УДК 519.2

**М.Ю. Приступа, В.И. Смагин**

# ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫХОДОМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЕ[1]

Рассматривается задача синтеза прогнозирующего управления, построенного на основе слежения за выходом системы для нестационарного линейного объекта с учетом ограничений на управление. Прогнозирование осуществляется на основе оценок состояний нестационарного объекта, построенных с использованием экстраполятора Калмана и оценок неизвестного входа.

**Ключевые слова:** *дискретные нестационарные системы, прогнозирующее управление, управление выходом.*

При синтезе управлений широко используется метод управления динамическими объектами с применением прогнозирующих моделей – Model Predictive Control (MPC) [1, 2]. Область применения метода MPC охватывает задачи управления производственными системами, управление запасами и финансовую математику [3–8].

В данной работе рассмотрено прогнозирующее управление нестационарным объектом, модель поведения которого описывается линейными разностными уравнениями. На объект наложены ограничения, которые представлены в виде неравенств. Синтез управления с прогнозирующей моделью осуществляется на основе управления выходом объекта. Целевая функция, представленная через выпуклую квадратичную функцию, предполагает отслеживание заданного сигнала и пересчитывается в каждый текущий момент времени. Настоящая статья является продолжением работ авторов [7–10].

## 1. Постановка задачи

Пусть модель нестационарного объекта, канала наблюдений и управляемого выхода описываются следующими соотношениями:

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t\,,\ x_{t|t=0} = x_0\,; \tag{1}$$

$$\psi_t = H_t x_t + v_t\,; \tag{2}$$

$$y_t = G_t x_t\,, \tag{3}$$

где $x_t \in R^n$ – состояние объекта, $u_t \in R^m$ – управляющее воздействие (известный вход), $\psi_t \in R^l$ – наблюдения, выход системы контроля, $y_t \in R^p$ – управляемый выход, $A_t$, $B_t$, $H_t$, $G_t$ – матрицы соответствующих размерностей. Уравнение (2) является моделью системы контроля за состоянием объекта.

Далее будем полагать, что случайные возмущения $w_t$ и шумы измерения $v_t$ подчиняются гауссовскому распределению с нулевым средним и с соответствую-

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012-2014 годы, задание 8.4055.2011.

щими ковариациями $W$, $V$, то есть

$$\mathrm{M}\{w_t\}=0\,,\ \mathrm{M}\{v_t\}=0\,,\ \mathrm{M}\{w_t w_k^{\mathrm{T}}\}=W_t\delta_{t,k}\,,\ \mathrm{M}\{v_t v_k^{\mathrm{T}}\}=V_t\delta_{t,k}\,,\ \mathrm{M}\{w_t v_k^{\mathrm{T}}\}=0\,. \quad (4)$$

В (1) вектор начальных условий $x_0$ является случайным, некоррелированным с величинами $w_t$ и $v_t$ и определяется следующими характеристиками:

$$\mathrm{M}\{x_0\}=\overline{x}_0\,,\ \mathrm{M}\{(x_0-\overline{x}_0)(x_0-\overline{x}_0)^{\mathrm{T}}\}=P_{x_0}\,. \quad (5)$$

Ограничения на управление представляются в виде следующих неравенств:

$$a_1(t)\le Su_t\le a_2(t)\,, \quad (6)$$

где $S$ – структурная матрица полного ранга, состоящая из нулей и единиц, определяющая компоненты вектора $u_t$, на которые накладываются ограничения; $a_1(t)$, $a_2(t)$ – заданные вектор-функции соответствующих размерностей.

Кроме того, предполагается, что пара матриц $A_t$, $B_t$ управляема, а пара матриц $A_t$, $H_t$ полностью наблюдаема.

Модель (1)–(3) реализует прогноз поведения объекта на некоторый период, который называется горизонтом прогнозирования и обозначается $N$, используя информацию об управлении $u_t$ и векторе наблюдений $\psi_t$ до текущего момента времени $t$.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям $\psi_t$ определить стратегию управления, при которой вектор выхода системы $y_t$ будет близок к заданному вектору $\overline{y}_t$ с учетом ограничений (6).

## 2. Прогнозирующая модель

Поскольку случайные возмущения $w_t$ и шумы измерения $v_t$ имеют гауссовское распределение, то можно выполнить оптимальное прогнозирование поведения объекта и вектора выхода, используя экстраполятор Калмана [11]:

$$\hat{x}_{t+1|t}=A_t\hat{x}_{t|t-1}+B_t u_t+K_t(\psi_t-H_t\hat{x}_{t|t-1})\,,\ \hat{x}_{0|-1}=\overline{x}_0\,; \quad (7)$$

$$\hat{y}_{t+1|t}=G_t\hat{x}_{t+1|t}\,; \quad (8)$$

$$K_t=A_tP_tH_t^{\mathrm{T}}(H_tP_tH_t^{\mathrm{T}}+V_t)^{-1}\,; \quad (9)$$

$$P_{t+1}=W_t+A_tP_tA_t^{\mathrm{T}}-A_tP_tH_t^{\mathrm{T}}(H_tP_tH_t^{\mathrm{T}}+V_t)^{-1}H_tP_tA_t^{\mathrm{T}}\,,\ P_0=P_{x_0}\,, \quad (10)$$

где $\hat{x}_{t+1|t}$ и $\hat{y}_{t+1|t}$ – оценки состояния и вектора выхода в момент времени $t+1$, уравнение для $P_t$ (10) известно как разностное уравнение Риккати с дискретным временем, $P_{x_0}$ – начальное значение дисперсионной матрицы.

Для реализации модели прогнозирующего управления необходимо иметь возможность вычислять оценки вектора состояния на моменты времени $t+1$, $t+2$, …, $t+N$, основываясь на информации, имеющейся в момент времени $t$. Из уравнений (7)–(10) можно получить $\hat{x}_{t+1|t}$, а также оптимальные оценки для моментов $t+2,\ldots, t+N$:

$$\hat{x}_{t+i+1|t}=A_{t+i}\,\hat{x}_{t+i|t}+B_{t+i}u_{t+i|t}\,,\ \hat{x}_{1|0}=\overline{x}_0\,,\ i=\overline{1,N-1}\,; \quad (11)$$

$$\hat{y}_{t+i|t}=G_{t+i}\,\hat{x}_{t+i|t}\,,\ i=\overline{1,N}\,. \quad (12)$$

Здесь обозначение $u_{t+i|t}$ используется для того, чтобы отличать действующее управление в момент $t+i$ $u_{t+i}$ от тех, которые используются с целью прогнозирования – $u_{t+i|t}$.

Управляющие воздействия, используемые с целью прогнозирования, ищутся на горизонте управления $M$, а прогнозирование состояния объекта проводится на большем промежутке $N$ ( $M \le N$ ). Для расчета $\hat{x}_{t+M+2|t}, \ldots, \hat{x}_{t+N|t}$ в (11) в качестве $u_{t+M+1|t}, \ldots, u_{t+N-1|t}$ используется $u_{t+M|t}$ и держится на достигнутом постоянном уровне.

Уравнение (11) может быть записано через начальное состояние $\hat{x}_{t+1|t}$ и будущие управляющие воздействия $u_{t+i|t}$ следующим образом:

$$\hat{x}_{t+2|t} = A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + B_{t+1}u_{t+1|t},$$

$$\hat{x}_{t+3|t} = A_{t+2}\hat{x}_{t+2|t} + B_{t+2}u_{t+2|t} = A_{t+2}(A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + B_{t+1}u_{t+1|t}) + B_{t+2}u_{t+2|t} =$$

$$= A_{t+2}A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + A_{t+2}B_{t+1}u_{t+1|t} + B_{t+2}u_{t+2|t},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\hat{x}_{t+i|t} = \left(\prod_{k=1}^{i-1} A_{t+i-k}\right)\hat{x}_{t+1|t} + \sum_{k=1}^{i-1}\left(\prod_{l=1}^{k-1} A_{t+i-l}\right)B_{t+i-k}u_{t+i-k|t}, \; i = \overline{2, N}. \qquad (13)$$

Аналогично может быть преобразовано уравнение (12):

$$\hat{y}_{t+1|t} = G_{t+1}\hat{x}_{t+1|t},$$

$$\hat{y}_{t+2|t} = G_{t+2}\hat{x}_{t+2|t} = G_{t+2}(A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + B_{t+1}u_{t+1|t}) = G_{t+2}A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + G_{t+2}B_{t+1}u_{t+1|t},$$

$$\hat{y}_{t+3|t} = G_{t+3}\hat{x}_{t+3|t} = G_{t+3}\left(A_{t+2}A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + A_{t+2}B_{t+1}u_{t+1|t} + B_{t+2}u_{t+2|t}\right) =$$

$$= G_{t+3}A_{t+2}A_{t+1}\hat{x}_{t+1|t} + G_{t+3}A_{t+2}B_{t+1}u_{t+1|t} + G_{t+3}B_{t+2}u_{t+2|t} =,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\hat{y}_{t+i|t} = G_{t+i}\left(\prod_{k=1}^{i-1} A_{t+i-k}\right)\hat{x}_{t+1|t} + \sum_{k=1}^{i-1} G_{t+i}\left(\prod_{l=1}^{k-1} A_{t+i-l}\right)B_{t+i-k}u_{t+i-k|t}, \; i = \overline{2, N}. \qquad (14)$$

Уравнения для прогнозируемых векторов состояния и выхода могут быть представлены в векторно-матричном виде. Для этого введем следующие обозначения:

$$\hat{X}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \; \hat{Y}_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \; U_t = \begin{bmatrix} u_{t+1|t} \\ \vdots \\ u_{t+M|t} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} E_n \\ A_{t+1} \\ A_{t+2}A_{t+1} \\ \vdots \\ \prod\limits_{k=1}^{N-1} A_{t+N-k} \end{bmatrix}, \; \Lambda_t = \begin{bmatrix} G_{t+1} \\ G_{t+2}A_{t+1} \\ G_{t+3}A_{t+2}A_{t+1} \\ \vdots \\ G_{t+N}\prod\limits_{k=1}^{N-1} A_{t+N-k} \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

В случае, когда горизонт управления не равен горизонту прогнозирования ($M < N$), матрицы $\mathrm{P}_t$ и $\Phi_t$ вводятся следующим образом:

$$\mathrm{P}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{t+2}B_{t+1} & B_{t+2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ \left(\prod_{k=1}^{M-1} A_{t+M-k+1}\right)B_{t+1} & \left(\prod_{k=1}^{M-2} A_{t+M-k+1}\right)B_{t+2} & \cdots & B_{t+M} \\ \left(\prod_{k=1}^{M} A_{t+M-k+2}\right)B_{t+1} & \left(\prod_{k=1}^{M-1} A_{t+M-k+1}\right)B_{t+2} & \cdots & A_{t+M+1}B_{t+M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\prod_{k=1}^{N-2} A_{t+N-k}\right)B_{t+1} & \left(\prod_{k=1}^{N-3} A_{t+N-k}\right)B_{t+2} & \cdots & \left(\sum_{p}^{N-M-1} \prod_{k=1}^{p} A_{t+N-k}\right)B_{t+M} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{t+2}B_{t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ G_{t+3}A_{t+2}B_{t+1} & G_{t+3}B_{t+2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ G_{t+M+1}\left(\prod_{k=1}^{M-1} A_{t+M-k}\right)B_{t+1} & G_{t+M+1}\left(\prod_{k=1}^{M-2} A_{t+M-k}\right)B_{t+2} & \cdots & G_{t+M+1}B_{t+M} \\ G_{t+M+2}\left(\prod_{k=1}^{M} A_{t+M-k}\right)B_{t+1} & G_{t+M+2}\left(\prod_{k=1}^{M-1} A_{t+M-k}\right)B_{t+2} & \cdots & G_{t+M+2}A_{t+M+1}B_{t+M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{t+N}\left(\prod_{k=1}^{N-2} A_{t+N-k}\right)B_{t+1} & G_{t+N}\left(\prod_{k=1}^{N-3} A_{t+N-k}\right)B_{t+2} & \cdots & G_{t+N}\left(\sum_{p=1}^{N-M-1} \prod_{k=1}^{p} A_{t+N-k}\right)B_{t+M} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

В случае равенства горизонта управления горизонту прогнозирования ($M = N$) в качестве $\mathrm{P}_t$ и $\Phi_t$ берутся матрицы следующего вида:

$$\mathrm{P}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{t+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{t+2}B_{t+1} & B_{t+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \left(\prod_{k=1}^{N-2} A_{t+N-k}\right)B_{t+1} & \left(\prod_{k=1}^{N-3} A_{t+N-k}\right)B_{t+2} & \cdots & B_{t+N-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{t+2}B_{t+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{t+3}A_{t+2}B_{t+1} & G_{t+3}B_{t+2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ G_{t+N}\left(\prod_{k=1}^{N-2} A_{t+N-k}\right)B_{t+1} & G_{t+N}\left(\prod_{k=1}^{N-3} A_{t+N-k}\right)B_{t+2} & \cdots & G_{t+N}B_{t+N-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Таким образом, прогнозирующая модель опишется следующей системой:

$$\hat{X}_t = \Psi_t \hat{x}_{t+1|t} + \mathrm{P}_t U_t \,; \tag{18}$$

$$\hat{Y}_t = \Lambda_t \hat{x}_{t+1|t} + \Phi_t U_t \,. \tag{19}$$

Ограничение (6) может быть также преобразовано в векторно-матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1(t+1) \\ \vdots \\ a_1(t+N) \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} Su_{t+1|t} \\ \vdots \\ Su_{t+M|t} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} a_2(t+1) \\ \vdots \\ a_2(t+N) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Введем обозначения:

$$\overline{a}_1(t) = \begin{bmatrix} a_1(t+1) \\ \vdots \\ a_1(t+N) \end{bmatrix}, \ \overline{a}_2(t) = \begin{bmatrix} a_2(t+1) \\ \vdots \\ a_2(t+N) \end{bmatrix}, \ \overline{S} = \mathrm{diag}(\underbrace{S,\ldots,S}_{M}).$$

Тогда ограничения (20) для прогнозирующей модели (18)–(19) запишется следующим образом:

$$\overline{a}_1(t) \le \overline{S}\, U_t \le \overline{a}_2(t)\,. \tag{21}$$

### 3. Синтез прогнозирующего управления

В качестве целевой функции выберем критерий следующего вида:

$$J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \left\| \hat{y}_{t+k|t} - \overline{y}_{t+k} \right\|_{C_t}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M} \left\| u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t} \right\|_{D_t}^2 , \tag{22}$$

где $\overline{y}_{t+k}$ – вектор значений отслеживаемого сигнала в момент времени $t+k$, $C_t$ и $D_t$ – симметричные положительно определенные матрицы.

Отметим, что критерий (22) является классическим в задачах синтеза прогнозирующего управления [1, 2]. Квадратичная форма

$$\left\| \hat{y}_t - \overline{y}_t \right\|_{C_t}^2 = (\hat{y}_t - \overline{y}_t)^{\mathrm{T}} C_t (\hat{y}_t - \overline{y}_t)$$

обеспечивает механизм, допускающий взвешивания выходов.

Аналогично расписывается квадратичная форма $\left\| u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t} \right\|_{D_t}^2$ :

$$\left\| u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t} \right\|_{D_t}^2 = (u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t})^{\mathrm{T}} D_t (u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t}) \,,$$

что предусматривает штрафы для управлений.

В случае, когда желаемая отслеживаемая траектория $\overline{y}_{t+k}$ не известна для $k \ge 0$, целесообразно считать $\overline{y}_{t+k} = \overline{y}_t$, то есть предполагать, что заданный уровень держится на протяжении всего времени управления постоянным.

Введем вектор $\overline{Y}_t$ :

$$\overline{Y}_t = \begin{bmatrix} \overline{y}_{t+1} \\ \vdots \\ \overline{y}_{t+N} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Тогда первое слагаемое в (22) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left\|\hat{y}_{t+k|t}-\bar{y}_{t+k}\right\|_{C_t}^2=\frac{1}{2}\left\|\hat{Y}_t-\bar{Y}_t\right\|_{\bar{C}_t}^2=$$

$$=\frac{1}{2}U_t^{\mathrm{T}}\Phi_t^{\mathrm{T}}\bar{C}_t\Phi_t U_t+U_t^{\mathrm{T}}\left[\Phi_t^{\mathrm{T}}\bar{C}_t\Lambda_t\hat{x}_{t+1|t}-\Phi_t^{\mathrm{T}}\bar{C}_t\bar{Y}_t\right]+\alpha_t^1. \qquad (24)$$

Здесь $\alpha_t^1$ – постоянная составляющая, которая не зависит от $U_t$ и $\hat{x}_{t+1|t}$, а $\bar{C}_t$ имеет вид

$$\bar{C}_t=\begin{bmatrix} C_t & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & C_t & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & C_t \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Вторая часть критерия (22) может быть преобразована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{M}\left\|u_{t+k|t}-u_{t+k-1|t}\right\|_{D_t}^2=$$

$$=\left\|u_{t+1|t}-u_{t|t}\right\|_{D_t}^2+\left\|u_{t+2|t}-u_{t+1|t}\right\|_{D_t}^2+\ldots+\left\|u_{t+M|t}-u_{t+M-1|t}\right\|_{D_t}^2=$$

$$=u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+1|t}-2u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_t+u_t^{\mathrm{T}}D_t u_t+$$

$$+u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+2|t}-u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+1|t}+u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+1|t}-u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+2|t}+$$

$$+u_{t+3|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+3|t}-u_{t+3|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+2|t}+u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+2|t}-u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+3|t}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+u_{t+M|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M|t}-u_{t+M|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M-1|t}+u_{t+M-1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M-1|t}-u_{t+M-1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M|t}.$$

Путем группировки слагаемых полученное выражение может быть записано в виде

$$\sum_{k=1}^{M}\left\|u_{t+k|t}-u_{t+k-1|t}\right\|_{D_t}^2=u_t^{\mathrm{T}}D_t u_t-2u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_t+$$

$$+2u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+1|t}-u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+2|t}-$$

$$-u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+1|t}+2u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+2|t}-u_{t+2|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+3|t}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-u_{t+M-1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M-2|t}+2u_{t+M-1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M-1|t}-u_{t+M-1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M|t}-$$

$$-u_{t+M-1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M|t}+2u_{t+M|t}^{\mathrm{T}}D_t u_{t+M|t}.$$

В векторно-матричном виде второе слагаемое квадратичной функции может быть записано так:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\left\|u_{t+k|t}-u_{t+k-1|t}\right\|_{D_t}^2=\frac{1}{2}U_t^{\mathrm{T}}\bar{D}_t U_t-u_{t+1|t}^{\mathrm{T}}D_t u_t+\alpha_t^2, \qquad (26)$$

где $\alpha_t^2$ – постоянная, не зависящая от $u_{t+k|t}$ $(k=\overline{1,M})$; $\bar{D}_t$ – блочная матрица вида

$$\bar{D}_t = \begin{bmatrix} 2D_t & -D_t & 0 & \vdots & 0 \\ -D_t & 2D_t & -D_t & \vdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & -D_t & 2D_t & -D_t \\ 0 & \cdots & 0 & -D_t & 2D_t \end{bmatrix}. \qquad (27)$$

Таким образом, с учетом сделанных преобразований целевая функция запишется следующим образом:

$$J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t) = \frac{1}{2} U_t^{\mathrm{T}} F_t U_t + U_t^{\mathrm{T}} f_t + \alpha_t, \qquad (28)$$

где $\alpha_t$ есть линейная комбинация $\alpha_t^1$ и $\alpha_t^2$,

$$F_t = \Phi_t^{\mathrm{T}} \bar{C}_t \Phi_t + \bar{D}_t, \; f_t = \Gamma_t \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \bar{Y}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_t u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; \Gamma_t = \begin{bmatrix} \Phi_t^{\mathrm{T}} \bar{C}_t \Lambda_t & -\Phi_t^{\mathrm{T}} \bar{C}_t \end{bmatrix}. \qquad (29)$$

Аналитическое решение данной задачи без учета ограничений можно получить из условия

$$\frac{\partial J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t)}{\partial U_t} = 0 \qquad (30)$$

с использованием формул векторно-матричного дифференцирования [12]

$$y^{\mathrm{T}} A y = \mathrm{tr} A y y^{\mathrm{T}}, \; \frac{d\mathrm{tr} AXB}{dX} = A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}}, \; \frac{d\mathrm{tr} AX^{\mathrm{T}} B}{dX} = BA. \qquad (31)$$

В результате получится:

$$\frac{\partial J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t)}{\partial U_t} = \frac{\partial}{\partial U_t}\left[\frac{1}{2} U_t^{\mathrm{T}} F_t U_t + U_t^{\mathrm{T}} f_t + c_t\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial(trF_t U_t U_t^{\mathrm{T}})}{\partial U_t} + \frac{\partial(U_t^{\mathrm{T}} f_t)}{\partial U_t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F_t^T U_t + F_t U_t\right] + f_t = 0. \qquad (32)$$

В силу симметричности матрицы $F_t$ уравнение (32) перепишется в виде

$$F_t U_t + f_t = 0.$$

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид

$$U_t^* = -F_t^{-1} f_t = -(\Phi_t^{\mathrm{T}} \bar{C}_t \Phi_t + \bar{D}_t)^{-1} (\Phi_t^{\mathrm{T}} \bar{C}_t \Lambda_t \hat{x}_{t+1|t} - \Phi_t^{\mathrm{T}} \bar{C}_t \bar{Y}_t) - \begin{pmatrix} D_t u_t \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (33)$$

следовательно, оптимальное прогнозирующее управление записывается в следующем виде:

$$u_{t+1|t}^* = (E_n \quad 0 \quad \cdots \quad 0) U_t^*. \qquad (34)$$

Учет ограничения (20) может быть выполнен численно, например, используя для оптимизации (28) процедуру quadprog системы Matlab.

## 4. Моделирование

В данном разделе приведен пример синтеза управления нестационарным объектом второго порядка с прогнозирующей моделью на основе слежения за выходом:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0,85+0,05\sin(0,8t) & 0 \\ 0,8 & 0,95 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix} u_t, \ x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad (35)$$

$$\psi_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + v_t; \qquad (36)$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t, \qquad (37)$$

где $x_t \in R^2$ – вектор состояния, $u_t \in R^1$ – управление, $\psi_t \in R^2$ – вектор наблюдений, $y_t \in R^1$ – вектор выхода, шумы измерения $v_t$ являются гауссовскими величинами с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$V = \begin{bmatrix} 0,0005 & 0 \\ 0 & 0,0005 \end{bmatrix}.$$

В данном примере ограничения на управление представлены следующими неравенствами:

$$-0,5 \le u_t \le 0,5. \qquad (38)$$

Моделирование проведено на временном промежутке в 100 единиц в предположении равенства горизонтов управления и прогнозирования ($M = N = 10$).

Цель моделирования – определить такую последовательность управления, при которой будет отслеживаться следующая траектория:

$$\bar{y}_{1,t} = \begin{cases} 0,3 & \text{при } t \ne \overline{31,70}; \\ -0,3 & \text{при } t = \overline{31,70} \end{cases} \qquad (39)$$

В качестве весовых коэффициентов выхода объекта и управления (в данном случае используются именно коэффициенты, а не матрицы, поскольку размерности векторов выхода $y_t$ и управления $u_t$ равны единице, то есть $\dim(y_t) = \dim(u_t) = 1$) использованы $C_t = D_t = 1$.

На рис. 1 представлена динамика поведения первой (отслеживаемой) компоненты вектора состояния.

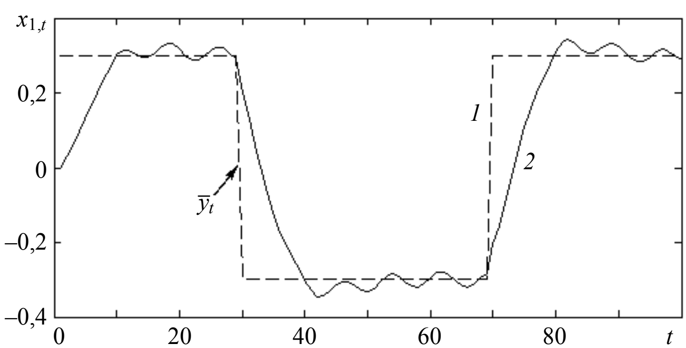


Рис. 1. Динамика первой компоненты состояния:
*1* – заданная траектория (желаемая), *2* – первая компонента состояния

На рис. 2 приведен график управляющих воздействий на объект.

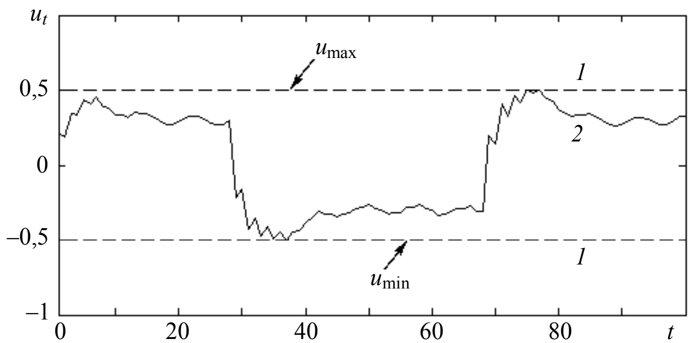


Рис. 2. Динамика управления объектом:
*1* – ограничения на управление, *2* – управление

Из рис. 1 видно, что желаемая траектория отслеживается, при этом ограничения на управление соблюдаются (рис. 2).

## Заключение

Разработаны алгоритмы синтеза прогнозирующего управления выходом дискретных нестационарных объектов со случайными возмущениями в условиях косвенных наблюдений за состоянием при ограничениях на управляющие воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Camacho E.F., Bordons C.* Model predictive control. London: Springer-Verlag, 2004. 405 p.
2. *Maciejowski J.M.* Predictive control with constraints. Prentice Hall, 2002. 331 p.
3. *Перепелкин Е.А.* Прогнозирующее управление экономической системой производства, хранения и поставок товара потребителям // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 1. С. 125–128
4. *Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71–85.
5. *Смагин В.И., Смагин С.В.* Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 244–246.
6. *Смагин В.И., Смагин С.В.* Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. № 3(4). 2008. С. 19–26.
7. *Киселева М.Ю., Смагин В.И.* Управление производством, хранением и поставками товаров на основе прогнозирующей модели выхода системы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2(7). С. 24–31.
8. *Приступа М.Ю., Смагин В.И.* Прогнозирующее управление дискретными системами с неизвестным входом и его применение к задаче управления экономическим объектом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 5–15.
9. *Киселева М.Ю., Смагин В.И.* Управление с прогнозирующей моделью с учетом запаздывания по управлению // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 5–12.

10. *Kiseleva M.Y., Smagin V.I.* Model predictive control of discrete systems with state and input delays // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 5–12.
11. *Kalman R.E., Busy R.* A new results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME J. Basic Engr. 1961. V. 83. P. 95–108.
12. *Амосов А.А., Колпаков В.В.* Скалярно-матричное дифференцирование и его применение к конструктивным задачам теории связи // Проблемы передачи информации. 1972. № 1. С. 3–15.

*Приступа Марина Юрьевна*
ООО «Битворкс» (г. Томск)
*Смагин Валерий Иванович*
Томский государственный университет
E-mail: kiselevamy@gmail.com; vsm@mail.tsu.ru
Поступила в редакцию 25 февраля 2013 г.

*Pristupa Marina Yu., Smagin Valery I.* (Bitworks software company, Tomsk State University).
**Model predictive control of the output time-varying discrete systems with constraints on the control.**

Keywords: discrete time-dependent systems, model predictive control, output control.

The problem of synthesis of predictive control, built on the basis of monitoring the output of the system for non-stationary linear object within the constraints on the control is considered. Forecasting is based on the calculation of time-dependent state estimates of the object using Kalman extrapolation and estimates of an unknown input.