УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД*

В рамках энергетической теории гидродинамической устойчивости с помощью метода коллокаций численно решена вариационная задача определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода для течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. Течение газа описывалось системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывалась зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. Показано, что в реальном для двухатомных газов диапазоне параметров режима течения минимальные критические значения числа Рейнольдса достигаются на модах продольных возмущений и с ростом числа Маха, объемной вязкости и времени колебательной релаксации увеличиваются в пределе приблизительно в два с половиной раза.

Ключевые слова: *энергетическая теория*, *гидродинамическая устойчивость*, *колебательная релаксация*, *уравнения двухтемпературной аэродинамики*, *критическое число Рейнольдса*.

В работе [1] выведено уравнение энергетического баланса для плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного молекулярного газа. На основе этого уравнения получено асимптотическое решение вариационной задачи определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода Re_c в течении Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. В пределе малых волновых чисел возмущений найдена зависимость главного члена асимптотики от числа Маха M, коэффициента объемной вязкостей η_b, степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} и времени колебательной релаксации τ_{VT} в виде

$$\mathrm{Re}_c \sim \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}}\left[1 - \frac{(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}}{2\pi^2}\left(1 - \frac{20\gamma_{vib}\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma\tau_{VT} + 33\,\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}\right)\right],$$

где $\alpha_1 = \eta_b/\eta$, η – коэффициент сдвиговой вязкости, Pr – число Прандтля, γ – показатель адиабаты.

В данной работе вариационная задача, сформулированная в [1], решается численно во всем диапазоне волновых чисел продольных и поперечных возмущений. Течение Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа описывается системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. В качестве температурной зависимости коэффициентов переноса выбран степенной закон T^n с показателем $n \le 1$. Выбранная зависимость соответствует условиям относительно холодного несущего потока (мягким потенциалам межмолекулярного взаимодей-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00064).

ствия [2–4]). Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от статической и колебательной температур потока и постоянны. В соответствии с физическими представлениями [3, 4] модель двухтемпературной аэродинамики является общепринятой физико-математической моделью течений колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией молекул, возбуждением верхних колебательных уровней и поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

Основные уравнения и энергетический функционал

Задача устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа рассматривается в расчетной области Ω, представляющей собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3), а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2.

В качестве характерных величин для обезразмеривания использованы полуширина канала L по оси x_2, модуль скорости потока U_0 на непроницаемых стенках канала, постоянные плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения и образованные из них время $\rho_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты переноса обезразмеривались на их значения при температуре T_0: сдвиговая и объемная вязкости на η_0 и $\eta_{b,0}$, а коэффициенты теплопроводности, обусловленные упругими энергообменами между поступательными степенями свободы молекул и неупругими обменами энергией вращательных и колебательных степеней свободы молекул с поступательными модами молекул, соответственно на $\lambda_{tr,0}$, $\lambda_{rot,0}$, $\lambda_{vib,0}$. В безразмерных переменных система уравнений двухтемпературной аэродинамики с учетом зависимости коэффициентов переноса от температуры потока записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta(T)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta(T)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right],$$

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + (\gamma - 1)\rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left[\eta(T)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right] + \frac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\rho\,(T_{\mathrm{vib}} - T)}{\tau_{\mathrm{VT}}(1 - \gamma_{\mathrm{vib}})}, \qquad (1)$$

$$\frac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\rho}{(1-\gamma_{\mathrm{vib}})}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{vib}}}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_{\mathrm{vib}}}{\partial x_i}\right) = \frac{\gamma\,\alpha_2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left[\eta(T)\frac{\partial T_{\mathrm{vib}}}{\partial x_i}\right] - \frac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\rho\,(T_{\mathrm{vib}} - T)}{\tau_{\mathrm{VT}}(1 - \gamma_{\mathrm{vib}})},$$

$$\gamma \mathrm{M}^2 p = \rho T, \;\; \eta(T) = T^n, \;\; i = 1,2,3, \;\; j = 1,2,3,$$

где ρ, u_i, p, T, T_{vib}, τ_{VT} – плотность, компоненты вектора скорости, давление, статическая и колебательные температуры газа и время колебательной релаксации соответственно, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В уравнении энергии системы (1) опущена группа нелинейных слагаемых, составляющих диссипативную функцию. Такое приближение является распространенным в задачах устойчивости сжимаемых течений [5].

Параметры, входящие в уравнения системы (1), определяются следующим образом: $\alpha_1 = \eta_{b,0}/\eta_0$ – отношение объемной и сдвиговой вязкостей; $\alpha_2 = \lambda_{vib,0}/(\lambda_{tr,0}+\lambda_{rot,0})$; параметр $\gamma_{vib} = c_{vib}/(c_{tr}+c_{rot}+c_{vib})$ определяет долю внутренней энергии газа, приходящуюся на колебательные моды молекул, и в каком-то смысле характеризует степень неравновесности последних [6–8]; безразмерные критерии $\mathrm{Re}=U_0 L\rho_0/\eta_0$, $\mathrm{M}=U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$ и $\mathrm{Pr}=\eta_0(c_{tr}+c_{rot})/(\lambda_{tr,0}+\lambda_{rot,0})$ есть соответственно числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока, где $\gamma=(c_{tr}+c_{rot}+R)/(c_{tr}+c_{rot})$ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная и c_{tr}, c_{rot}, c_{vib} – соответственно удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод молекул газа.

Система (1) описывает распространенную в аэродинамике ситуацию, когда характерные времена микроскопических процессов энергообмена между различными степенями свободы молекул газа оцениваются системой неравенств [3, 4]: $\tau_{TT} \sim \tau_{RT} \ll \tau_{VV} \ll \tau_{VT} \sim \tau_0$. Причем в этом случае поступательные и вращательные степени свободы молекул с малыми соизмеримыми временами релаксации $\tau_{TT} \sim \tau_{RT}$ на временах порядка характерного времени течения τ_0 образуют квазиравновесный термостат с температурой потока T. В подсистеме же колебательных уровней энергии по истечению времени τ_{VT} устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_{vib}. Обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы молекул газа описывается релаксационным уравнением Ландау – Теллера с характерным временем τ_{VT}. Такое представление позволяет уменьшить число независимых параметров в системе (1) следующим образом.

Используя соотношения Эйкена [2–4], связывающие парциальные коэффициенты теплопроводности с коэффициентом сдвиговой вязкости, запишем параметр α_2 в виде

$$\alpha_2 = \lambda_{vib,0}\big/(\lambda_{tr,0}+\lambda_{rot,0}) = 12\gamma_v(c_{tr}+c_{rot})\big/(25c_{tr}+12c_{rot}).$$

Так как поступательные и вращательные степени свободы молекул находятся в состоянии квазиравновесия, для их внутренней энергии справедливо равнораспределение по степеням свободы. Отсюда значения соответствующих теплоемкостей выражаются как $c_{tr}=3R/2$, $c_{rot}=R$. В результате имеем, что $\alpha_2 = 20\gamma_{vib}\big/[33(1-\gamma_{vib})]$.

Нижний предел $\gamma_{vib}=0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равнораспределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib}, поскольку закон равнораспределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_{vib} может быть достаточно велик. В монографии [4] показано, что при $T = 300$ K неравновесная теплоемкость $c_{vib}\approx 1{,}8R$. Используя равнораспределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{vib} \approx 0{,}42$. С ростом разрыва между температурами T_{vib} и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. В расчетах максимальное значение параметра γ_{vib} было выбрано $\gamma_{\text{vib}} = 0{,}4$ для того, чтобы остаться в рамках используемой модели, избежав возбуждения высоких колебательных уровней энергии.

В качестве основного (несущего) потока выбрано плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температур:

$$\boldsymbol{U}_S(x_2) = (x_2, 0, 0),\ T_S = T_{\text{vib},S} = \rho_S = 1,\ p_S = 1/(\gamma \mathrm{M}^2). \tag{2}$$

Представляя мгновенные значения гидродинамических переменных в виде

$$u_i = U_{S,i} + u_i',\ \rho = 1 + \rho',\ T = 1 + T',\ T_{\text{vib}} = 1 + T_{\text{vib}}',\ p = 1/(\gamma \mathrm{M}^2) + p',$$

получим систему уравнений для возмущений ρ', u'_i, T', T'_{vib}, основного течения с точностью до членов первого порядка малости по возмущениям

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_{S,i}\frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0,$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_{S,j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \frac{n}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[T'\left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i}\right)\right],\end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_{S,j}\frac{\partial T'}{\partial x_j} + (\gamma - 1)\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_{\text{vib}}(T_{\text{vib}}' - T')}{\tau_{\text{VT}}(1 - \gamma_{\text{vib}})},$$

$$\frac{\gamma_{\text{vib}}}{(1 - \gamma_{\text{vib}})}\left(\frac{\partial T_{\text{vib}}'}{\partial t} + U_{S,j}\frac{\partial T_{\text{vib}}'}{\partial x_j}\right) = \frac{20\gamma\gamma_{\text{vib}}}{33\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}(1 - \gamma_{\text{vib}})}\frac{\partial^2 T_{\text{vib}}'}{\partial x_j^2} - \frac{\gamma_{\text{vib}}(T_{\text{vib}}' - T')}{\tau_{\text{VT}}(1 - \gamma_{\text{vib}})},$$

$$\gamma \mathrm{M}^2 p' = \rho' + T',\ i = 1,2,3,\quad j = 1,2,3.$$

Предполагается, что при $x_1 = \pm\pi/\alpha$ и $x_1 = \pm\pi/\delta$ возмущения гидродинамических переменных удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения. Здесь α, δ – модули проекций волнового вектора возмущения $\boldsymbol{k}$ на оси координат (x_1, x_3).

Полная энергия возмущений в сжимаемом колебательно-неравновесном молекулярном газе помимо кинетической составляющей должна учитывать энергию внутренних степеней свободы молекул газа и степень сжимаемости течения. В работах [1, 8] для задачи (3) рассматривался положительно определенный для любых возмущений функционал полной пульсационной энергия возмущений

$$E_\Sigma(t) = \frac{1}{2}\left\langle u_i'^2 + \frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}\left[\rho'^2 + \frac{1}{\gamma - 1}\left(T'^2 + \frac{\gamma_{\text{vib}} T_{\text{vib}}'^2}{1 - \gamma_{\text{vib}}}\right)\right]\right\rangle,$$

где угловые скобки обозначают усреднение по пространству расчетной области Ω в виде

$$< \ldots > = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} dx_1 \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} dx_2 \int_{-1}^{1} dx_3\,(\ldots).$$

Для данного функционала уравнение энергетического баланса записывается в форме

$$\frac{dE_\Sigma}{dt} \equiv \Phi = -\left\langle u_i' u_j' \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\gamma_{\text{vib}}}{\gamma(\gamma-1)(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}\,\text{M}^2}\left\langle (T'_{\text{vib}} - T')^2 \right\rangle -$$
$$-\frac{1}{\text{Re}}\left\langle \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}\right)^2 + nT'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i}\right)\right\rangle - \tag{4}$$
$$-\frac{1}{(\gamma-1)\,\text{Re}\,\text{Pr}\,\text{M}^2}\left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{20\gamma_{\text{vib}}}{33(1-\gamma_{\text{vib}})}\left(\frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial x_i}\right)^2 \right\rangle.$$

Из уравнения (4) следует, что для фиксированных значений параметров M, α_1, τ_{VT} и γ_{vib} уменьшение числа Рейнольдса, начиная с некоторого критического значения Re_c, сделает правую часть уравнения (4) отрицательной. При этом $dE_\Sigma/dt < 0$ и любые возмущения будут затухать. Критическое число Рейнольдса Re_c соответствует нейтральным возмущениям, когда $dE_\Sigma/dt = 0$, и вычисляется как минимум функционала Φ в правой части энергетического уравнения (4).

Спектральная задача и ее качественные свойства

Из условия экстремума функционала Φ (4) на множестве допустимых функций следуют уравнения Эйлера – Лагранжа, определяющие обобщенную дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re. С учетом профилей гидродинамических величин основного потока (2) эти уравнения принимают вид

$$\Delta u_1' + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial D}{\partial x_1} + \frac{n}{2}\frac{\partial T'}{\partial x_2} = \frac{\text{Re}}{2}u_2',$$

$$\Delta u_2' + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial D}{\partial x_2} + \frac{n}{2}\frac{\partial T'}{\partial x_1} = \frac{\text{Re}}{2}u_1', \quad \Delta u_3' + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial D}{\partial x_3} = 0,$$

$$\Delta T' - \varepsilon_1\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_1}\right) = -\frac{20\varepsilon_2\gamma_{\text{v}}}{33}\text{Re}\,(T'_{\text{vib}} - T'),\ \ \Delta T'_{\text{vib}} = \varepsilon_2\,\text{Re}\,(T'_{\text{vib}} - T'), \tag{5}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2},\ \ D = \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_3},$$

где параметры ε_1, ε_2 и γ_{v} записываются следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}n(\gamma-1)\text{M}^2\,\text{Pr},\ \ \varepsilon_2 = \frac{33\,\text{Pr}}{20\gamma\tau_{\text{VT}}},\ \ \gamma_{\text{v}} = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1-\gamma_{\text{vib}}}.$$

Граничные условия, которым удовлетворяют амплитудные функции u'_i, T' и T'_{vib} в уравнениях системы (5), аналогичны условиям, поставленным для системы уравнений (3).

После подстановки в уравнения (5) вектора возмущений

$$\boldsymbol{q}'(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{q}(x_2)\exp[-i(\alpha x_1 + \delta x_3)]$$

(где $\boldsymbol{q}' = (u_1', u_2', u_3', T', T'_{\text{vib}})$, $\boldsymbol{q}(x_2) = (u, v, w, \theta, \theta_{\text{v}})$, а i – мнимая единица) спектральная задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пульсаций u, v, w, θ и θ_v:

$$u''-\left[\alpha^2\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)+\delta^2\right]u+i\alpha\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)v'-\alpha\delta\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)w+\frac{n}{2}\theta'=\frac{\mathrm{Re}\,v}{2},$$

$$\left(\alpha_1+\frac{4}{3}\right)v''-(\alpha^2+\delta^2)v+i\alpha\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)u'+i\delta\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)w'-\frac{i\alpha n}{2}\theta=\frac{\mathrm{Re}\,u}{2}, \tag{6}$$

$$w''-\left[\alpha^2+\delta^2\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)\right]w-\alpha\delta\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)u+i\delta\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)v'=0,$$

$$\theta''-(\alpha^2+\delta^2)\theta-\varepsilon_1(v'-i\alpha u)=\frac{20\varepsilon_2\gamma_v}{33}\mathrm{Re}(\theta-\theta_v),\quad \theta_v''-(\alpha^2+\delta^2)\theta_v=\varepsilon_2\,\mathrm{Re}(\theta_v-\theta);$$

$$u|_{x_2=\pm1}=v|_{x_2=\pm1}=w|_{x_2=\pm1}=\theta|_{x_2=\pm1}=\theta_v|_{x_2=\pm1}=0, \tag{7}$$

где штрихи у неизвестных функций обозначают производные соответствующего порядка по переменной x_2.

Спектральная задача (6), (7) имеет следующие свойства.

1. Спектр собственных значений Re задачи (6), (7) вещественен. Это свойство следует из энергетического тождества для системы (6), (7), которое получается умножением уравнений (6) на комплексно-сопряженные функции u^*, v^*, w^*, θ^*, θ_v^*, суммированием их и интегрированием по интервалу $x_2 \in [-1, 1]$. С учетом однородных граничных условий (7) имеет место следующее выражение:

$$\frac{\mathrm{Re}}{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(u^*v+uv^*\right)+\frac{2\gamma_v|\theta-\theta_v|^2}{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2\tau_{\mathrm{VT}}}\right]dx_2+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[|u'|^2+\left(\alpha_1+\frac{4}{3}\right)|v'|^2+|w'|^2+\left(\delta^2+\left(\alpha_1+\frac{4}{3}\right)\alpha^2\right)|u|^2+\left(\alpha^2+\delta^2\right)|v|^2+\right.$$

$$\left.+\left(\alpha^2+\left(\alpha_1+\frac{4}{3}\right)\delta^2\right)|w|^2+\frac{|\theta'|^2+(\alpha^2+\delta^2)|\theta|^2}{(\gamma-1)\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}}+\frac{20\gamma_v\left(|\theta_v'|^2+\left(\alpha^2+\delta^2\right)|\theta_v|^2\right)}{33(\gamma-1)\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}^2}\right]dx_2+ \tag{8}$$

$$+\alpha\delta\left(\alpha_1+\frac{4}{3}\right)\int_{-1}^{1}\left(u^*w+uw^*\right)dx_2-n\int_{-1}^{1}(u_r\theta_r'-u_i'\theta_i)dx_2+2\alpha\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)\int_{-1}^{1}(u_rv_i'+u_i'v_r)dx_2+$$

$$+2\delta\left(\alpha_1+\frac{1}{3}\right)\int_{-1}^{1}(v_rw_i'+v_i'w_r)dx_2+\alpha n\int_{-1}^{1}(v_r\theta_i-v_i\theta_r)dx_2=0,$$

где индексы r и i обозначают вещественную и мнимую части соответствующих комплекснозначных функций.

Вещественность спектрального параметра Re определяется вещественностью всех слагаемых равенства (8). Вместе с тем квадратичная форма, которую определяет энергетическое тождество (8), не является положительно определенной. Это означает, что собственные значения могут быть также отрицательными, поэтому в расчетах следует искать минимальное по модулю собственное значение min |Re|.

2. Спектр собственных значений Re(α, δ) задачи (6), (7) симметричен относительно осей $\alpha = 0$, $\delta = 0$ на плоскости волновых чисел (α, δ). Действительно, из уравнений системы (6) следует, что каждому собственному значению Re(α, δ) с собственными функциями u, v, w, θ, θ_v соответствует равное ему собственное значение Re($-\alpha$, $-\delta$) с собственными функциями u^*, v^*, w^*, θ^*, θ_v^*. Также то же собст-

венное значение $\mathrm{Re}(\alpha, \delta)$ соответствует паре волновых чисел $(\alpha, -\delta)$ с набором собственных функций u, v, $-w$, θ, θ_v и паре волновых чисел $(-\alpha, \delta)$ с набором собственных функций u^*, v^*, $-w^*$, θ^*, θ_v^*.

В [1] показано, что если в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы [2, 3], то для задачи (6), (7) в случае длинноволновых продольных ($\alpha \ll 1$, $\delta = 0$) и поперечных ($\alpha = 0$, $\delta \ll 1$) возмущений имеют место асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса в виде

$$\mathrm{Re}_c^{(\alpha)} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}}\left[1 - \frac{(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}}{2\pi^2}\left(1 - \frac{20\gamma_{\mathrm{vib}}\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma\tau_{\mathrm{VT}} + 33\,\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}\right)\right] - \pi\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right),$$

$$\mathrm{Re}_c^{(\delta)} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}}\left[1 - \frac{(\gamma-1)\,\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}}{2\pi^2}\left(1 - \frac{20\gamma_{\mathrm{vib}}\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma\tau_{\mathrm{VT}} + 33\,\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}\right)\right]. \qquad (9)$$

Численное решение спектральной задачи

Для произвольных значений волновых чисел α, δ спектральная задача (6), (7) решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций, основанный на полиномиальной интерполяции собственных функций полиномами Чебышева [9, 10]. В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса – Лобатто $x_{2,k} = \cos(\pi k/N)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, в которых полином Чебышева N-й степени имеет экстремумы на отрезке $x_2 \in [-1, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных D_N^1 [9, 10] размером $(N+1)\times(N+1)$, элементы которой определяются по формулам

$$D_{N,ij}^1 = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\ell+j}\, s_\ell}{s_j(x_{2,\ell} - x_{2,j})}, & \ell \ne j, \\[2mm] -\dfrac{x_{2,j}}{2(1-x_{2,j}^2)}, & 1 \le \ell = j \le N-1, \\[2mm] \dfrac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = 0, \\[2mm] -\dfrac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = N, \end{cases} \qquad s_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

При этом элементы ℓ-й строки матрицы D_N^1 являются коэффициентами разностной аппроксимации первой производной в ℓ-м узле коллокации на шаблоне $\{x_{2,k}\}$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1\, D_N^1$.

В терминах введенных аппроксимаций задача (6), (7) сводится к обобщенной задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра $\lambda = \mathrm{Re}/2$:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{kj} - \lambda F_{kj})\, r_j = 0,\; k = 0, 1, 2, \ldots, 5N+4. \qquad (10)$$

Вектор неизвестных $\boldsymbol{r}$ размером $5(N+1)$ в (10) состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\boldsymbol{r}(x_2)=(u_0,u_1,\ldots,u_N,v_0,v_1,\ldots,v_N,w_0,w_1,\ldots,w_N,\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_N,\theta_{\mathrm{v},0},\theta_{\mathrm{v},1},\ldots,\theta_{\mathrm{v},N}),$$

а матрицы G, F размером $5(N+1)\times5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G=A\otimes D_N^2+B\otimes D_N^1+C\otimes I_N,\ F=K\otimes I_N,$$

где знак $\otimes$ обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [11]; I_N – единичная матрица размером $(N+1)\times(N+1)$; A, B, C – матрицы размером 5×5:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\alpha_1+\dfrac{4}{3}&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&\dfrac{20\gamma_{\mathrm{vib}}}{33(1-\gamma_{\mathrm{vib}})}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&i\alpha\left(\alpha_1+\dfrac{1}{3}\right)&0&\dfrac{n}{2}&0\\i\alpha\left(\alpha_1+\dfrac{1}{3}\right)&0&i\delta\left(\alpha_1+\dfrac{1}{3}\right)&0&0\\0&i\delta\left(\alpha_1+\dfrac{1}{3}\right)&0&0&0\\-\dfrac{n}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-\left(\delta^2+\left(\alpha_1+\dfrac{4}{3}\right)\alpha^2\right)&0&-\alpha\delta\left(\alpha_1+\dfrac{1}{3}\right)&0&0\\0&-\left(\alpha^2+\delta^2\right)&0&\dfrac{i\alpha n}{2}&0\\-\alpha\delta\left(\alpha_1+\dfrac{1}{3}\right)&0&-\left(\alpha^2+\left(\alpha_1+\dfrac{4}{3}\right)\delta^2\right)&0&0\\0&-\dfrac{i\alpha\,n}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2\,\mathrm{Pr}&0&-\left(\alpha^2+\delta^2\right)&0\\0&0&0&0&\dfrac{20\gamma_{\mathrm{vib}}\left(\alpha^2+\delta^2\right)}{33(1-\gamma_{\mathrm{vib}})}\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&\dfrac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\mathrm{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\mathrm{vib}})\tau_{\mathrm{VT}}}&-\dfrac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\mathrm{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\mathrm{vib}})\tau_{\mathrm{VT}}}\\0&0&0&-\dfrac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\mathrm{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\mathrm{vib}})\tau_{\mathrm{VT}}}&\dfrac{\gamma_{\mathrm{vib}}\,\mathrm{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\mathrm{vib}})\tau_{\mathrm{VT}}}\end{pmatrix}.$$

Однородные граничные условия (7) для уравнения (10) учитываются неявно через оператор D_N^1 и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^k $(k=1,\,2)$ на окаймленные матрицы размером $(N-1)\times(N-1)$ [9, 10]. Последние получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^{\ell}=D_{N,j}^{\ell}=0,\ D_{i,0}^{\ell}=D_{i,N}^{\ell}=0,\ i=0,1,\ldots,N,\ j=0,1,\ldots,N,\ \ell=1,2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (10) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [12], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме.

В результате применения данной процедуры для фиксированных значений числа Маха M, объемной вязкости α_1, степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib}, времени колебательной релаксации τ_{VT} и каждой пары волновых чисел (α,δ) получался набор N+1 собственных значений, среди которых находилось минимальное по модулю число Рейнольдса $\mathrm{Re}(\alpha,\delta) = 2\,|\,\lambda_{\min}(\alpha,\delta)|$. Значение критического числа Рейнольдса Re_c для данных M, α_1, τ_{VT} и γ_{vib} принималось равным минимальному значению Re во всем диапазоне волновых чисел $\mathrm{Re}(\alpha,\delta)$: $\mathrm{Re_c} = \min\limits_{(\alpha,\delta)} \mathrm{Re}(\alpha,\delta)$. Затем вычислялись соответствующие Re_c собственные функции u, v, w, θ, θ_v.

Вычисления спектров собственных значений $\lambda(\alpha, \delta, \mathrm{M}, \alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{\text{vib}})$ выполнялись для случая, когда в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы, тогда n =1 [2, 3]. Все расчеты велись в диапазоне волновых чисел $\alpha = -5\div5$, $\delta = -5\div5$ при следующих значениях параметров: $\gamma_{\text{vib}} = 0{,}1\div0{,}4$; $\tau_{VT} = 1\div4$; $\alpha_1 = 0\div2$; $\mathrm{M} = 0{,}1\div1$; $\mathrm{Pr} = 3/4$; $\gamma = 7/5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\alpha = h_\delta = 0{,}1$. Число узлов коллокации в интервале $x_2 \in [-1, 1]$ принималось равным $N+1 = 50$. Для проверки точности расчетов проводилось варьирование числа узлов коллокации в диапазоне $N+1 = 32\div100$.

Результаты расчетов и их обсуждение

Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib}, времени колебательной релаксации τ_{VT}, объемной вязкости α_1 и числа Маха M минимальные по модулю собственные значения $\mathrm{Re}(\alpha,\delta) = 2\,|\,\lambda_{\min}(\alpha,\delta)|$ достигаются на оси $\alpha\neq0$ (при $\delta=0$) в плоскости волновых чисел (α, δ). Изолинии $\mathrm{Re}(\alpha,\delta)$ приведены на рис. 1.

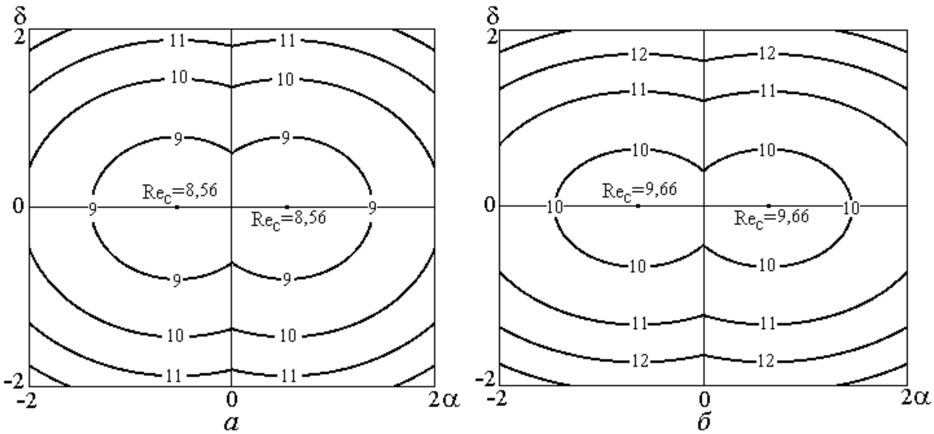

Рис. 1. Линии уровня поверхностей $\mathrm{Re}(\alpha,\delta)$ для M=0,5, α_1=0, τ_{VT}=1 ($а$ – γ_{vib}=0,2; $б$ – γ_{vib}=0,4)

Как и в случае умеренного возбуждения, рассмотренном в [13], наиболее «опасными» являются возмущения продольной моды. С учетом периодичности полученного решения по продольной координате x_1 эти возмущения представляют собой пары двумерных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях, с осями, перпендикулярными несущему потоку. Распределение завихренности в этих вихрях вычисляется по формуле

$$\omega(x_1, x_2) = -\left(\alpha v_i + \frac{d u_r}{dx_2}\right)\cos(\alpha x_1) - \left(\alpha v_r - \frac{d u_i}{dx_2}\right)\sin(\alpha x_1).$$

Здесь $u_r\,(x_2)$, $u_i(x_2)$, $v_r(x_2)$, $v_i(x_2)$ – вещественные и мнимые части собственных функций u, v. На рис. 2 представлены изолинии завихренностей $\omega(x_1, x_2)$, при различных критических числах Рейнольдса $\mathrm{Re_c}(\alpha, \mathrm{M}, \alpha_1, \tau_{\mathrm{VT}}, \gamma_{\mathrm{vib}})$ и значениях амплитуд возмущений скорости, составляющих 10 % значения модуля скорости несущего потока на непроницаемых границах.

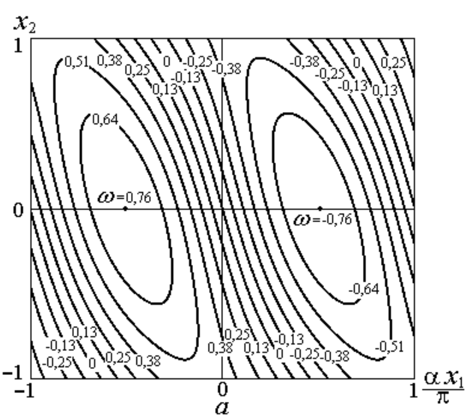

Рис. 2. Изолинии завихренности $\omega(x_1, x_2)$ для M=0,5, α_1=0, τ_{VT}=1 ($а$ – γ_{vib}=0,2, $\mathrm{Re_c}$=8,56; $б$ – γ_{vib}=0,4, $\mathrm{Re_c}$=9,66)

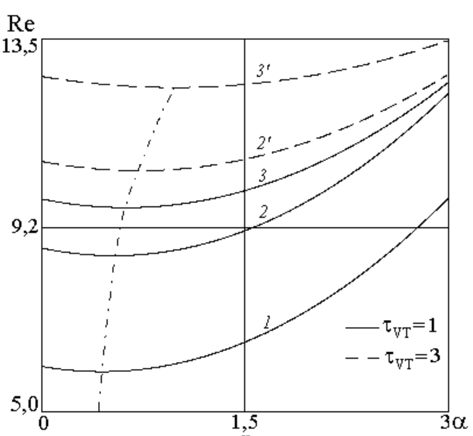

Рис. 3. Зависимости числа Рейнольдса Re(α) для продольных мод возмущений при M = 0,5 ($а$ – α_1=0; $б$ – α_1=2; 1, $1'$ – γ_{vib}=0,2; 2, $2'$ – γ_{vib}=0,3; 3, $3'$ – γ_{vib}=0,4; штрихпунктирная линия – зависимость критического числа Рейнольса $\mathrm{Re_c}$ от волнового числа α)

Зависимость числа Рейнольдса для продольных мод возмущений от волнового числа α представлена на рис. 3, где штрихпунктирные линии соединяют значения абсолютных минимумов на параметризованных по γ_{vib} и τ_{VT} кривых $Re(\alpha)$, что позволяет проследить эволюцию Re_c. На рис. 4 приведена зависимость Re_c от степени неравновесности γ_{vib}. На рис. 1, 3, 4 видно, что с увеличением значений параметров M, α_1, τ_{VT}, γ_{vib} критические числа Рейнольдса Re_c и соответствующие им значения волнового числа α возрастают. Таким образом, результаты расчетов показывают, что представленные выше асимптотические выражения (9) качественно описывают зависимость Re_c от параметров течения.

Критические значения числа Рейнольдса $Re_c(\alpha_1,\tau_{VT},\gamma_{vib},M)$ приведены в табл. 1, а соответствующие им значения волнового числа α в табл. 2. В рассмотренном диапазоне значений параметров задачи число Рейнольдса Re_c в пределе увеличивается примерно в два с половиной раза. При этом влияние каждого параметра на Re_c при фиксированных значениях остальных параметров существенно различается. Следует отметить, что наиболее значительное влияние на Re_c оказывает степень неравновесности колебательной моды γ_{vib}. Оценки, выполненные в [6], показывают, что возбуждение колебательной моды γ_{vib} в рассмотренном диапазоне достаточно легко достигается с помощью лазера. Поэтому лазерная накачка колебательных мод может стать эффективным способом управления течениями молекулярных газов.

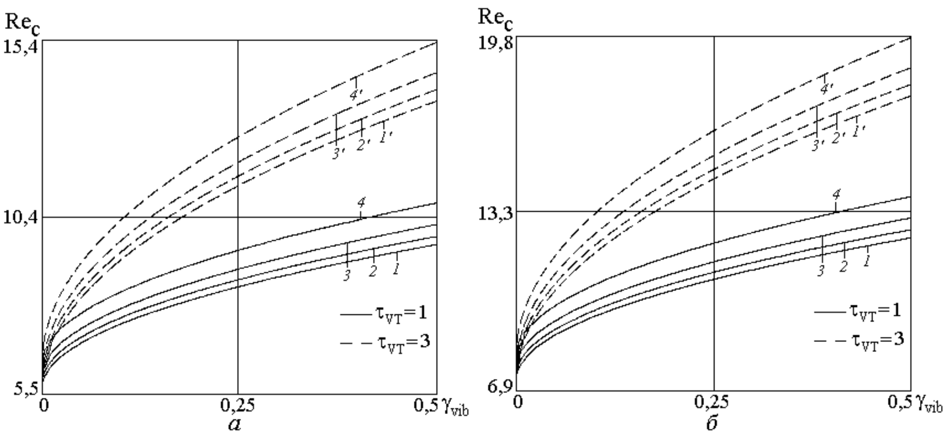

Рис. 4. Зависимости критических чисел Рейнольса Re_c от степени неравновесности колебательной моды γ_{vib} (*а* – α_1=0; *б* – α_1=2; *1*, *1′* – M=0,2; *2*, *2′* – M=0,4; *3*, *3′* – M=0,6; *4*, *4′* – M=0,8)

Таблица 1

Критические значения числа Рейнольдса Re_c(M, α_1, τ_{VT}, γ_{vib})

M	τ_{VT}=1			τ_{VT}=4		
	γ_{vib}=0,1	γ_{vib}=0,2	γ_{vib}=0,4	γ_{vib}=0,1	γ_{vib}=0,2	γ_{vib}=0,4
α_1=0						
0,2	Re_c=7,469	8,213	9,264	9,264	10,75	12,85
0,5	Re_c=7,785	8,560	9,656	9,656	11,21	13,40
0,8	Re_c=8,366	9,199	10,38	10,38	12,04	14,40
α_1=2						
0,2	Re_c=9,614	10,57	11,92	11,92	13,84	16,54
0,5	Re_c=10,02	11,02	12,43	12,43	14,42	17,24
0,8	Re_c=10,77	11,84	13,36	13,36	15,50	18,53

Таблица 2

Значения волновых чисел α, соответствующие критическим значениям числа Рейнольдса Re_c(M, α_1, τ_{VT}, γ_{vib})

M	τ_{VT}=1			τ_{VT}=4		
	γ_{vib}=0,1	γ_{vib}=0,2	γ_{vib}=0,4	γ_{vib}=0,1	γ_{vib}=0,2	γ_{vib}=0,4
α_1=0						
0,2	α=0,482	0,526	0,613	0,613	0,788	1,139
0,5	α=0,488	0,533	0,621	0,621	0,799	1,154
0,8	α=0,554	0,604	0,705	0,705	0,906	1,309
α_1=2						
0,2	α=1,111	1,211	1,413	1,413	1,817	2,625
0,5	α=1,125	1,228	1,432	1,432	1,842	2,660
0,8	α=1,277	1,393	1,625	1,625	2,089	3,017

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов И.В.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-неравновесного молекулярного газа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2. С. 99–112 .
2. *Чепмен С.*, *Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
3. *Жданов В. М.*, *Алиевский М.Е.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
4. *Нагнибеда Е. А.*, *Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербурского ун-та, 2003. 272 с.
5. *Гапонов С.А*, *Маслов А.А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. 145 с.
6. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В.*, *Ершова Е.Е.* Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 3. С. 15–23.
7. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В.* Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011. Т. 45. Вып. 4. С. 581–593.
8. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В.* Устойчивость течений колебательно возбужденных газов. Энергетический подход // Вестн. Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. МЖГ. 2011. № 4 (3). С. 735–737.
9. *Canuto C.*, *Hussaini M.Y.*, *Quarteroni A.*, *and Zang T.A.* Spectral methods in fluid dynamics: Springer series in Computational Physics. Berlin: Springer Verlag, 1988. 564 p.
10. *Trefethen L.N.* Spectral Methods in Matlab. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000. 160 p.
11. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.
12. *Moler C.B.*, *Stewart G.W.* An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, № 2. P. 241–256.
13. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 5. С. 59–67.

Статья поступила 25.09.2012 г.

Ershov I.V. STABILITY OF THE COUETTE FLOW OF A VIBRATIONALLY NONEQUILIBRIUM OF MOLECULAR GAS. ENERGY APPROACH. A variational problem of determining the critical Reynolds number of the laminar–turbulent transition is numerically solved in the context of the energy theory of hydrodynamic stability. Stability of various modes in the Couette flow of a vibrationally excited molecular gas is estimated by the method of collocations. The flow is described by a system of the equations of two-temperature aerodynamics. The transport coefficients depend on flow temperature. The calculations have shown that the critical Reynolds numbers depend on the Mach number, bulk viscosity, and vibrational relaxation time. In the realistic range of flow parameters for a diatomic gas, the minimum critical Reynolds numbers are reached on modes of streamwise disturbances and increase approximately by a factor of 2,5 as the flow parameters increase.

Keywords: energy theory, hydrodynamic stability, vibrational relaxation, equations of two-temperature aerodynamics, critical Reynolds number.

Ershov Igor Valer'evich (Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering)
E-mail: i_ershov@ngs.ru