, найдется такой элемент $z \in Z[p]$, что

$$p^{k-1}\alpha\beta b - z \in (\alpha\beta G \oplus \alpha\beta F)[p].$$

Отсюда $z \in \alpha A$. Противоречие. Итак, ранг Z не больше ранга группы U'. Поэтому если $\gamma(\alpha b) = \alpha\beta b$ и γ действует на Z как произвольный мономорфизм $Z \to U'$, то он является искомым.

Допустим теперь, что $h(\alpha b) > 0$. Так как $o(\alpha b) = o(b)$, а $o(x) < o(b)$ (ввиду того, что $h(\alpha b) > 0$), то $o(z) = o(b)$ и, значит, $h(z) = r - k$. Элемент z можно вложить в циклическое прямое слагаемое $\langle z_0\rangle$ группы Z, $Z = \langle z_0\rangle \oplus Z'$.

Предположим, что $h(x) \geq r - k$. Тогда $h(v) \geq r - k$. Пусть γ действует на K и Z' как произвольные мономорфизмы $K \to V$, $Z' \to U'$. Так как $h(y) \geq r - k$, то отображение $z \to c$, где $c = v + w + u + h - \gamma y - \gamma x$ ($y \in \alpha G$, поэтому элемент γy определен), продолжается до мономорфизма $\langle z_0\rangle \to \langle c_0\rangle$, где $p^{r-k}c_0 = c$. Поскольку $o(b) = o(u)$, то каждая из подгрупп γK, $\gamma\alpha G$, $\gamma\langle z_0\rangle$, $\gamma Z'$, $\gamma\alpha F$ не пересекается с суммой других. Откуда следует, что γ – мономорфизм; он является искомым.

Пусть, наконец, $h(x) < r - k$ и $h(x) = s > 0$. Так как $h(v) \geq h(x)$, то существует гомоморфизм $K \to V$, переводящий элемент x в v. Выберем элемент $u' \in \langle u_0\rangle$ со свойством $o(u') = o(x)$ и положим $\gamma x = v + u'$. Тогда ограничение γ на K является мономорфизмом $K \to V \oplus \langle u_0\rangle$. Поскольку $h(u') > h(u)$ (и, значит, $o(u') < o(u)$), то отображение $z \mapsto w + u + h - \gamma y - u'$ продолжается до мономорфизма $\langle z_0\rangle \to A$. Здесь также $o(b) = o(u)$. Продолжая действие γ на Z' как произвольный мономорфизм $Z' \to U'$, получаем искомый мономорфизм γ.

Для доказательства теоремы 6 потребуются следующие свойства:

Если группа обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов, то каждое ее вполне инвариантное прямое слагаемое также обладает этим свойством.

Если группа обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов, то каждое ее прямое слагаемое также обладает этим свойством.

Действительно, пусть $A = B \oplus C$ и α, β – мономорфизмы группы B. Продолжим их до мономорфизмов $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ группы A, полагая $\overline{\alpha} \mid C = 1_C$, $\overline{\beta} \mid C = 1_C$. Тогда если $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\beta}\gamma$, то из задания $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ следует, что $\gamma \mid B$ – мономорфизм группы B и $\alpha\beta = \beta(\gamma \mid B)$.

Теорема 6. *Пусть $A = T \oplus R$ – редуцированная расщепляющаяся группа, где T – периодическая ее часть, а R – часть без кручения. Тогда*:

1) *группа A обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладают группы T и R, причем подгруппа R вполне инвариантна в A*;

2) *если T – конечная группа, то группа A обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает группа R.*

Доказательство. Ввиду отмеченных перед теоремой двух свойств для доказательств необходимости осталось показать вполне инвариантность подгруппы R в случае левой инвариантности. Пусть $fx \neq 0$ для некоторого $x \in R$, где $f \in \mathrm{Hom}(R,T)$. В силу редуцированности $fx \notin nT$ для некоторого n. Зададим мономорфизмы α, β группы A следующим образом: $\alpha \mid T = 1_T$, $\alpha \mid R = n \cdot 1_R$, $\beta \mid T$ – произвольный мономорфизм группы T, а $\beta y = fy + y$ для каждого $y \in R$. Имеем $\alpha\beta(x) = \alpha(fx + x) = fx + nx$. Допустим, что $\alpha\beta(x) = \gamma\alpha(x)$. Тогда если π: $A \to T$ – проекция, то $\pi\gamma\alpha(x) = n\gamma(x) = fx$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{Hom}(R,T) = 0$, т.е. $pR = R$ для каждого простого p с условием $T_p \neq 0$.

Доказательство достаточности требуется для правой инвариантности. Ввиду вполне инвариантности подгруппы T эндоморфизмы f,g группы A можно представить в виде матриц $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \delta \in E(T)$, $\beta, \varepsilon \in \mathrm{Hom}(R,T)$, а $\gamma, \zeta \in E(R)$. Имеем $\alpha\delta = \delta\eta$, $\gamma\zeta = \zeta\lambda$ для некоторых мономорфизмов $\eta \in E(T)$ и $\lambda \in E(R)$. Мономорфизм δ является автоморфизмом группы T. Поэтому определен гомоморфизм

$$\mu = \delta^{-1}(\alpha\varepsilon + \beta\zeta - \varepsilon\lambda) \in \mathrm{Hom}(R,T).$$

Если теперь $h = \begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $fg = gh$.

В следующем результате через $\mathbf{Z}$ обозначается аддитивная группа целых чисел.

Следствие 7. *Пусть A – прямая сумма циклических групп. Группа A обладает свойством*:

1) *левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда, либо A – периодическая группа, каждая p-компонента которой конечна или имеет вид* (∗) *из теоремы* 5, *либо* $A \cong \mathbf{Z}$;

2) *правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда $A = B \oplus R$, где B – периодическая группа, каждая p-компонента которой является конечной, а* $R = 0$ *или* $R \cong \mathbf{Z}$.

В [26] некоторые понятия и результаты теории абелевых групп перенесены на близкие классы алгебр, а в [27] рассматривались вопросы продолжения автоморфизмов подмодулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.
2. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
3. *Гриншпон С.Я.* Почти гомоморфно изоморфные абелевы группы // Труды Томск. ун-та. 1975. Т. 220. С. 78–84.
4. *Hausen J., Johnson J.A.* Abelian groups with many automorphisms // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1976 (1977). V. 55. P. 1–5.
5. *Reid J.D.* On subcommutative rings // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1965. V. 16. P. 23–26.
6. *Lanver D.A.* Abelian groups in which endomorphic images are fully invariant // J. Algebra. 1974. V. 29. P. 232–245.

7. *Фомин А.А.* Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 2. С. 179–187.
8. *Куликов Л.Я.* К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. 1945. Т. 16. № 2. С. 129–162.
9. *Крылов П.А.* Продолжение изоморфизмов в абелевых *p*-группах // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 4. С. 543–548.
10. *Царев А.В.* Некоторые морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49. № 4. С. 945–953.
11. *Себельдин А.М.*, *Чистяков Д.Н.* Определяемость абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 6. С. 952–954.
12. *Благовещенская Е.А.* Определяемость абелевых групп без кручения счетного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 1. С. 31–43.
13. *Мишина А.П.* Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп. II // Вестн. Моск. ун-та. Матем. и механ. 1972. № 1. С. 62–66.
14. *Абызов А.Н.*, *Туганбаев А.А.* Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фунд. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 7. С. 3–38.
15. *Чехлов А.Р.* Об абелевых cs-группах без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. № 3. С. 84–87.
16. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
17. *Чехлов А.Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76–82.
18. *Чехлов А.Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31–36.
19. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах нильгрупп // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 297–304.
20. *Чехлов А.Р.* О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 2. С. 451–464.
21. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
22. *Чехлов А.Р.* О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1157–1165.
23. *Кожухов С.Ф.* Регулярно полные абелевы группы // Изв. вузов. Математика. 1980. № 12. С. 14–19.
24. *Danchev P.V.* Quasi-complete Q-groups are bounded // Владикавк. матем. журн. 2008. Т. 10. № 1. С. 24–26.
25. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
26. *Мартынов Л.М.* О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 103–112.
27. *Туганбаев А.А.* Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискрет. матем. 2013. Т. 25. № 1. С. 144–151.

Статья принята в печать 2013 г.

Chekhlov A.R. ON DIRECT SUMS OF CYCLIC GROUPS WITH INVARIANT MONOMORPHISMS. Direct sums of cyclic groups with left or right invariant monomorphisms are described.

Keywords: left or right invariant monomorphisms, endomorphism ring, direct sum of cyclic groups, torsion complete group.

CHEKHLOV Andrey Rostislavovich (Tomsk State University)
E-mail: cheklov@math.tsu.ru