УДК 519.872

Т.В. Любина, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ И АДАПТИВНОЙ RQ-СИСТЕМ С ВХОДЯЩИМ MMPP-ПОТОКОМ ЗАЯВОК[1]

Проводится исследование динамической и адаптивной RQ-систем с входящим MMPP-потоком заявок методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Показана эквивалентность представленных RQ-систем. Приводятся численные результаты проведенных исследований.

Ключевые слова: *RQ-система, пропускная способность, метод асимптотического анализа, коррелированный поток.*

Построению и исследованию RQ-систем (Retrial Queue) [1, 2] в настоящее время посвящается достаточно большое количество научных работ, например работы Г.И. Фалина [3], В.И. Клименок [4], А.Н. Дудина [5], А.А. Назарова [6, 7], поскольку считается важным оценить производительность и спроектировать телефонные сети, локальные вычислительные сети с протоколами случайного множественного доступа, широковещательные радиосети, мобильные сотовые радиосети. Наличие повторных попыток получить обслуживание является неотъемлемой чертой этих систем, игнорирование данного эффекта может привести к значительным погрешностям при принятии инженерных решений.

Методы теории массового обслуживания [8–10] являются наиболее результативными в исследовании RQ-систем. Наиболее эффективным является метод асимптотического анализа [11], которым воспользуемся при проведении исследования динамической и адаптивной RQ-систем с MMPP-потоком заявок.

1. Математическая модель динамической RQ-системы

В данной работе динамической RQ-системой с входящим MMPP-потоком заявок будем называть систему массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов (ИПВ) и входящим марковски-модулированным пуассоновским потоком (MMPP-потоком) заявок, управляемую динамическим протоколом доступа [12].

На вход RQ-системы поступает MMPP-поток заявок из внешнего источника, определяемый диагональной матрицей $\boldsymbol{\Lambda}$ условных интенсивностей λ_n и матрицей $\boldsymbol{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{\nu n}$ цепи Маркова $n(t)$, управляющей MMPP-потоком. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. По завершении обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания заявки поступает другая, то поступившая заявка переходит в ИПВ. Из ИПВ после случайной задержки заявка с динамической (зависи-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-90810-мол_рф_нр и в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012-2014 годы, задание 8.4055.2011.

щей от состояния ИПВ) интенсивностью γ / i вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата, i – число заявок в ИПВ. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, то возвращается в ИПВ.

Состояние системы в момент времени t определяется трехмерной цепью Маркова $\{k(t), n(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $n(t)$ – значения цепи Маркова, управляющей MMPP-потоком, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом: $k(t)=0$, если прибор свободен, и $k(t)=1$, если прибор занят.

Обозначим $P\{k(t)=k, n(t)=n, i(t)=i\} = P(k,n,i,t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, цепь Маркова в состоянии n и в ИПВ i заявок. Таким образом, распределение вероятностей $P(k,n,i,t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(k,n,i,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,n,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_n + \gamma) P(0,n,i,t) + \mu P(1,n,i,t) + \sum\limits_{\nu} P(0,\nu,i,t) q_{\nu n} \\ \dfrac{\partial P(1,n,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_n + \mu) P(1,i,t) + \gamma P(0,n,i+1,t) + \lambda_n P(0,n,i,t) + \\ +\lambda_n P(0,n,i-1,t) + \sum\limits_{\nu} P(1,\nu,i,t) q_{\nu n}. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы уравнений Колмогорова (1) достаточно полно определяет функционирование динамической RQ-системы с входящим MMPP-потоком заявок. Допредельное исследование проведем методом производящих функций.

2. Исследование динамической RQ-системы методом производящих функций

Будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, то есть $P(k,n,i,t) \equiv P(k,n,i)$. Запишем систему (1) для стационарного распределения в матричном виде. Обозначив вектор-строки

$$\boldsymbol{P}(k,i) = \{P(k,1,i), P(k,2,i), ..., P(k,N,i)\},$$

получим

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}(0,0)(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{P}(1,0)\mu = 0, \ i = 0, \\ \boldsymbol{P}(1,0)(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \mu \boldsymbol{I}) + \boldsymbol{P}(0,0)\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{P}(0,1)\gamma = 0, \ i = 0, \\ \boldsymbol{P}(0,i)(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \gamma \boldsymbol{I}) + \boldsymbol{P}(1,i)\mu = 0, \ i \geq 1, \\ \boldsymbol{P}(1,i)(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{\Lambda} - \mu \boldsymbol{I}) + \boldsymbol{P}(0,i)\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{P}(1,i-1)\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{P}(0,i+1)\gamma = 0, \ i \geq 1. \end{gathered} \quad (2)$$

Чтобы решить систему (2), определим векторные производящие функции

$$\boldsymbol{G}(k,x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(k,i), \ k = 0,1. \quad (3)$$

Из системы (2), с учетом равенства (3), получаем следующую систему для функций $\boldsymbol{G}(k,x)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}(0,x)(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{G}(1,x)\mu=-\gamma\boldsymbol{P}(0,0), \\ \boldsymbol{G}(0,x)(\boldsymbol{\Lambda}x+\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{G}(1,x)(\boldsymbol{Q}+(x-1)\boldsymbol{\Lambda}-\mu\boldsymbol{I})x=\gamma\boldsymbol{P}(0,0). \end{cases} \quad (4)$$

Из системы (4) получаем выражения для $\boldsymbol{G}(0,x)$ и $\boldsymbol{G}(1,x)$:

$$\boldsymbol{G}(0,x)=\boldsymbol{P}(0,0)\left\{\gamma\boldsymbol{I}+\frac{\gamma}{\mu}x\left(\boldsymbol{Q}+(x-1)\boldsymbol{\Lambda}-\mu\boldsymbol{I}\right)\right\}\left\{(1-x)\gamma\boldsymbol{I}+x\boldsymbol{Q}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})\left(\boldsymbol{Q}+(x-1)\boldsymbol{\Lambda}\right)x\right\}^{-1}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{G}(1,x)=-\frac{1}{\mu}\left[\gamma\boldsymbol{P}(0,0)+G(0,x)(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})\right].$$

Обозначим матрицы

$$\boldsymbol{A}(x)=\gamma\boldsymbol{I}+\frac{\gamma}{\mu}x\left(\boldsymbol{Q}+(x-1)\boldsymbol{\Lambda}-\mu\boldsymbol{I}\right),$$

$$\boldsymbol{B}(x)=(1-x)\gamma\boldsymbol{I}+x\boldsymbol{Q}-\frac{x}{\mu}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})(x-1)\left(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{\Lambda}\right),$$

тогда равенство (5) перепишется в следующем виде:

$$\boldsymbol{G}(0,x)=\boldsymbol{P}(0,0)\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}^{-1}(x).$$

Производящая функция $\boldsymbol{G}(0,x)$ определена для всех значений $x\in[0,1]$, но матрица $\boldsymbol{B}(x)$ вырождена при $x=x_\nu$, где x_ν – корни уравнения $|\boldsymbol{B}(x)|=0$, принадлежащие рассматриваемому интервалу $[0,1]$.

Обратную матрицу $\boldsymbol{B}^{-1}(x)$ запишем в виде $\boldsymbol{B}^{-1}(x)=\frac{1}{|\boldsymbol{B}(x)|}\boldsymbol{D}^T(x)$, где элементами $D(x)_{n_1n_2}$ матрицы $\boldsymbol{D}(x)$ являются алгебраические дополнения к элементам $B(x)_{n_1n_2}$ матрицы $\boldsymbol{B}(x)$.

Из равенства нулю определителя $|\boldsymbol{B}(x_\nu)|=0$ следует, что компоненты вектора $\boldsymbol{P}(0,0)$ удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{P}(0,0)\boldsymbol{A}(x_\nu)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(x_\nu)=0$.

Эта система определяет значения компонент вектора $\boldsymbol{P}(0,0)$ с точностью до мультипликативной постоянной, значение которой определяется условием нормировки. Таким образом, удалось найти выражения (5) для производящих функций $\boldsymbol{G}(k,x)$

3. Исследование динамической RQ-системы методом асимптотического анализа

Нахождение явного выражения (5) для производящей функции в математических моделях RQ-систем является исключительной ситуацией, поэтому требуется разработка других методов анализа таких моделей. Наиболее плодотворным в этом направлении является метод асимптотического анализа, изложение которого выполним для данной модели. Это позволит выявить эффективность разработанного метода путем сравнения асимптотических результатов с допредельными [13], а также позволит сравнить их с асимптотическими результатами, полученными для адаптивной RQ-системы.

Систему (4) модифицируем следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}(0,u)(\boldsymbol{Q}-\rho\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{H}(1,u)\mu=-\gamma\boldsymbol{P}(0,0), \\ \boldsymbol{H}(0,u)(\rho\boldsymbol{\Lambda}+e^{-ju}\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{H}(1,u)(\boldsymbol{Q}+(e^{ju}-1)\rho\boldsymbol{\Lambda}-\mu\boldsymbol{I})=e^{-ju}\gamma\boldsymbol{P}(0,0), \end{cases} \tag{6}$$

где ρ – параметр, который используется для получения предельного условия большой загрузки RQ-системы, а функция $\boldsymbol{H}(k,u)=\boldsymbol{G}(k,e^{ju})=\boldsymbol{G}(k,x)$.

Систему (6) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой загрузки $\rho\uparrow S_1$, где S_1 – пропускная способность динамической RQ-системы [14]. Обозначив $\varepsilon=S_1-\rho$, будем полагать также $\varepsilon\to 0$ и систему (6) будем решать при выполнении этого условия. В системе (6) выполним замены

$$\rho=S_1-\varepsilon,\ u=\varepsilon w,\ \boldsymbol{H}_k(u)=\boldsymbol{F}_k(w,\varepsilon),\ \boldsymbol{P}(0,0)=\varepsilon\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon)$$

и перепишем в виде

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_0(w,\varepsilon)(\boldsymbol{Q}-(S_1-\varepsilon)\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{F}_1(w,\varepsilon)\mu=-\gamma\varepsilon\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon), \\ \boldsymbol{F}_0(w,\varepsilon)\left((S_1-\varepsilon)\boldsymbol{\Lambda}+e^{-j\varepsilon w}\gamma\boldsymbol{I}\right)+\boldsymbol{F}_1(w,\varepsilon)\left(\boldsymbol{Q}+\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)(S_1-\varepsilon)\boldsymbol{\Lambda}-\mu\boldsymbol{I}\right)=e^{-j\varepsilon w}\gamma\varepsilon\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon). \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 1. *Значение S_1 пропускной способности динамической RQ-системы с входящим MMPP-потоком заявок равно значению корня уравнения*

$$\gamma\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{E}-S_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}=0, \tag{8}$$

где вектор-строка $\boldsymbol{R}_k$ – совместное распределение вероятностей состояний прибора и значений цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-потоком, которое определяется равенствами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_0(S_1)&=\mu\boldsymbol{R}\{(\mu+\gamma)\boldsymbol{I}+S_1\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{Q}\}^{-1}, \\ \boldsymbol{R}_1(S_1)&=\boldsymbol{R}\left\{\boldsymbol{I}-\mu[(\mu+\gamma)\boldsymbol{I}+S_1\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{Q}]^{-1}\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы выполним в два этапа.

Этап 1. Обозначим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_k(w,\varepsilon)=F_k(w)$, выполнив в (7) указанный предельный переход, получим систему

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_0(w)(\boldsymbol{Q}-S_1\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{F}_1(w)\mu=0, \\ \boldsymbol{F}_0(w)(S_1\boldsymbol{\Lambda}+\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{F}_1(w)(\boldsymbol{Q}-\mu\boldsymbol{I})=0. \end{cases} \tag{10}$$

Решение $\boldsymbol{F}_k(w)$ системы (10) будем искать в виде

$$\boldsymbol{F}_k(w)=\boldsymbol{R}_k\Phi(w), \tag{11}$$

где функция $\Phi(w)$ на бесконечности равна нулю, а $\boldsymbol{R}_k$ – распределение вероятностей состояний прибора, определяемое системой

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{Q}-S_1\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{R}_1\mu=0, \\ \boldsymbol{R}_0(S_1\boldsymbol{\Lambda}+\gamma\boldsymbol{I})+\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{Q}-\mu\boldsymbol{I})=0. \end{cases} \tag{12}$$

Нетрудно показать, что $(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1)\boldsymbol{Q}=0$, то есть $\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}=0$, где $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1$ и удовлетворяет условию нормировки $\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}=1$, тогда $\boldsymbol{R}_0$ и $\boldsymbol{R}_1$, зависящие от S_1, определяются равенствами

$$\boldsymbol{R}_0(S_1) = \mu \boldsymbol{R}\{(\mu+\gamma)\boldsymbol{I} + S_1\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{Q}\}^{-1},$$
$$\boldsymbol{R}_1(S_1) = \boldsymbol{R}\left\{\boldsymbol{I} - \mu[(\mu+\gamma)\boldsymbol{I} + S_1\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{Q}]^{-1}\right\},$$

совпадающими с (9).

Этап 2. Переписав (7) в виде

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_0(w,\varepsilon)(\boldsymbol{Q} - S_1\boldsymbol{\Lambda} - \gamma\boldsymbol{I} + \varepsilon\boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{F}_1(w,\varepsilon)\mu = -\gamma\varepsilon\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^2\right), \\ \boldsymbol{F}_0(w,\varepsilon)(S_1\boldsymbol{\Lambda} + \gamma\boldsymbol{I} - \varepsilon(\boldsymbol{\Lambda} + jw\gamma\boldsymbol{I})) + \boldsymbol{F}_1(w,\varepsilon)(\boldsymbol{Q} - \mu\boldsymbol{I} + j\varepsilon w S_1\boldsymbol{\Lambda}) = \gamma\varepsilon\boldsymbol{\Pi}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^2\right), \end{cases}$$

просуммируем по k и n все уравнения полученной системы и получим уравнение

$$\boldsymbol{F}_0(w,\varepsilon)\varepsilon jw\gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}_1(w,\varepsilon)j\varepsilon w S_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E} = 0,$$

из которого имеем

$$\boldsymbol{F}_0(w,\varepsilon)\gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}_1(w,\varepsilon)S_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E} = 0.$$

Используя (11), получим равенство

$$\boldsymbol{R}_0\Phi(w)\gamma\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R}_1\Phi(w)S_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E} = 0,$$

откуда получаем выражение

$$\gamma\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{E} - S_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E} = 0,$$

которое совпадает с (8) и определяет значение пропускной способности S-й динамической RQ-системы.

4. Математическая модель адаптивной RQ-системы

Рассмотрим однолинейную СМО с ИПВ и входящим MMPP-потоком, управляемую адаптивным протоколом доступа [15]. Такую систему будем называть адаптивной RQ-системой с входящим MMPP-потоком.

На вход системы поступает MMPP-поток заявок [7], определяемый диагональной матрицей $\rho\boldsymbol{\Lambda}$ условных интенсивностей $\rho\lambda_n$ и матрицей $\boldsymbol{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{\nu n}$ цепи Маркова $n(t)$, управляющей MMPP-потоком. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. По завершении успешного обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания заявки поступает другая, то поступившая заявка переходит в ИПВ. Из ИПВ после случайной задержки заявка, с интенсивностью $1/T$, где T – состояние адаптера в текущий момент времени, которое определим ниже, вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если занят – возвращается в ИПВ.

Состояние системы в момент времени t определяется четырехмерным процессом Маркова $\{k(t), n(t), i(t), T(t)\}$ [5, 6], где $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом: $k(t) = 0$, если прибор свободен, и $k(t) = 1$, если прибор занят; $n(t)$ – значения цепи Маркова, управляющей MMPP-потоком; $i(t)$ – число заявок в ИПВ; адаптер с течением времени t свои состояния $T(t)$ меняет следующим образом: $T(t+\Delta t) = T(t) - \alpha\Delta t$, если $k(t) = 0$, и $T(t+\Delta t) = T(t) + \beta\Delta t$, если

$k(t)=1$, где величины $\alpha>0$, $\beta>0$ – параметры адаптера, значения которых заданы [11].

Исследования данной адаптивной RQ-системы были выполнены методом асимптотического анализа в условии большой загрузки при определении величины S_2 пропускной способности адаптивной RQ-системы как точной верхней границы тех значений ρ, для которых существуют стационарные режимы функционирования рассматриваемой математической модели RQ-системы и при выполнении асимптотического условия $\rho\uparrow S_2$. Результаты данного исследования опубликованы авторами в работе [16]. В ходе этих исследований была сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Значение S_2 пропускной способности адаптивной RQ-системы с входящим MMPP-потоком заявок определяется системой уравнений*

$$\begin{cases}\gamma \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{E}-S_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}=0,\\ \alpha\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{E}-\beta\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{E}=0,\end{cases}\tag{13}$$

где α, β – параметры адаптера, значения которых заданы, γ – некоторая положительная постоянная, также определяемая этой системой, $\boldsymbol{R}_k$ – распределение вероятностей состояний прибора, которое определяется равенствами

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_0(S_2,\gamma)=\mu\boldsymbol{R}\{(\mu+\gamma)\boldsymbol{I}+S_2\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{Q}\}^{-1},\\ &\boldsymbol{R}_1(S_2,\gamma)=\boldsymbol{R}\left\{\boldsymbol{I}-\mu\left[(\mu+\gamma)\boldsymbol{I}+S_2\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{Q}\right]^{-1}\right\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Из вида первого уравнения системы (13) для нахождения пропускной способности адаптивной RQ-системы и уравнения (8) для нахождения пропускной способности динамической RQ-системы следует, что пропускная способность адаптивной RQ-системы S_2 равна пропускной способности динамической RQ-системы S_1, то есть $S_1=S_2$.

Вид равенств (14) для нахождения распределений вероятностей состояний прибора адаптивной RQ-системы также совпадает с равенствами (9) для нахождения распределений вероятностей состояний прибора динамической RQ-системы.

5. Численный анализ динамической RQ-системы

Векторную характеристическую функцию $\boldsymbol{H}(u)$ для распределения вероятностей $\boldsymbol{P}(i)=\boldsymbol{P}(0,i)+\boldsymbol{P}(1,i)$ числа заявок в ИПВ запишем в виде

$$\boldsymbol{H}(u)=\boldsymbol{H}(0,u)+\boldsymbol{H}(1,u)=\boldsymbol{H}(0,u)\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-\gamma\boldsymbol{I})\right)-\frac{\gamma}{\mu}\boldsymbol{P}(0,0).$$

Тогда распределение вероятностей $p(i)=\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{E}$ числа заявок в ИПВ определяется обратным преобразованием Фурье от скалярной характеристической функции $h(u)=Me^{jui(t)}=\sum_i e^{jui}p(i)=\boldsymbol{H}(u)\boldsymbol{E}$:

$$p(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jui}h(u)du\,.\tag{15}$$

Для заданных значений параметров $\mu = 1$, $\gamma = 3$ и матриц

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & -0.9 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

определяющих $h(u)$, численным интегрированием (15) получим распределение вероятностей числа заявок в ИПВ $p(i)$ (табл. 1).

Таблица 1

Распределение вероятностей $p(i)$ числа заявок в ИПВ, $i = 0, 1, 2,\ldots$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$p(i)$	0,220	0,094	0,082	0,072	0,063	0,056	0,049	0,043	…
δ_i	0,425	0,872	0,878	0,880	0,881	0,881	0,882	0,882	…

Особенность данного распределения заключается в том, что последовательность отношения $\delta_i = p(i+1)/p(i)$ достаточно быстро стабилизируются и при $i \geq 3$ принимает постоянное значение с точностью до двух знаков после запятой.

Аналогичные результаты имеют место и для других значений параметров μ, γ и матриц $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\boldsymbol{Q}$. При приведенных значениях параметров и матриц значение пропускной способности динамической RQ-системы равно $S_1 = 0,790$.

6. Численный анализ адаптивной RQ-системы

При заданных параметрах адаптивной RQ-системы определим значения пропускной способности S_2 и величины γ. Пусть значения параметров будут определены в виде $\mu = 1$, $\beta = 1$, а значения матриц в виде (16).

Решая относительно S_2 и γ систему (13) получим следующие численные результаты (табл. 2).

Таблица 2

Значения величин S_2 и γ при различных α

α	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	*3,768*	5	10	100
S_2	0,167	0,286	0,375	0,444	0,5	0,667	*0,790*	0,833	0,909	0,99
γ	0,036	0,121	0,236	0,369	0,516	1,355	*3*	4,187	9,105	99,01

По данным табл. 2 можно сделать вывод, что при увеличении α/β значение пропускной способности S_2 увеличивается, при этом значительно увеличивается и значение величины γ.

В табл. 3 при $\alpha = 3,768$ пропускная способность адаптивной RQ-системы $S_2 = 0.790$ и $\gamma = 3$, что соответствует пропускной способности динамической RQ-системы $S_1 = 0,790$ при $\gamma = 3$, что подтверждает асимптотическую эквивалентность адаптивной и динамической RQ-систем с входящим MMPP-потоком заявок.

Заключение

Вв данной статье проведены исследования динамической и адаптивной RQ-системы с входящим MMPP-потоком заявок методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. В результате исследования динамической RQ-системы получены распределение вероятностей числа заявок в ИПВ $p(i)$, уравнение (8) для нахождения пропускной способности S_1. При исследовании адаптивной RQ-системы получена система уравнений (13) для нахождения пропускной способности S_2 и значения величины γ. Было показано, что S_1 и S_2 совпадают.

Далее все полученные аналитические результаты были представлены численно. Также было показано равенство пропускных способностей S_1 и S_2 при заданных параметрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: a Computational Approach. Springer, 2008. 309 p.
2. *Назаров А.А., Судыко Е.А.* Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. 2010. № 1. С. 94–111.
3. *Falin G. I.* A Survey of retrial queues // Queuing Systems. 1990. V. 7. P. 127–167.
4. *Klimenok V.I.* Optimization of dynamic management of the operating mode of data systems with repeat calls // Automatic Control and Computer Sciences. 1993. V. 24. Issue 1. P. 23–28.
5. *Dudin A.N., Klimenok V.I., Kim C.S., Lee M.H.* The SM/PH/N queueing system with broadcasting service // Proc. 13th Int. Conf. on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications. Bonn, Germany, 2006. P. 8–13.
6. *Назаров А.А., Семенова И.А.* Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3 (12). С. 85–96.
7. *Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А.* Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
8. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: учебное пособие. 2-е изд., испр. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.
9. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.И.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
10. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971. 519 с.
11. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
12. *Любина Т.В., Назаров А.А.* Исследование немарковской модели компьютерной сети связи, управляемой динамическим протоколом доступа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 16–27.
13. *Любина Т.В., Назаров А.А.* Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3 (12). С. 73–84.
14. *Любина Т.В., Назаров А.А.* Исследование немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Вестник Кемеровского государственного университета. 2012. № 1 (49). С. 38–44.
15. *Назаров А.А., Кузнецов Д.Ю.* Адаптивные сети случайного доступа. Томск: ТПУ, 2002. 256 с.
16. *Любина Т.В., Назаров А.А.* Исследование адаптивной RQ-системы с входящим MMPP-потоком заявок методом асимптотического анализа // Информационные технологии и

математическое моделирование (ИТММ-2012): материалы XI Всерос. науч.-практич. конф. с междунар. участием (г. Анжеро-Судженск, 23–24 нояб. 2012 г.). Кемерово: Практика, 2013. Ч. 2. С. 94–99.

Любина Татьяна Викторовна
Филиала Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске
Назаров Анатолий Андреевич
Томский государственный университет
E-mail: lyubina_tv@mail.ru; anazarov@fpmk.tsu.ru Поступила в редакцию 29 ноября 2012 г.

Lyubina Tatiana V., Nazarov Anatoly A. (Anjero-Sudjensk branch of the Kemerovo State University, Tomsk State University). **Research of the dynamic and adaptive retrial queue systems with input MMPP-process requests.**

Keywords: retrial queue system, traffic capacity, method of asymptotical analysis, correlated flow.

Research of dynamic and adaptive retrial queue systems with input MMPP-process requests is carried out in this paper.

Using method of generating functions there is found the probability distribution of number of requests in the source of repeated calls of a dynamic RQ-system asthea the inverse Fourier transform. By method of asymptotic analysis under condition of high load there is obtained an equation for throughput and stationary probability distribution of status signals of the dynamic RQ-system.

Investigation of adaptive RQ-system is scheduled in the asymptotic heavy load conditions, as a result of which is determined the capacity and value of γ for the RQ-system. We show the asymptotic equivalence of presented RQ-systems. Numerical results of the research are given.