ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 Управление, вычислительная техника и информатика № 3 (28)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 658.512

Ю.И. Параев

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВУХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ

Получено аналитическое решение динамической задачи оптимального управления двухсекторной экономикой на конечном интервале времени. Управление заключается в распределении произведённого продукта на накопление (инвестирование) и непроизводственное потребление. Задача состоит в выборе такого управления, при котором обеспечивается максимум суммарного потребления за планируемый конечный интервал времени. Решение получено с помощью принципа максимума Понтрягина. Найдена магистраль – участок сбалансированного равновесного состояния экономики. Решены задачи оптимального выхода на магистраль и оптимального схода с магистрали. Во всех случаях управления оказываются кусочно-постоянными.

Ключевые слова: двухсекторная экономика; оптимальное управление; магистраль; принцип максимума Понтрягина; производственная функция; непроизводственное потребление.

В модели двухсекторной экономики рассматриваются два сектора с различными технологиями производства продукции [1–4]. Обычно в одном из секторов производятся средства производства, а в другом – предметы потребления. Управление экономикой состоит в распределении произведенного продукта на инвестирование секторов экономики и на непроизводственное накопление. Задача заключается в выборе такого управления, при котором обеспечивается максимум непроизводственного накопления за планируемый конечный интервал времени. С помощью принципа максимума Понтрягина получено аналитическое решение задачи. Найдена магистраль – участок сбалансированного равновесного состояния экономики. Решены задачи оптимального выхода на магистраль и оптимального схода с магистрали. На всем интервале времени управления оказываются кусочно-постоянными.

1. Постановка задачи

Оба сектора экономики характеризуются следующими величинами: k_i – основной капитал, l_i – трудовые ресурсы и $Y_i(k_i,l_i)$ – производственные функции (i = 1,2). Значение $Y_i = Y_i(k_i,l_i)$ есть валовой продукт, произведенный i-м сектором в единицу времени, т.е. $Y_i\Delta t$ есть валовой продукт, произведенный за время Δt. В результате получаем систему уравнений, описывающую поведение двухсекторной экономики:

$$\begin{aligned}
&\dot{k}_1 = -\mu_1 k_1 + W_1,\ k_1(0) = k_{10} \ge 0,\\
&\dot{k}_2 = -\mu_2 k_2 + W_2,\ k_2(0) = k_{20} \ge 0,\\
&\dot{C} = \delta C + W_3,\ C(0) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $C(t)$ – непроизводственное потребление, μ_i (>0) – коэффициенты амортизации, δ (>0) – норма дисконтирования, W_1, W_2, W_3 – доли произведенного валового продукта, направленные на инвестирование секторов экономики и на увеличение непроизводственного потребления. Если считать, что все трудовые ресурсы постоянны и равны l_0, то $l_1 = \vartheta l_0$ и $l_2 = (1-\vartheta)l_0$, где ϑ – коэффициент перераспределения.

Управление двухсекторной экономикой заключается в выборе величин W_1, W_2, W_3 и ϑ.

Возможны два варианта распределения произведенного валового продукта:

1. W_1, W_2, W_3 – доли суммарного валового продукта, произведенного обоими секторами, т.е.

$$W_i = u_i Y \ (i = 1,2,3),$$

где

$$Y = Y_1+Y_2,\ u_1+u_2+u_3 = 1,\ 0 \le u_i \le 1,\ u_3 = 1-u_1-u_2. \tag{2}$$

2. Валовой продукт, произведенный каждым сектором, распределяется раздельно, т.е.

$$W_i = u_{i1} Y_1+u_{i2} Y_2 \ (i = 1,2,3),$$

где

$$u_{1k}+u_{2k}+u_{3k} = 1,\ 0 \le u_{ik} \le 1,\ u_{3k} = 1-u_{1k} -u_{2k},\ i = 1,2,3,\ k = 1,2.$$

Например, в модели, приписываемой К. Марксу, продукт, произведенный в 1-м секторе, идет на инвестирование 1-го и 2-го секторов. Продукт, произведенный во 2-м секторе, идет на инвестирование 2-го сектора и на увеличение непроизводственного потребления. В этом случае $u_{31} = u_{12} = 0$.

Далее будем рассматривать только 1-й вариант. При этом для простоты будем предполагать, что трудовые ресурсы постоянны и не перераспределяются между секторами.

В этом случае непроизводственное потребление на интервале времени $[0,T]$ равно

$$J = \int_0^T \mathrm{e}^{\delta(T-t)} W_3(t)dt = \int_0^T \mathrm{e}^{\delta(T-t)} (1-u_1-u_2)Y(t)dt. \tag{3}$$

Основная задача: в течение интервала времени $[0,T]$ найти такие управления u_i ($i = 1,2,3$) с учетом (1) и (2), при которых функционал (3) максимален.

Производственные функции выбираются в форме Кобба–Дугласа $Y_i(k_i, l_i) = A_i k_i^{\alpha_i} l_i^{\beta_i}$ ($i = 1,2$). Здесь A_i – масштаб темпа производства ($A_i > 0$), α_i – коэффициент эластичности по основным фондам, β_i – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам, причем $\alpha_i+\beta_i = 1$, α_i, $\beta_i > 0$, $\beta_i = 1-\alpha_i$. Поскольку трудовые ресурсы предполагаются постоянными, то $Y_i(k_i, l_i) = A_i k_i^{\alpha_i}$ на всем интервале времени.

2. Применение принципа максимума Понтрягина

При применении принципа максимума Понтрягина сначала на основании (1) и (3) составляется функция Гамильтона

$$\begin{gathered} H(k_1,k_2,p_1,p_2,u_1,u_2) = \\ = p_1(-\mu_1 k_1 + u_1 Y) + p_2(-\mu_2 k_2 + u_2 Y) - \mathrm{e}^{\delta(T-t)}(1-u_1-u_2)Y, \end{gathered} \tag{4}$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – вспомогательные переменные, которые удовлетворяют уравнениям

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial k_i} = \mu_i p_i - Y_i'[u_1 p_1 + u_2 p_2 - \mathrm{e}^{\delta(T-t)}(1-u_1-u_2)],\ \ p_i(T) = 0. \tag{5}$$

Здесь $Y_i' = \dfrac{\partial Y_i}{\partial k_i} = \alpha_i A_i k_i^{\alpha_i - 1}$, $i = 1,2$.

Удобно ввести новые вспомогательные переменные $q_i(t) = p_i(t)\mathrm{e}^{-\delta(T-t)}$, i=1,2. Тогда вместо (4) получаем

$$\begin{gathered} H(k_1,k_2,p_1,p_2,u_1,u_2) = \mathrm{e}^{-\delta(T-t)} H(k_1,k_2,q_1,q_2,u_1,u_2) = \\ = -q_1 \mu_1 k_1 - q_2 \mu_2 k_2 + Y[u_1 (q_1+1) + u_2 (q_2+1) - 1], \end{gathered} \tag{6}$$

где согласно (5) переменные $q_i(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{q}_i = \lambda_i q_i - Y_i^{'}[u_1 (q_1 + 1) + u_2 (q_2 + 1) - 1], \; q_i(T) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\lambda_i = \delta + \mu_i$, $i = 1,2$.

Функция Гамильтона (6) линейна относительно u_1 и u_2. Поэтому при $q_1(t)+1 \neq 0$ и $q_2(t)+1 \neq 0$ минимум этой функции достигается в угловых точках симплекса (2):

$$u_1(t) = u_2(t) = 0, \, u_3(t) = 1 \quad \text{при} \quad q_1(t) > -1 \text{ и } q_2(\mathrm{t}) > -1,$$
$$u_1(t) = 1, \, u_2(t) = u_3(t) = 0 \quad \text{при} \quad q_1(t) < -1 \text{ и } q_2(\mathrm{t}) > -1,$$
$$u_1(t) = 0, \, u_2(t) = 1, \, u_3(t) = 0 \quad \text{при} \quad q_1(t) > -1 \text{ и } q_2(\mathrm{t}) < -1.$$

3. Магистраль

Согласно общей теории в случае, когда функция Гамильтона линейна относительно управлений, возможно особое управление u_1 и u_2. Особое управление [5] существует на некотором интервале времени $[t_1, t_2]$, если на всем этом интервале коэффициент при этом управлении в H тождественно равен нулю.

Согласно (6) особые управления $u_{1\text{ос}}$ и $u_{2\text{ос}}$ существуют на некотором интервале времени $[t_1, t_2]$, если $q_1(t) = q_2(t) \equiv -1$, т.е. функция H не зависит от управлений. Для этого необходимо равенство нулю первой и второй производных функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Равенство нулю первых производных функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ при $q_1(t) = q_2(t) \equiv -1$ приводит к условиям

$$Y_i^{'} = \lambda_i \quad \text{или} \quad k_{i_{\text{ос}}}^{\beta_i} = \frac{\alpha_i A_i}{\lambda_i}, \, i = 1,2. \tag{8}$$

Равенство нулю вторых производных функций $q_1(t)$ и $q_2(t)$ при $q_1(t) = q_2(t) \equiv -1$ и $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ приводит к условиям $\dot{k}_1 = \dot{k}_2 = 0.$ Отсюда

$$u_{i_{\text{ос}}} = \frac{\mu_i k_{i_{\text{ос}}}}{Y}, i = 1,2.$$

С учетом (8) можно показать, что $u_{1\text{ос}}+u_{2\text{ос}} < 1$, т.е. особое управление всегда удовлетворяет условию (2). Интервал времени $[t_1, t_2]$, в течение которого имеет место особое управление, соответствует участку сбалансированного равновесного состояния экономики, который называется *магистралью.* На этом интервале переменные k_1 и k_2 и управления u_1 и u_2 постоянны.

Непроизводственное потребление на интервале времени $[t_1, t_2]$ равно

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{\delta(T-t)} (1 - u_{1\text{ос}} - u_{2\text{ос}}) Y(t) dt = (1 - u_{1\text{ос}} - u_{2\text{ос}}) Y \frac{\mathrm{e}^{\delta(T-t_1)} - \mathrm{e}^{\delta(T-t_2)}}{\delta},$$

где $Y = Y_1+Y_2$ и согласно (8)

$$Y_i = A_i \left(\frac{\alpha_i A_i}{\lambda_i} \right)^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}, \, i = 1,2.$$

Возможен еще вариант, когда на некотором интервале $[t', t'']$ одно управление особое (частная магистраль), а другое – неособое. Из (2) следует, что в этом случае неособое управление обязательно равно нулю. Если на интервале $[t', t'']$ управление u_1 особое, то $u_2 = 0$. При этом $q_1(t) \equiv -1$, $q_2(t) > -1$ и переменная k_2 убывает. Если на интервале $[t', t'']$ управление u_2 особое, то $u_1 = 0$. При этом $q_2(t) \equiv -1$, $q_1(t) > -1$ и переменная k_1 убывает.

Предположим, что на интервале $[t_1, t_2]$ существует магистраль, т.е. оба управления особые. Тогда остается выбрать управления на интервале $[0, t_1]$ – выход на магистраль, и на интервале $[t_2, T]$ – сход с магистрали.

4. Выход на магистраль

На интервале времени $[0, t_1]$ получается краевая задача для уравнений (1) с граничными условиями

$$k_1(0) = k_{10},\ k_2(0) = k_{20}, \tag{9}$$

$$k_1(t_1) = k_{1\text{ос}},\ k_2(t_1) = k_{2\text{ос}}. \tag{10}$$

При этом длина интервала $[0, t_1]$ неизвестна. Она зависит от условий (9), (10) и параметров задачи.

Напомним, что при $u_i = 1$ функция $k_i(t)$ растет, а при $u_i = 0$ убывает. Среди всех решений уравнений (1) можно выделить такие, которые заканчиваются в конечных точках (10). Более того, можно выделить решения, которые заканчиваются в (10) при управлениях $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ или $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ на всем интервале $[0, t_1]$. Эти решения можно получить в результате интегрирования уравнений (1) в обратном времени с граничными условиями (10). В результате получаются нижние и верхние траектории: $N_1(t)$ и $B_2(t)$ в случае, когда $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, и $N_2(t)$ и $B_1(t)$ в случае, когда $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. При этом все другие решения лежат между этими кривыми, т.е.

$$N_i(t) \le k_i(t) \le B_i(t) = k_{i\text{ос}} \mathrm{e}^{\mu_i (t_1 - t)},\ \ i = 1,2.$$

По аналогии с задачей оптимального быстродействия эти кривые назовем *линиями переключения*.

Очевидно, что в конце интервала $[0, t_1]$ система должна двигаться по этим линиям, чтобы попасть в точку (10). Поэтому получается следующее решение. Интервал $[0, t_1]$ разбивается на две части $[0, t']$ и $[t', t_1]$. Далее возможно два варианта.

А. Управления выбираются в виде

$$u_1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t < t', \\ 0 & \text{при} \quad t' < t < t_1 \end{cases} \ \text{и}\ u_2 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < t < t', \\ 1 & \text{при} \quad t' < t < t_1. \end{cases} \tag{11}$$

В результате получаем решение, представленное на рис. 1, *а*. При этом

$$k_1(t') = X_{11}(0,t';k_{10},k_{20}),\ k_2(t') = X_{20}(0,t';k_{20}) = k_{20}\mathrm{e}^{-\mu_2 t'},$$

$$k_1(t_1) = X_{10}(t',t_1;k_1(t')) = k_1(t')\mathrm{e}^{-\mu_1(t_1 - t')} = k_{1\text{ос}},$$

$$k_2(t_1) = X_{21}(t',t_1;k_1(t'),k_2(t')) = k_{2\text{ос}}.$$

Здесь $X_{i1}(s,t;\ k_1(s),\ k_2(s))$ – решение i-го уравнения (1) на интервале времени (s,t) при $u_i = 1$; $X_{i0}(s,t;$ $k_i(s)) = k_i(s)\mathrm{e}^{-\mu_i(t-s)}$ – решение i-го уравнения (1) на интервале времени (s,t) при $u_i = 0$.

Исключая из этих уравнений $k_1(t')$ и $k_2(t')$, получаем два уравнения для нахождения t' и t_1.

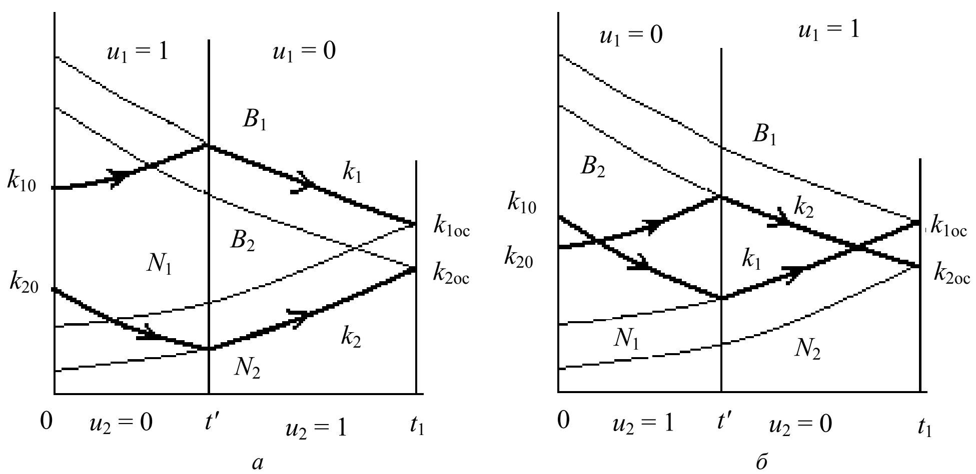

Рис. 1. Выход на магистраль

Б. Управления выбираются в виде

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < t < t', \\ 1 & \text{при} \quad t' < t < t_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad u_2 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t < t', \\ 0 & \text{при} \quad t' < t < t_1. \end{cases} \tag{12}$$

В результате получаем решение, представленное на рис. 1, *б*. При этом

$$k_1(t') = X_{11}(0,t';k_{10},k_{20}),\ k_2(t') = X_{20}(0,t';k_{20}) = k_{20}\mathrm{e}^{-\mu_2 t'},$$
$$k_1(t_1) = X_{10}(t',t_1;k_1(t')) = k_1(t')\mathrm{e}^{-\mu_1(t_1-t')} = k_{1\text{ос}},$$
$$k_2(t_1) = X_{21}(t',t_1;k_1(t'),k_2(t')) = k_{2\text{ос}}.$$

Исключая из этих уравнений $k_1(t')$ и $k_2(t')$, получаем два уравнения для нахождения t' и t_1.

Таким образом, выход на магистраль осуществляется за счет релейного управления с одним моментом переключения. При управлениях (11) или (12) $u_3 = 0$, т.е. накоплений нет и нет оптимизационной задачи. Поэтому переменные $q_1(t)$ и $q_2(t)$ нас не интересуют. Из решений А и Б следует выбрать то, при котором значение t_1 наименьшее. Это связано с тем, что на интервале $[0, t_1]$ нет накоплений и его следует взять максимально коротким.

5. Сход с общей магистрали

На интервале времени $[t_2, T]$ получается краевая задача для уравнений (1) и (7) с граничными условиями

$$q_1(t_2) = q_2(t_2) = -1,\ k_1(t_2) = k_{1\text{ос}},\ k_2(t_2) = k_{2\text{ос}}, \tag{13}$$
$$q_1(T) = q_2(T) = 0. \tag{14}$$

При этом длина интервала $[t_2, T]$ неизвестна.

Пусть $u_1 = u_2 = 0$. Тогда из (1) получаем, что на интервале $[t_2, T]$

$$k_i(t) = k_{i\text{ос}}\mathrm{e}^{-\mu_i(t-t_2)},\ i = 1,2,$$

и с учетом (8) $Y_i' = \alpha_i A_i k_i^{\alpha_i - 1} = \lambda_i \mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(t-t_2)}$. Подставляя последнее в (7), получаем

$$\dot{q}_i = \lambda_i q_i + \lambda_i \mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(t-t_2)} = \lambda_i(q_i + \mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(t-t_2)}),\ i = 1,2.$$

Поскольку на интервале $[t_2, T]$ $-1 \le q_i \le 0$, а $\mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(t-t_2)} > 1$, то $\dot{q}_i > 0$ и эти функции растут. Решение этих уравнений с учетом (13) следующее:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= -\mathrm{e}^{\lambda_i(t-t_2)} + \lambda_i \int_{t_2}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_i(t-\tau)}\mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(\tau-t_2)}d\tau = \\ &= -\mathrm{e}^{\lambda_i(t-t_2)} + \frac{\delta+\mu_i}{\delta+\alpha_i\mu_i}\left(\mathrm{e}^{\lambda_i(t-t_2)} - \mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(t-t_2)}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

$i = 1,2$. Поскольку параметры задачи разные, то функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ растут по разному и достигают значения 0 в разные моменты времени. Поэтому значения t_2 должны быть разными.

Подставляя (15) в (14), получаем

$$\mathrm{e}^{\lambda_i(T-t_{2i})} = \frac{\delta+\mu_i}{\delta+\alpha_i\mu_i}\left(\mathrm{e}^{\lambda_i(T-t_{2i})} - \mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(T-t_{2i})}\right),\ i = 1,2. \tag{16}$$

Решение этого уравнения проводится следующим образом. Из (16) следует

$$\mathrm{e}^{\beta_i\mu_i(T-t_{2i})} = \frac{\beta_i\mu_i}{\delta+\mu_i}\mathrm{e}^{\lambda_i(T-t_{2i})},\ i = 1,2.$$

Логарифмируя это выражение, получаем

$$\beta_i\mu_i(T-t_{2i})=\lambda_i(T-t_{2i})+\ln\left(\frac{\beta_i\mu_i}{\delta+\alpha_i\mu_i}\right)$$

и окончательно

$$T-t_{2i}=\frac{1}{\delta+\alpha_i\mu_i}\ln\left(\frac{\delta+\alpha_i\mu_i}{\beta_i\mu_i}\right),\ i=1{,}2.$$

Пусть функция $q_1(t)$ растет медленнее, чем $q_2(t)$, т.е. $T-t_{21}>T-t_{22}$. В этом случае должно быть следующее решение задачи. Полагаем $t_{21}=t_2$. На интервале $[t_2, T]$ управление $u_1=0$, а управление u_2 строится в виде

$$u_2=\begin{cases}u_{2\text{ос}} & \text{при}\quad t_2<t<t_{22},\\ 0 & \text{при}\quad t_{22}<t<T.\end{cases}$$

При таком управлении на интервале $[t_2, t_{22}]$ функция q_2 постоянна и равна -1. На интервале $[t_{22}, T]$ функция q_2 переходит из значения $q_2(t_{22})=-1$ в значения $q_2(T)=0$ (рис. 2).

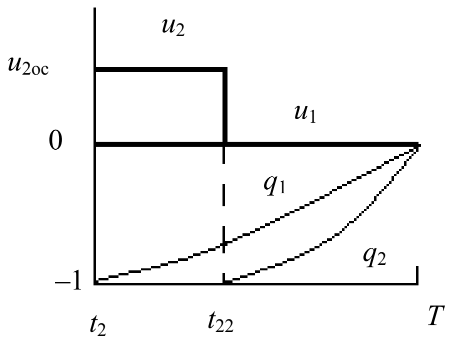

Рис. 2. Сход с магистрали

Таким образом, при сходе с магистрали одно управление равно нулю, а другое является релейным.

Непроизводственное потребление на интервале времени $[t_2, t_{22}]$ равно

$$J=\int_{t_2}^{t_{22}}\mathrm{e}^{\delta(T-t)}(1-u_{2\text{ос}})\left(A_1k_{1\text{ос}}^{\alpha_1}\mathrm{e}^{-\alpha_1\mu_1(t-t_2)}+A_2k_{2\text{ос}}^{\alpha_2}\right)dt,$$

а на интервале $[t_2, t_{22}]$ равно

$$J=\int_{t_{22}}^{T}\mathrm{e}^{\delta(T-t)}\left(A_1k_{1\text{ос}}^{\alpha_1}\mathrm{e}^{-\alpha_1\mu_1(t-t_2)}+A_2k_{2\text{ос}}^{\alpha_2}\mathrm{e}^{-\alpha_2\mu_2(t-t_{22})}\right)dt.$$

Эти интегралы легко вычисляются. Аналогичное решение получается, когда функция $q_1(t)$ растет быстрее, чем $q_2(t)$.

Заключение

Решена задача оптимального управления двухсекторной экономикой на конечном интервале времени. На всем интервале времени управления оказываются кусочно-постоянными. Выделяются три временных интервала: выход на магистраль, магистраль и сход с магистрали. Выход на магистраль осуществляется за счет релейного управления с одним моментом переключения. При этом на этом интервале непроизводственных накоплений нет. На магистрали капитал каждого сектора и управления постоянны. При сходе с магистрали произведенный продукт инвестируется только в один сектор экономики в зависимости от параметров задачи. На основании полученных результатов можно сформулировать необходимые условия существования оптимального управления в рассматриваемой задаче, т.е. ограничения на длину интервала [0, T], начальные условия и параметры модели. Эти условия связаны с необходимостью выполнения неравенств $0 \le t_1 \le t_2 < T$. В частности, требуется, чтобы интервал [0, T] был достаточно большим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984.
2. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М. : ЮНИТИ, 1998.
3. *Лобанов С.Г.* К теории оптимального экономического роста // Экономический журнал ВШЭ. 1999. № 1. С. 28–41.
4. *Минюк С.А., Ровба Е.А., Кузьмич К.К.* Математические методы и модели в экономике. Минск : Тетра-Системс, 2002.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973.

Параев Юрий Иванович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: paraev@mail.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 мая 2014 г.

Paraev Yury I. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Optimal control by the two-sector economy.

Keywords: two-sector economy; optimum control; highway; Pontryagin maximum principle; production function; non-productive consumption.

The analytical solution of a dynamic problem of optimum control by the two-sector economy on a finite interval of time is received. Control consists in distribution of the produced product into accumulation (investment) and non-productive consumption. The problem consists in selecting such a control, at which, for a planned finite interval of time, the maximum of non-productive consumption is provided.

Both sectors of economy are characterized by the values: k_i is the fixed capital, l_i is the labor resources, and Y_i are the Cobb-Douglas production functions (i = 1,2). The Y_i is the gross product produced by the i-th sector at a time, i.e. $Y_i\Delta t$ is gross product produced during Δt. As a result, we obtain a system of equations describing the behavior of the two-sector economy

$$\dot{k}_1 = -\mu_1 k_1 + W_1,\ k_1(0) = k_{10} \ge 0,$$
$$\dot{k}_2 = -\mu_2 k_2 + W_2,\ k_2(0) = k_{20} \ge 0,$$
$$\dot{C} = \delta C + W_3,\ C(0) = 0.$$

Here, $C(t)$ is non-productive consumption, μ_i (>0) is damping coefficients, δ (>0) is discount rate, W_1, W_2, W_3 are shares of gross product, aimed at investing sectors of the economy and an increase in non-productive consumption. Control by the two-sector economy consists in choosing values W_1, W_2, W_3. In this paper, we consider such distributions of gross product when W_1, W_2, W_3 are shares of the total gross domestic product produced by both sectors, i.e.

$$W_i = u_i(Y_1+Y_2)\ (i=1,2,3),$$

where

$$u_1+u_2+u_3=1,\ 0\le u_i\le 1,\ u_3=1-u_1-u_2.$$

In this case, the non-productive consumption in the interval [0, T] is equal to

$$J = \int_0^T e^{\delta(T-t)} W_3(t)dt = \int_0^T e^{\delta(T-t)} (1-u_1-u_2)Y(t)dt.$$

In the interval [0, T], the main problem is to find such controls u_1 and u_2, subjected to the restrictions, under which this functional is maximized.

The problem solution is carried out by using the Pontryagin maximum principle. Since the Hamiltonian is linear with respect to the controls u_1 и u_2, then, as shown, there are the special controls u_{1oc} and u_{2oc} when the capital of both sectors remains constant. The interval [t_1, t_2], in which the special control takes place, corresponds to a site of the balanced equilibrium state of the economy, which is called as the highway.

As a result, in all cases the optimal control is piecewise and constant. The interval [0, T] is broken into three parts: [0, t_1] is an exit to the highway, [t_1, t_2] is the highway, [t_2, T] is a descent from the highway. The problems of the optimal exit to the highway and optimal descent from the highway are solved. The exit to the highway is carried out by the relay control with one switching point. At a descent from the highway, the produced product is invested only in one sector of economy depending on task parameters.

Also, obtained results allow to formulate necessary conditions of optimum control existence for our problem, i.e. restrictions on the length of a interval [0, T], the entry conditions, and the model parameters. These conditions are connected with need of fulfillment of the inequalities $0 \le t_1 \le t_2 < T$.

REFERENCES

1. Ashmanov S. A. *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction in mathematical economy]. Moscow: Nauka Publ., 1984. 293 p.
2. Kolemayev V.A. *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical economy]. Moscow: YuNITI Publ., 1998. 399 p.
3. Lobanov S.G. K teorii optimal'nogo ekonomicheskogo rosta [To the theory of optimum economic growth]. *Ekonomicheskiy zhurnal VShE – HSE Economic Journal*, 1999, no. 1. pp. 28-41.
4. Minyuk S.A., Rovba E.A., Kuzmich K.K. *Matematicheskie metody i modeli v ekonomike* [Mathematical methods and models in economy]. Minsk: Tetra-Sistems Publ., 2002. 429 p.
5. Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimum managements]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 256 p.