ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(24)

УДК 519.2/6

Г.Ш. Цициашвили

ЭРГОДИЧНОСТЬ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

В работе строятся модификации одноканальной системы массового обслуживания в случайной среде, для которых можно в явном виде получить критерии эргодичности. Эти модификации основаны на использовании жидкостной модели и модели одноканальной системы обслуживания с дискретным временем.

Ключевые слова: *одноканальная система обслуживания, критерий эргодичности, жидкостная модель обслуживания, дискретное время.*

Математическим моделям систем и сетей массового обслуживания в случайной среде уделяется большое внимание в теории массового обслуживания (см., например, [1, с. 76] и содержащиеся в статье ссылки) в связи с обилием разнообразных приложений к транспортным моделям [2, с. 430–432, 438], и системам с гистерезисной стратегией управления [3, с. 42–61; 4, с. 24, 25].

Однако вопросы эргодичности в моделях этого типа как правило получили решение в виде только достаточных, а не необходимых и достаточных условий [1, теорема 1, формула (2)]. Поэтому работа в данном направлении остается актуальной, несмотря на обилие результатов, в которых даются формулы и алгоритмы вычисления предельных распределений в данных системах. В настоящей работе вопросы получения критериев эргодичности решаются не усилением известных результатов по расчету предельных распределений для систем обслуживания в случайной среде, а построением достаточно общих стохастических моделей этих систем обслуживания, которые удобно сводить к известным теоремам эргодичности для одноканальных моделей обслуживания типа цепочки Линдли [5, с. 20–36].

В рамках этого подхода рассматриваются жидкостные модели обслуживания [6, с. 3–5], [7, с. 8–12], для которых определяется количество жидкости в системе в моменты изменения режима ее функционирования или строится модель обслуживания с дискретным временем, описываемая числом заявок в системе. При таком подходе вместо времени ожидания начала обслуживания в моменты прихода заявок удобным оказалось моделировать и анализировать на эргодичность динамику числа заявок, находящихся в системе. Данная модель может быть легко распространена на случай, когда случайная последовательность $t_1, t_2, \ldots$, характеризующая интервалы между приходом заявок в систему, является стационарной и известно математическое ожидание Mt_i.

1. Жидкостная одноканальная модель обслуживания в случайной среде

В этом разделе будет рассматриваться следующая жидкостная модель одноканальной системы массового обслуживания M|M|1. Разобьем неотрицательную полуось $t \ge 0$ на полуинтервалы $[T_0, T_1)$, $T_0 = 0$, $T_1 = T_0 + t_1$, $[T_1, T_2)$, $T_2 = T_1 + t_2, \ldots$.

Здесь независимые случайные величины t_1,t_2 ,…, имеют показательное распределение

$$P(t_n > t) = \exp(-\lambda t),\ t \ge 0,\ n > 0.$$

Предположим, что на полуинтервале $[T_{n-1},T_n)$, $n > 0$, в некий резервуар закачивается жидкость с интенсивностью $a_n > 0$ и выкачивается жидкость с интенсивностью $b_n > 0$, если объем жидкости больше нуля. Если объем жидкости равен нулю, то при $a_n < b_n$ интенсивность оттока жидкости становится равной интенсивности ее притока a_n, причем начальное количество жидкости в системе равно $w_0 \ge 0$. Далее полагаем, что характеристики случайной среды $\{(a_n,b_n),n > 0\}$ образуют последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Обозначим $w_n \ge 0$, $n > 0$, объем жидкости в момент T_n, тогда в силу сделанных предположений объем жидкости в резервуаре в момент T_{n+1} удовлетворяет равенству

$$w_{n+1} = (w_n + \xi_n)^+,\ d^+ = \max(0,d),\ -\infty < d < +\infty,\ \xi_n = (a_n - b_n)t_n,\ n \ge 0. \quad (1)$$

Далее полагаем, что независимые последовательности независимых случайных векторов $\{(a_n,b_n),n > 0\}$, $\{t_n,n > 0\}$ с неотрицательными компонентами удовлетворяют равенствам

$$P\left(a_n = \alpha_i,\ b_n = \beta_i\right) = p_i,\ \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ i = 1,...,I,\ n > 0,\ \sum_{i=1}^{I} p_i = 1.$$

По аналогии с [8, гл. II, §4,лемма 3] определим

$$a_n - b_n = \sum_{k=1}^{I} \chi(a_n = \alpha_i, b_n = \beta_i)(\alpha_i - \beta_i).$$

Здесь $\chi(C)$ – индикаторная функция случайного события C. В силу [5, § 3, теорема 7] необходимым и достаточным условием эргодичности случайной последовательности w_n, $n \ge 0$, является неравенство

$$M\xi_n = \sum_{i=1}^{I} \frac{p_i(\alpha_i - \beta_i)}{\lambda} < 0. \quad (2)$$

Замечание 1. В случае системы G1|M|1, если случайная последовательность $\{t_n,n \ge 1\}$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин и, следовательно, порождает рекуррентный входной поток, а случайные последовательности $\{t_n,n \ge 1\}$, $\{(a_n - b_n), n \ge 1\}$ независимы, то условие эргодичности (2) должно быть заменено на

$$M\xi_n = Mt_n \sum_{i=1}^{I} p_i(\alpha_i - \beta_i) < 0. \quad (3)$$

Причем, пользуясь формулами (1), удобно марковскую цепочку $w_n, n \ge 0$, промоделировать методом Монте-Карло и исследовать на устойчивость ее предельные и допредельные распределения при вариации закона распределения случайных величин $t_n, n \ge 1$.

2. Одноканальная модель обслуживания с дискретным временем в случайной среде

Перейдем теперь к одноканальной системе массового обслуживания с дискретным временем. Пусть в моменты времени $t = 0,1,\ldots$ в системе находится x_t заявок, $x_0 \geq 0$. Пусть в момент t система массового обслуживания функционирует в режиме γ_t, где $\gamma_t = i$ с вероятностью $\pi_i > 0$, $i = 1,\ldots,m$, $\sum_{i=1}^{m}\pi_i = 1$, а случайные величины γ_t, $t \geq 0$, независимы.

Замечание 2. События, связанные с пребыванием процесса γ_t в состоянии i, удовлетворяют равенствам $P(\gamma_t = i,...,\gamma_{t+k-1} = i) = \pi_i^k$, $k > 0$.

Если $\gamma_t = i$, то полагаем, что с вероятностью $p_{1,i}$ в момент времени $t+1$ в систему поступит одна новая заявка входного потока и с вероятностью $q_{1,i} = 1 - p_{1,i}$ никаких заявок не поступит. Наряду с этим в момент $t+1$ с вероятностью $p_{2,i}$ из системы уйдет одна (фиктивная, если в системе заявок нет) заявка, а с вероятностью $q_{2,i} = 1 - p_{2,i}$ этого не произойдет. Приход новой заявки входного потока и уход из нее заявки (быть может, фиктивной) предполагаются независимыми событиями.

Определим независимые случайные последовательности $\left\{\eta_{t,i}^{+}, t \geq 0\right\}$, $\left\{\eta_{t,i}^{-}, t \geq 0\right\}$, $i = 1,..,m$, состоящие из независимых случайных величин с распределениями:

$$\eta_{t,i}^{+} = \begin{cases} 1, \text{с вероятностью } p_{1,i}, \\ 0, \text{с вероятностью } q_{1,i}, \end{cases} \quad \eta_{t,i}^{-} = \begin{cases} -1, \text{с вероятностью } p_{2,i}, \\ 0, \text{с вероятностью } q_{2,i}, \end{cases}$$

тогда сумма независимых случайных величин $\eta_{t,i} = \eta_{t,i}^{+} + \eta_{t,i}^{-}$ имеет распределение

$$\eta_{t,i} = \begin{cases} +1, \text{ с вероятностью } p_{1,i}q_{2,i}, \\ -1, \text{ с вероятностью } p_{2,i}q_{1,i}, \\ \ \ 0, \text{ с вероятностью } p_{1,i}p_{2,i} + q_{1,i}q_{2,i}, \end{cases}$$

А случайная последовательность x_t, $t > 0$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_{t+1} = (x_t + \eta_t)^{+},\ t \geq 0,\ \eta_t = \sum_{i=1}^{m}\chi(\gamma_t = i)\,\eta_{t,i}\,. \tag{4}$$

Предположим, что случайные последовательности

$$\{\gamma_t, t \geq 0\},\ \left\{\left(\eta_{t,i}^{+}, \eta_{t,i}^{-}\right), t \geq 0\right\},\ i = 1,...,m,$$

независимы.

Тогда в силу [5, §3, теорема 7] необходимым и достаточным условием эргодичности случайной последовательности x_t, $t > 0$, является неравенство

$$M\eta_t = \sum_{i=1}^{m}\pi_i\left(p_{1,i}q_{2,i} - p_{2,i}q_{1,i}\right) < 0\,. \tag{5}$$

Замечание 3. Условие на случайную последовательность $\gamma_t, t \geq 0$, при котором справедлив критерий эргодичности (5), можно ослабить, полагая последовательность $\gamma_t, t \geq 0,$ стационарной в узком смысле. В частности, можно предположить, что $\gamma_t, t \geq 0,$ является эргодической обратимой [9, p. 6, Definition 1.4] цепью Маркова с предельным распределением π_i, $i = 1,...,m$, причем $P(\alpha_0 = i) = \pi_i$, $i = 1,...,m$.

Замечание 4. Еще одним обобщением данной модели является предположение, что определенные выше случайные вектора $\left(\eta^+_{t,i}, \eta^-_{t,i}\right)$, $s > 0$, $r > 0$, $t \geq 0$, $i = 1,...,m$, имеют распределения

$$P\left(\left(\eta^+_{t,i}, \eta^-_{t,i}\right) = (s,r)\right) = U_i(s,r),\ t \geq 0\ ,\ i = 1,...,m.$$

Замечание 5. Рассмотренная в настоящем параграфе модель массового обслуживания может быть также распространена на случай, когда вместо моментов времени $t = 0,1,\ldots$ берутся случайные моменты $0, T_1 = \tau_1, T_2 = T_1 + \tau_2, ...,$ где случайные величины τ_t, $t > 0,$ независимы, неотрицательны и одинаково распределены, а случайная последовательность x_t, $t > 0,$ определяется в не в моменты $t = 0,1,...,$ а в моменты $T_t, t > 0.$ Причем случайные последовательности $\{\eta_t, t \geq 0\}, \{T_t, t \geq 0\}$ независимы. В этом случае случайная последовательность $\{\eta_t, t \geq 0\}$ может рассматриваться как цепь Маркова, вложенная в случайные моменты времени $\{T_t, t \geq 0\}$.

Заключение

Предлагаемые в статье приемы получения критериев эргодичности для систем массового обслуживания в случайной среде можно распространить с одноканальной системы на другие системы. К ним можно, в частности, отнести многофазную систему массового обслуживания. Такие способы переопределения моделей обслуживания также позволяют существенно расширить ограничения на модель одноканальной системы в случайной среде. Более того, появляется возможность не только сконструировать критерии эргодичности, но и построить удобные алгоритмы расчета предельных распределений в этих моделях как аналитическими методами, так и методом Монте-Карло.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Расчет характеристик однолинейной системы обслуживания, функционирующей в синхронной случайной среде // Автоматика и телемеханика. 1997. № 1. С. 74–84.
2. *Афанасьева Л.Г., Руденко И.В.* Системы обслуживания GI|G|∞ и их приложения к анализу транспортных моделей // Теория вероятностей и ее применения. 2012. № 3. С. 427–452.
3. *Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е.* Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи: учебно-методическое пособие. М.: РУДН. 2008. 72 с.
4. *Самочернова Л.С., Петров Е.И.* Оптимизация системы массового обслуживания с гистерезисной стратегией управления однотипным резервным прибором // Известия Томского политехнического университета. 2011. Т. 319. № 5. С. 24–27.

5. *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1971. 368 с.
6. *Рыбко А.Н., Столяр А.Л.* Об эргодичности случайных процессов, описывающих функционирование открытых сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. Вып. 3. С. 3–26.
7. *Адаму А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К.* К анализу состояния буфера пользователя одноранговой сети с потоковым трафиком // T-comm – Телекоммуникации и транспорт. 2011. № 7. С. 8–12.
8. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
9. *Serfozo R.* Introduction to Stochastic Networks. NewYork: Springer-Verlag, 1999. 300 p.

Цициашвили Гурами Шалвович
ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)
E-mail:guram@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 22 мая 2013 г.

Tsitsiashvili Guram Sh. (IAM, FEB RAS, Vladivostok). **Ergodicity of one server queuing systems in random environment.**

Keywords: one server queuing system, ergodicity criterion, fluid queuing model, discrete time.

Mathematical models of queuing systems and networks in random environment are intensively investigated in queuing theory because of manifold applications in transport models and systems with hysteresis strategy of control.

But problems of an ergodicity in these models as a rule are solved by only sufficient, not necessary and sufficient conditions. So investigations in this direction are actual in spite of manifold results connected with formulas and algorithms for calculations of limit distributions in these systems. In this paper problems of an obtaining of ergodicity criteria are solved not by a gain of known results but by a construction of special stochastic models which may be reduced to one server queuing systems in a form of Lindely chain.

In a frame of such approach fluid queuing models are used. In these models waiting times are replaced by dynamics of numbers of customers in these systems.