ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 Управление, вычислительная техника и информатика № 3 (28)

УДК 519.872

О.М. Китурко, М.А. Маталыцкий

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДОХОДОВ В ЗАМКНУТОЙ НМ-СЕТИ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИОРИТЕТНЫХ И БЕСПРИОРИТЕТНЫХ ЗАЯВОК

Проведено исследование замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания с доходами, переменным числом приоритетных и бесприоритетных заявок и зависимыми от времени параметрами. Целью работы является нахождение среднего дохода каждой системы сети. Проведен асимптотический анализ в случае большого числа заявок в сети. Выведены дифференциальные уравнения для ожидаемых доходов каждой системы.

Ключевые слова: НМ-сеть; ожидаемый доход; метод диффузионной аппроксимации; приоритетные заявки.

Рассмотрим замкнутую сеть, в которой циркулирует определенное число заявок первого и второго типов, причем заявки не могут менять свой тип. Однотипные заявки, стоящие в очереди некоторой системы массового обслуживания (СМО), выбираются на обслуживание в произвольном порядке, например FIFO. Заявки первого типа имеют абсолютный приоритет по отношению к заявкам второго типа. В данном случае это будет означать выполнение двух условий: а) если в момент освобождения линии некоторой СМО после обслуживания заявки в ее очереди имеются приоритетные заявки, то любая из них занимает освободившуюся линию; б) если в систему обслуживания, все линии которой заняты обслуживанием, но не только приоритетных заявок, поступает приоритетная заявка, то она вытесняет неприоритетную заявку с одной из линий и начинает обслуживаться этой линией; вытесненная заявка становится в очередь рассматриваемой СМО. Когда вытесненная заявка поступает на обслуживание повторно, она дообслуживается в течение оставшегося времени обслуживания. Поскольку время обслуживания имеет показательное распределение, то можно считать, что вытесненная заявка будет обслуживаться заново, т.е. имеем так называемое неидентичное обслуживание.

Рассмотрим замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания (МО) с приоритетными заявками, состоящую из $n+1$ систем МО (СМО) S_0, S_1, …, S_n, где S_0 – внешняя среда, под состоянием которой будем понимать вектор $k(t)=(k,t)=(k_{11}(t),k_{12}(t);k_{21}(t),k_{22}(t);...;k_{n1}(t),k_{n2}(t))$. Пусть $K_1(t)$ и $K_2(t)$ – общее число соответственно приоритетных и бесприоритетных заявок, обслуживаемых в сети; $K_1(t)+K_2(t)=K(t)$ – общее число обслуживаемых заявок в момент времени t. При этом $K_s(t)$ является кусочно-постоянными функциями времени с q интервалами постоянства:

$$K_s(t)=\begin{cases} K_{s1},\ t\in[T_0,T_1), \\ K_{s2},\ t\in[T_1,T_2), \\ ... \\ K_{sq},\ t\in[T_{q-1},T], \end{cases}$$

где K_{sl} – число заявок типа s в сети на l-м интервале времени $[T_{l-1},T_l)$, $l=\overline{1,q}$, $K_l=K_{1l}+K_{2l}$. Например, в логистических транспортных системах (ЛТС) в связи с достаточно высокой стоимостью транспортных средств и относительно долгим периодом их эксплуатации число таких средств меняется через значительные промежутки времени, т.е. интервалы постоянства достаточно велики (на практике обычно 1–2 года). Число линий обслуживания в СМО $m_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $m_0(t)=K_1(t)+K_2(t)$, вероятности переходов заявок между ними $p_{ij}(t)$, i, $j=\overline{0,n}$, зависят от времени. Дисциплины обслуживания заявок обоих типов в каждой СМО – FIFO. Обозначим через $\mu_{js}(t)$ интенсивности обслуживания заявок типа s в j-й СМО в момент времени t, $j=\overline{0,n}$, $s=1,2$. Введем также следующие обозначения:

$$\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t),m_j(t))=\min\{k_{j1}(t),m_j(t)\},\ j=\overline{0,n},$$

$$\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t),k_{j2}(t),m_j(t))=\begin{cases}k_{j2}(t),\ k_{j1}(t)+k_{j2}(t)<m_j(t),\\ m_j(t)-k_{j1}(t),\ k_{j1}(t)<m_j(t),\ k_{j1}(t)+k_{j2}(t)\ge m_j(t),\quad j=\overline{0,n},\\ 0,\ k_{j1}(t)\ge m_j(t).\end{cases} \tag{1}$$

1. Вывод уравнения для плотности распределения ожидаемого дохода отдельной системы

Обозначим через $v^*_{cl}(k,t)$ полный ожидаемый доход, который получит на l-м интервале времени СМО S_c замкнутой сети с приоритетными заявками за время t, если в начальный момент интервала она находится в состоянии k. В течение малого промежутка времени Δt сеть может остаться в состоянии (k,t) либо совершить переход в состояние $(k+I_{i1}-I_{j1},t+\Delta t)$, $(k+I_{i2}-I_{j2},t+\Delta t)$, при этом для простоты будем считать, что $p_{ii}(t)=0$, $i=\overline{0,n}$. Здесь I_{os} – $2n$-вектор, состоящий из нулей; I_{is} – $2n$-вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером $2(i-1)+s$, которая равна 1, $i=\overline{1,n}$, $s=1,2$ [1].

Теорема. Плотность распределения дохода на l-м интервале времени $p^*_{vcl}(x_l,t)$ системы S_c сети удовлетворяет с точностью до членов порядка малости $\varepsilon_l^2=K_l^{-2}$ дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial p^*_{vcl}(x_l,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}A_{isl}(x_l,t)\frac{\partial p^*_{vcl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}}+\frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}B_{ijsl}(x_l,t)\frac{\partial^2 p^*_{vcl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}\partial x_{jsl}}+r^*_{cl}(x_l,t) \tag{2}$$

в точках существования производных, где

$$A_{i1l}(x_l,t)=\sum_{j=1}^{n}\mu_{j1}(t)p^*_{ji}(t)\varepsilon_{j1}(x_{j1l},l_{jl}(t))+\mu_{01}(t)p_{0i}(t)\left(\frac{K_{1l}}{K_l}-\sum_{j=1}^{n}x_{j1l}\right),$$

$$A_{i2l}(x_l,t)=\sum_{j=1}^{n}\mu_{j2}(t)p^*_{ji}(t)\varepsilon_{j2}(x_{j1l},x_{j2l},l_{jl}(t))+\mu_{02}(t)p_{0i}(t)\left(\frac{K_{2l}}{K_l}-\sum_{j=1}^{n}x_{j2l}\right), \tag{3}$$

$$B_{ij1l}(x_l,t)=-\mu_{j1}(t)p_{ji}\varepsilon_{j1}(x_{j1l},l_{jl}(t)),\ B_{ii1l}(x_l,t)=\sum_{j=0}^{n}\mu_{j1}(t)q^*_{ji}(t)\varepsilon_{j1}(x_{j1l},l_{jl}(t)), \tag{4}$$

$$B_{ij2l}(x_l,t)=-\mu_{j2}(t)p_{ji}\varepsilon_{j2}(x_{j1l},x_{j2l},l_{jl}(t)),\ B_{ii2l}(x_l,t)=\sum_{j=0}^{n}\mu_{j12}(t)q^*_{ji}(t)\varepsilon_{j2}(x_{j1l},x_{j2l},l_{jl}(t)), \tag{5}$$

$$p^*_{ji}(t)=\begin{cases}p_{ji}(t)-1,\ j=i,\\ p_{ji}(t),\ j\ne i,\end{cases}\quad q^*_{ji}(t)=\begin{cases}1+p_{ji}(t),\ j=i,\\ p_{ji}(t),\ j\ne i,\end{cases}\quad l_{jl}(t)=\frac{m_j(t)}{K_l},\ \ j=\overline{1,n},$$

$$r^*_{cl}(x,t)=K_l\sum_{i,j=0}^{n}[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(x_{j1l},l_{jl}(t))r^{(1)}_{jicl}(t)+\mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(x_{j1l},x_{j2l},l_{jl}(t))r^{(2)}_{jicl}(t)]p_{ji}(t)+r_{cl}(t),$$

$$r^{(s)}_{jicl}(t)=K_l^nR^{(s)}_{jic}(t),\ r_{cl}(t)=K_l^nR_c(t),\ i,j,c=\overline{1,n},\ s=1,2,\ l=\overline{1,q}.$$

Доходы от переходов между состояниями сети $R^{(s)}_{jic}(t)$, $R_c(t)$ определены внутри доказательства.

Доказательство. Положим, что если на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_{i1}-I_{j1}, t+\Delta t)$ (это может произойти с вероятностью $\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t), m_j(t))\ u(k_{j1}(t))u(K_1(t)-k_{i1}(t))p_{ji}(t)\Delta t + o(\Delta t)$), то доход системы S_c составит $R_{ji1}^{(1)}(t)$, поэтому доход данной СМО в момент времени $t+\Delta t$ будет равен этой величине плюс ожидаемый доход $v_{cl}^*(k+I_{i1}-I_{j1}, t)$, который она получает за оставшееся время t, если бы начальным было состояние $(k+I_{i1}-I_{j1}, t)$. Аналогично, если на интервале $[t, t+\Delta t]$ сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_{i2}-I_{j2}, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t), k_{j2}(t), m_j(t))\times$ $\times u(k_{j2}(t))u(K_2(t)-k_{i2}(t))p_{ji}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, то доход системы S_c составит $R_{ji1}^{(2)}(t)$ плюс ожидаемый доход $v_{cl}^*(k+I_{i2}-I_{j2}, t)$, который она получает за оставшееся время t, если бы начальным было состояние $(k+I_{i2}-I_{j2}, t)$. Кроме того, будем считать, что система S_c получает доход $R_c(t)$ за единицу времени в течение пребывания сети в состоянии (k,t). Сеть остаётся в состоянии (k,t) в течение времени Δt с вероятностью $1-\sum_{j=0}^{n}[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t), m_j(t)) + \mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t), k_{j2}(t), m_j(t))]\times$ $\times \Delta t + o(\Delta t)$, при этом доход системы S_c составит $R_c(t)\Delta t + v_{cl}^*(k,t)$.

Из вышесказанного следует, что полный ожидаемый доход $v_{cl}^*(k, t+\Delta t)$ системы S_c в момент времени $t+\Delta t$ удовлетворяет системе разностных уравнений

$$v_{cl}^*(k, t+\Delta t) = \left\{1-\sum_{j=0}^{n}[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t), m_j(t)) + \mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t), k_{j2}(t), m_j(t))]\Delta t\right\}\times$$

$$\times\left(R_c(t)\Delta t + v_{cl}^*(k,t)\right) + \sum_{i,j=0}^{n}\Big[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t), m_j(t))u(k_{j1}(t))u(K_{1l}-k_{i1}(t))p_{ji}(t)\Delta t\times$$

$$\times\left(R_{jic}^{(1)}(t) + v_{cl}^*(k+I_{i1}-I_{j1}, t)\right) + \mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t), k_{j2}(t), m_j(t))u(k_{j2}(t))\times$$

$$\times(K_{2l}-k_{i2}(t))p_{ji}(t)\Delta t\left(R_{jic}^{(2)}(t) + v_{cl}^*(k+I_{i2}-I_{j2}, t)\right)\Big] + o(\Delta t). \qquad (6)$$

В силу определения выражения ε_{j1}, ε_{j2}, согласно (1) и определению функции Хевисайда в соотношении (6) можно опустить функции $u(k_{j2}(t))$. Кроме того, в дальнейшем мы будем проводить асимптотический анализ при $K_s \le N \to \infty$, $s = 1, 2$, поэтому можно считать, что $u(K_{1l}-k_{i1}(t)) = u(K_{2l}-k_{i2}(t)) = 1$. Учитывая это, при $\Delta t \to 0$ из (6) получаем систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) для ожидаемых доходов системы S_c

$$\frac{dv_{cl}^*(k,t)}{dt} = \sum_{i,j=0}^{n}\Big\{\Big[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t), m_j(t))\left(v_{cl}^*(k+I_{i1}-I_{j1}, t) - v_{cl}^*(k,t)\right) +$$

$$+\mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t), k_{j2}(t), m_j(t))\left(v_{cl}^*(k+I_{i2}-I_{j2}, t) - v_{cl}^*(k,t)\right)\Big]p_{ji}(t)\Big\} +$$

$$+\sum_{i,j=0}^{n}\Big[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(k_{j1}(t), m_j(t))R_{jic}^{(1)}(t) + \mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(k_{j1}(t), k_{j2}(t), m_j(t))R_{jic}^{(2)}(t)\Big]p_{ji}(t) + R_c(t). \qquad (7)$$

Перейдем к плотности распределения дохода СМО S_c $p_{vcl}^*(x_l, t)$. Рассматривая случай большого числа заявок $1 << K_l < N$ и переходя к вектору относительных переменных $\xi_l^*(t) = \left(\frac{k_{11}(t)}{K_l}, \frac{k_{12}(t)}{K_l}; \frac{k_{21}(t)}{K_l}, \frac{k_{22}(t)}{K_l}; ...; \frac{k_{n1}(t)}{K_l}, \frac{k_{n2}(t)}{K_l}\right)$ [2, 3], возможные значения которого принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$G_l^* = \left\{ x_l = (x_{11l}, x_{12l}; x_{21l}, x_{22l}; ...; x_{n1l}, x_{n2l}):\ x_{isl} \geq 0,\ s = 1,2;\ \sum_{i=1}^{n}(x_{i1l} + x_{i2l}) \leq 1 \right\},$$

в котором они располагаются в узлах $2n$-мерной решетки на расстоянии ε_l друг от друга, можем воспользоваться аппроксимацией функции $v_{cl}^*(k,t)$: $K_l^{2n} v_{cl}^*(k,t) = K_l^{2n} v_{cl}^*(x_l K_l, t) = p_{vcl}^*(x_l, t)$, где $p_{vcl}^*(x_l, t)$ – плотность распределения дохода вектора $\xi_l^*(t)$. В качестве начального условия для уравнения (2) можно взять $p_{vcl}^*(x_l, t_0) = p_{vc0l}^*(x_l)$, где $p_{vc0l}^*(x_l)$ – некоторая известная плотность распределения.

Пусть $e_{i1l} = \varepsilon_l I_{i1}$, $e_{i2l} = \varepsilon_l I_{i2}$, $i = \overline{1,n}$, и при $K_l \to \infty$

$$K_l^{2n} R_{jic}^{(1)}(t) = r_{jicl}^{(1)}(t),\ K_l^{2n} R_{jic}^{(2)}(t) = r_{jicl}^{(2)}(t),\ K_l^{2n} R_c(t) = r_{cl}(t). \tag{8}$$

Умножив обе части (7) на K_l^{2n}, получаем

$$\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial t} = K_l \sum_{i,j=0}^{n} \Big\{ \Big[\mu_{j1}(t)\varepsilon_{j1}(x_{j1l}(t), l_{jl}(t)) \Big(p_{vcl}^*(x_l + e_{i1l} - e_{j1l}, t) - p_{vcl}^*(x_l, t) \Big) +$$

$$+ \mu_{j2}(t)\varepsilon_{j2}(x_{j1l}(t), x_{j2l}(t), l_{jl}(t)) \Big(p_{vcl}^*(x_l + e_{i2l} - e_{j2l}, t) - p_{vcl}^*(x_l, t) \Big) \Big] p_{ji}(t) \Big\} + r_{cl}^*(x_l, t). \tag{9}$$

Разложим функции $p_{vcl}^*(x_l + e_{isl} - e_{jsl}, t)$, $p_{vcl}^*(x_l + e_{0sl} - e_{jsl}, t) = p_{vcl}^*(x_l - e_{jsl}, t)$, $p_{vcl}^*(x_l + e_{isl} - e_{0sl}, t) = p_{vcl}^*(x_l + e_{isl}, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_l, t):

$$p_{vcl}^*(x_l + e_{isl} - e_{jsl}, t) = p_{vcl}^*(x_l, t) + \varepsilon_l \left(\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}} - \frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{jsl}} \right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon_l^2}{2} \left(\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}^2} - 2\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}\partial x_{jsl}} + \frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{jsl}^2} \right) + o(\varepsilon_l^2),$$

$$p_{vcl}^*(x_l - e_{jsl}, t) = p_{vcl}^*(x_l, t) - \varepsilon_l \frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{jsl}} + \frac{\varepsilon_l^2}{2} \frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{jsl}^2} + o(\varepsilon_l^2),$$

$$p_{vcl}^*(x_l + e_{isl}, t) = p_{vcl}^*(x_l, t) + \varepsilon_l \frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}} + \frac{\varepsilon_l^2}{2} \frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}^2} + o(\varepsilon_l^2),\ i, j, c = \overline{0,n}.$$

Подставим это разложение в уравнение (9):

$$\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left\{ \mu_{j1}(t) p_{ji}(t) \varepsilon_{j1}(x_{j1l}(t), l_{jl}(t)) \left[\left(\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i1l}} - \frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j1l}} \right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\varepsilon_l}{2} \left(\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i1l}^2} - 2\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i1l}\partial x_{j1l}} + \frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j1l}^2} \right) \right] \right\} + \right.$$

$$+ \mu_{01}(t) p_{0i}(t) \left(\frac{K_{1l}}{K_l} - \sum_{j=1}^{n} x_{j1l} \right) \left(\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i1l}} + \frac{\varepsilon_l}{2} \frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i1l}^2} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left\{ \mu_{j2}(t) p_{ji}(t) \varepsilon_{j2}(x_{j1l}(t), x_{j2l}(t), l_{jl}(t)) \left[\left(\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i2l}} - \frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j2l}} \right) + \right.\right.$$

$$+\frac{\varepsilon_l}{2}\left(\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i2l}^2}-2\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i2l}\partial x_{j2l}}+\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j2l}^2}\right)\Bigg]\Bigg]\Bigg\}+$$

$$+\mu_{02}(t)p_{02}(t)\left(\frac{K_{2l}}{K_l}-\sum_{j=1}^{n}x_{j2l}\right)\left(\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{i2l}}+\frac{\varepsilon_l}{2}\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j2l}^2}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{\mu_{j1}(t)p_{j0}(t)\varepsilon_{j1}(x_{j1l}(t),l_{jl}(t))\left[-\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j1l}}+\frac{\varepsilon_l}{2}\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j1l}^2}\right]\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{\mu_{j2}(t)p_{j0}(t)\varepsilon_{j2}(x_{j1l}(t),x_{j2l}(t),l_{jl}(t))\left[-\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j2l}}+\frac{\varepsilon_l}{2}\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{j2l}^2}\right]\right\}+r_{cl}^*(x_l,t)\,.$$

Используя (3)–(5), последнее уравнение с точностью до членов порядка ε_l^2 можно записать в виде (2). Терема доказана.

2. Нахождение ожидаемых доходов отдельных систем

Заметим, как следует из (4), (5), что $\frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B_{ijsl}(x_l,t)\frac{\partial^2 p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}\partial x_{jsl}}=O(\varepsilon_l^2)$, поэтому из (2) следует, что с точностью до ε_l^2

$$\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}A_{isl}(x_l,t)\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}}+r_{cl}^*(x_l,t)\,. \tag{10}$$

Проинтегрируем обе части уравнения (10) по x_l в области G_l^* и разделим обе части на объем области G_l^*, равной $m\left(G_l^*\right)$:

$$\frac{1}{m(G_l^*)}\iint\limits_{G_l^*}\ldots\int\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial t}dx_l=-\frac{1}{m(G_l^*)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}\iint\limits_{G_l^*}\ldots\int A_{isl}(x_l,t)\frac{\partial p_{vcl}^*(x_l,t)}{\partial x_{isl}}dx_l+$$

$$+\frac{1}{m(G_l^*)}\iint\limits_{G_l^*}\ldots\int r_{cl}^*(x_l,t)dx\,. \tag{11}$$

Рассмотрим интегралы в правой части (11). Используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются граничные условия

$$A_{isl}(x_l,t)p_{vcl}^*(x_l,t)\Big|_{x\in\Gamma(G_l^*)}=0,\ i=\overline{1,n}\,,$$

где $\Gamma(G_l^*)$ – граница области G_l^*, т.е. $A_{nsl}(x_l,t)p_{vcl}^*(x_l,t)\Big|_{x_{nsl}=0}^{x_{nsl}=1-x_{1sl}-x_{2sl}-\ldots-x_{n-1,sl}}=0$, $A_{n-1,sl}(x_l,t)p_{vcl}^*(x_l,t)\Big|_{x_{n-1,sl}=0}^{x_{n-1,sl}=1-x_{1sl}-x_{2sl}-\ldots-x_{n-2,sl}-x_{nsl}}=0$, …, $A_{1sl}(x_l,t)p_{vcl}^*(x_l,t)\Big|_{x_{1sl}=0}^{x_{1sl}=1-x_{2sl}-x_{3sl}-\ldots-x_{nsl}}=0$, которые означают, что не допускается поток дохода через границу области G_l^* или что в граничных точках области G_l^* поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial A_{isl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}}$ не зависят от x_{jsl}, $j=\overline{1,n}$, получаем

$$\frac{1}{m(G_l^*)}\iint\limits_{G_l^*}\ldots\int A_{isl}(x_l,t)\frac{\partial p_{vcl}(x,t)}{\partial x_{isl}}dx=-\frac{\partial A_{isl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}}\bar{v}^{pr}_{G_l^*cl}(t)\,,\ i=\overline{1,n}\,,$$

где $\bar{v}^{pr}_{G_l^*cl}(t)$ – среднее по x_l значение дохода системы S_c сети с приоритетными заявками при условии изменения начального состояния x_l в области G_l^*. Применив для обеих частей (11) рассуждения, как в [4], получим следующее уравнение для среднего дохода системы S_c:

$$\frac{d}{dt}\bar{v}^{pr}_{G_l^*cl}(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial A_{isl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}}\bar{v}^{pr}_{G_l^*cl}(t)+\frac{1}{m(G_l^*)}\iint\limits_{G_l^*}\ldots\int r^*_{cl}(x_l,t)dx_l\,. \tag{12}$$

Из (3) следует, что коэффициент $A_{i1l}(x_l,t)$ является кусочно-линейной по x_{j1l}, $j=\overline{1,n}$, функцией, а коэффициент $A_{i2l}(x_l,t)$ – кусочно-линейной по x_{j1l}, x_{j2l}, $j=\overline{1,n}$, функцией, поэтому (12) – это ДУ с разрывной правой частью. Решать его можно путем разбиения фазового пространства G_l^* на ряд областей в зависимости от того, какие значения принимают x_{j1l}, x_{j2l}, $j=\overline{1,n}$, и решения уравнения в каждой области.

Отметим, что общий ожидаемый доход сети на каждом интервале времени может быть найден как сумма доходов всех СМО на этом интервале.

Пример. Транспортное предприятие (ТП, система S_2), имеющее большое число автомобилей (заявок), посылает их для перевозки и приемки грузов в различные города (внешняя среда, система S_0), после чего они возвращаются на базу ТП, разгружаются на складе (система S_1), получают новое задание, и процесс продолжается аналогичным образом. В силу того что прибываемые грузы могут быть первоочередного значения, скоропортящимися или, например, прибывать из-за границы железнодорожным транспортом (при этом составы должны быть скорее возвращены отправителю), определенные заявки могут иметь приоритет при обслуживании (разгрузке – погрузке, оформлении документов), при прогнозировании доходов могут быть применены результаты данного раздела.

Состояние сети в данном случае описывается вектором $k(t)=(k,t)=(k_{11}(t),k_{12}(t);k_{21}(t),k_{22}(t))$, $k_{01}(t)=K_1-k_{11}(t)-k_{21}(t)$, $k_{02}(t)=K_2-k_{12}(t)-k_{22}(t)$ – числа приоритетных и неприоритетных заявок в системе S_0. Вероятности переходов заявок между системами равны $p_{12}=p_{23}=p_{31}=1$, остальные $p_{ij}=0$, $i,\ j=\overline{1,3}$. За единицу времени примем один месяц.

$$K_1(t)=\begin{cases}30,t\in[0,3),\\35,t\in[3,6),\\30,t\in[6,9),\\27,t\in[9,12],\end{cases}\quad K_2(t)=\begin{cases}27,t\in[0,3),\\30,t\in[3,6),\\25,t\in[6,9),\\30,t\in[9,12],\end{cases}\quad \mu_{01}(t)=\begin{cases}8,t\in[0,3),\\6,t\in[3,6),\\7,t\in[6,9),\\5,t\in[9,12],\end{cases}\quad \mu_{02}(t)=\begin{cases}5,t\in[0,3),\\7,t\in[3,6),\\4,t\in[6,9),\\6,t\in[9,12],\end{cases}$$

$$\mu_{11}(t)=\begin{cases}8,t\in[0,3),\\7,t\in[3,6),\\7,t\in[6,9),\\6,t\in[9,12],\end{cases}\quad \mu_{12}(t)=\begin{cases}8,t\in[0,3),\\7,t\in[3,6),\\8,t\in[6,9),\\7,t\in[9,12],\end{cases}\quad \mu_{21}(t)=\begin{cases}7,t\in[0,3),\\6,t\in[3,6),\\4,t\in[6,9),\\4,t\in[9,12],\end{cases}\quad \mu_{22}(t)=\begin{cases}7,t\in[0,3),\\4,t\in[3,6),\\5,t\in[6,9),\\6,t\in[9,12],\end{cases}$$

$$m_1(t)=\begin{cases}5,t\in[0,3),\\6,t\in[3,6),\\6,t\in[6,9),\\2,t\in[9,12],\end{cases}\quad m_2(t)=\begin{cases}6,t\in[0,3),\\5,t\in[3,6),\\7,t\in[6,9),\\4,t\in[9,12],\end{cases}\quad R^{(1)}_{0ic}(t)=\begin{cases}5,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\4,\ t\in[3,\ 6)\ ,\\5{,}5;\ t\in[6,\ 9)\ ,\\7,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}\quad R^{(2)}_{0ic}(t)=\begin{cases}5,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\6,\ t\in[3,\ 6)\ ,\\5{,}5;\ t\in[6,\ 9)\ ,\\7,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}$$

$$R_{1ic}^{(1)}(t)=\begin{cases}6,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\5,\ t\in[3,\ 6)\ ,\\6{,}5;\ t\in[6,\ 9)\ ,\\6,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}\quad R_{1ic}^{(2)}(t)=\begin{cases}7,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\6,\ t\in[3,\ 6)\ ,\\6{,}5;\ t\in[6,\ 9)\ ,\\5,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}\quad R_{2ic}^{(1)}(t)=\begin{cases}7,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\5,\ t\in[3,\ 6)\ ,\\7{,}5;\ t\in[6,\ 9)\ ,\\5,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}\quad R_{2ic}^{(2)}(t)=\begin{cases}3,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\2,\ t\in[3,\ 6)\ ,\\7{,}5;\ t\in[6,\ 9)\ ,\\3,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}$$

$$R_1(t)=\begin{cases}4,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\2{,}5;\ t\in[3,\ 6)\ ,\\2,\ t\in[6,\ 9)\ ,\\3,\ t\in[9,\ 12]\ ,\end{cases}\quad R_2(t)=\begin{cases}5,\ t\in[0,\ 3)\ ,\\2{,}5;\ t\in[3,\ 6)\ ,\\4,\ t\in[6,\ 9)\ ,\\2,\ t\in[9,\ 12]\ .\end{cases}$$

Найдем решение уравнения (12) на четырех интервалах $[0,3)$, $[3,6)$, $[6,9)$, $(9,12]$ в области $G_{1l}^{*}=\left\{x_l : l_{1l}(t)<x_{1sl'}\le 1,\quad l_{2l}(t)<x_{2sl'}\le 1, \sum\limits_{s=1}^{2}\left(x_{1sl}+x_{2sl}\right)\le 1\right\}$, $l=1,2$. И пусть $\bar{v}_{G^*1}^{pr}(0)=0$. Зависимость среднего дохода системы S_1 от времени представлена на рис. 1.

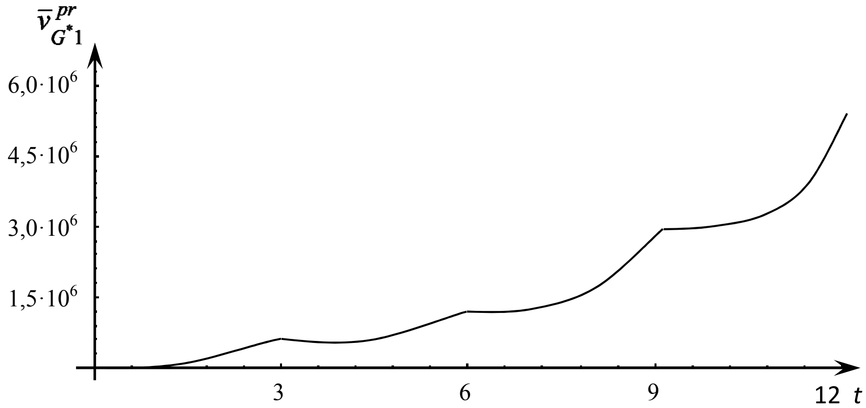

Рис. 1. Средний доход системы S_1

Заключение

Проведен асимптотический анализ замкнутой сети с приоритетными заявками, когда вероятности переходов заявок между СМО и параметры обслуживания зависят от времени, а величины приоритетных и неприоритетных заявок являются кусочно-постоянными функциями времени. Получены уравнения в частных производных для плотностей распределения ожидаемых доходов СМО сети и ОДУ для самих ожидаемых доходов при большом числе заявок в сети.

Это дает возможность применить результаты при прогнозировании ожидаемых доходов ЛТС с учетом приоритетности обслуживания, например, погрузки – разгрузки определенных транспортных средств, для которых рассчитаны конкретные примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маталыцкий М.А., Русилко Т.В.* Математический анализ стохастических моделей обработки исков в страховых компаниях. Гродно : ГрГУ, 2007. 334 с.
2. *Медведев Г.А*. Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 6. С. 65–73.
3. *Медведев Г.А*. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199–203.
4. *Тихонов В.И., Миронов М.А*. Марковские процессы. М. : Сов. радио, 1977. 488 с.

Китурко Ольга Михайловна. E-mail: sytaya_om@mail.ru
Маталыцкий Михаил Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор.
E-mail: m.matalytski@gmail.com
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Беларусь Поступила в редакцию 02 апреля 2014 г.

Kiturko Olga M., Matalytski Mikhail A. (Grodno State University, Minsk, Belarus).
Asymptotic analysis of incomes in closed HM-network with variable number of priority and non-priority messages.
Keywords: HM-network; expected incomes; method of diffusion approximation; priority messages.

An asymptotic analysis of incomes in the closed exponential HM-network, in which messages are served with an absolute priority and non-priority messages. The number of priority $K_1(t)$ and non-priority $K_2(t)$ messages are piecewise constant functions of time with q intervals of constancy, $K_{sl}(t) = K_{sl}$, $t \in [T_{l-1}, T_l)$, $K_{1l} + K_{2l} = K_l$, $l = \overline{1,q}$. The number of lines in service queueing systems (QS) $m_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $m_0(t) = K_1(t) + K_2(t)$, transition probabilities between messages $p_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0,n}$, depend on time. We denote $v^*_{cl}(k,t)$ the expected income, which will receive at l time interval the QS of closed network during time t, if at the initial time the closed network is in a condition k, I_{0s} is the $2n$-vector consisting of zeros, I_{is} is the $2n$-vector with zero components and components with the exception of the room $2(i-1)+s$, which is equal to 1, $i = \overline{1,n}$, $s = 1,2$.

It is shown that the distribution density $p^*_{vcl}(x_l,t)$ of the income of the system S_c at time interval l satisfies, up to terms of order of smallness $\varepsilon_l^2 = K_l^{-2}$, partial differential equations

$$\frac{\partial p^*_{vcl}(x_l,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{2} A_{isl}(x_l,t)\frac{\partial p^*_{vcl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}} + \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s=1}^{2} B_{ijsl}(x_l,t)\frac{\partial^2 p^*_{vcl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}\partial x_{jsl}} + r^*_{cl}(x_l,t).$$

Denote by $\overline{v}^{pr}_{G_l^* cl}(t)$ the average value of income over x_l for the system S_c with priority messages, provided the initial state x changes in the region G_l^*, where $G_l^* = \left\{x_l = (x_{11l}, x_{12l}; x_{21l}, x_{22l}; \ldots; x_{n1l}, x_{n2l}) :\ x_{isl} \ge 0,\ s = 1,2;\ \sum_{i=1}^{n}(x_{i1l} + x_{i2l}) \le 1\right\}$. For this quantity we received the inhomogeneous ordinary differential equation

$$\frac{d}{dt}\overline{v}^{pr}_{G_l^* cl}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{2}\frac{\partial A_{isl}(x_l,t)}{\partial x_{isl}}\overline{v}^{pr}_{G_l^* cl}(t) + \frac{1}{m(G_l^*)}\iint\limits_{G_l^*}\ldots\int r^*_{cl}(x_l,t)dx_l.$$

The results are applied in forecasting incomes of the carrier enterprise.

REFERENCES

1. Matalytskiy M.A., Rusilko T.V. *Matematicheskiy analiz stokhasticheskikh modeley obrabotki iskov v strakhovykh kompaniyakh* [Mathematical analysis of stochastic models of claims processing in insurance companies]. Grodno: Grodno State University Publ., 2007. 334 p.
2. Medvedev G.A. Ob optimizatsii zamknutoy sistemy massovogo obsluzhivaniya [On the optimization of closed queuing systems]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika,* 1975, no. 6, pp. 65-73.
3. Medvedev G.A. Zamknutye sistemy massovogo obsluzhivaniya i ikh optimizatsiya [Closed queueing systems and their optimization]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika,* 1978, no. 6, pp. 199-203.
4. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* [Markov processes]. Moscow: Sov. Radio Publ., 1977. 488 p.