

УДК 519.872

В.В. Науменко, М.А. Маталыцкий

**АНАЛИЗ СЕТЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ
ЗАЯВКАМИ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ**

Рассматривается сеть массового обслуживания в переходном режиме с положительными и отрицательными заявками, которая может использоваться при моделировании поведения вирусов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях. Выведена система разностно-дифференциальных уравнений для вероятностей состояний сети. Для их нахождения предложена методика, основанная на использовании аппарата многомерных производящих функций. Получены приближенные выражения для определения вероятностей состояний в любой момент времени. Проводится также исследование такой сети с доходами, описана методика нахождения ожидаемых доходов систем сети.

Ключевые слова: *G-сеть с отрицательными заявками, ММ-сеть с положительными и отрицательными заявками, переходный режим.*

Современные информационно-телекоммуникационные системы и сети становятся все более сложными, что обусловлено необходимостью повышения надежности передачи и обработки информации. Построение и исследование математических моделей для оценки качества их функционирования является важной задачей. Применение для этой цели классических моделей теории массового обслуживания (МО) не всегда дает адекватные результаты, поскольку необходимо, чтобы модели учитывали как характерные особенности систем, так и возможное влияние различных дестабилизирующих факторов, как например, внезапные сбои, попадание вирусов, потеря передаваемых или обрабатываемых данных.

Для учета подобных факторов была предложена концепция отрицательных заявок и связанных с ними сетей и систем МО, принципиально новый класс сетей МО был введен Е. Геленбе в [1]. Это G-сети, в которых помимо потоков обычных (положительных) заявок рассматриваются также дополнительные пуассоновские потоки отрицательных заявок. При поступлении в систему сети отрицательная заявка уничтожает одну положительную заявку, если таковая имеется в данной системе, тем самым уменьшая число положительных заявок в системе на единицу. Затем отрицательная заявка исчезает из сети, не получив никакого обслуживания. Например, в компьютерных сетях «положительными» заявками являются задания (программы), а «отрицательными» – компьютерные вирусы. При поступлении в компьютерную сеть вирус уничтожает или наносит вред, заражает одну из исполняемых программ, уменьшая количество действующих программ или запросов в системе на единицу. Следует отметить, что исследование G-сетей в стационарном режиме проведено в работах [2, 3].

При попадании вируса в информационную систему из-за потери информации или ее искажения система и вся информационно-телекоммуникационная сеть несет некоторые расходы или убытки. При переходе положительной заявки из одной СМО в другую последняя СМО получает некоторый доход, а доход первой

СМО уменьшается соответственно на эту величину. Кроме того, учет этого можно осуществить, применив в качестве модели сеть МО с доходами (НМ-сеть) с положительными и отрицательными заявками. Во второй части данной статьи описана методика нахождения ожидаемых доходов в системах такой сети. Методика анализа НМ-сетей без учета отрицательных заявок и их применения при прогнозировании ожидаемых доходов различных объектов описаны в работе [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим открытую G-сеть МО с n однолинейными СМО. В СМО S_i извне (из системы S_0) поступает поток положительных (обычных) заявок интенсивности λ_{0i}^+ и пуассоновский поток отрицательных заявок интенсивности λ_{0i}^- , $i = \overline{1, n}$. Все поступающие в сеть потоки заявок являются независимыми. Длительности обслуживания положительных заявок в СМО S_i распределены экспоненциально с параметром μ_i , $i = \overline{1, n}$. Отрицательная заявка, поступающая в некоторую систему сети, в которой имеется, по крайней мере, одна положительная заявка, мгновенно уничтожает одну из них и наносит убыток этой СМО. При предположении экспоненциального распределения времени обслуживания положительных заявок можно не заботиться о том, какая именно заявка уничтожается. После этого она сама сразу же покидает сеть или уничтожается в замкнутой сети, не получая в данной СМО никакого обслуживания. Таким образом, в каждой СМО-сети могут обслуживаться только положительные заявки, поэтому в дальнейшем, говоря об обслуживании положительных заявок, обычно для краткости называют их просто заявками [1]. Положительная заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый доход и соответственно доход первой системы уменьшается на эту величину.

Каждая положительная заявка направляется в СМО S_i с вероятностью p_{0i}^+ , а отрицательная – с вероятностью p_{0i}^- , $\sum_{i=1}^n p_{0i}^+ = \sum_{i=1}^n p_{0i}^- = 1$, $i = \overline{1, n}$. Положительная заявка, обслуженная в СМО S_i , с вероятностью p_{ij}^+ направляется в СМО S_j как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^- – как отрицательная заявка и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$ уходит из сети во внешнюю среду (СМО S_0), $i, j = \overline{1, n}$. Под состоянием сети будем понимать вектор $k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t)$, где k_i – число заявок в момент времени t в системе S_i , $i = \overline{1, n}$. Пусть $P(k, t)$ – вероятность состояния k в момент времени t .

Обозначим через $v_i(k, t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t , если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k , и предположим, что эта функция дифференцируема по t ; $r_i(k)$ – доход системы S_i в единицу времени, когда сеть находится в состоянии k ; $r_{0i}(k + I_i, t)$ – доход системы S_i , когда сеть совершает переход из состояния (k, t) в состояние

$(k + I_i, t + \Delta t)$ за время Δt , где I_i – вектор размерности n , состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером i , которая равна 1, $i = \overline{1, n}$; $-R_{i0}(k - I_i, t)$ – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k - I_i, t + \Delta t)$; $r_{ij}^+(k + I_i - I_j, t)$ – доход системы S_i (расход или убыток системы S_j), когда сеть изменяет свое состояние из (k, t) на $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ за время Δt ; $r_{ij}^-(k + I_i + I_j, t)$ – доход системы S_i (убыток системы S_j), когда сеть изменяет свое состояние из (k, t) на $(k + I_i + I_j, t + \Delta t)$ за время Δt , $i, j = \overline{1, n}$.

Требуется найти вероятности состояний сети и ожидаемые (средние) доходы систем сети за время t при условии, что нам известно ее состояние в начальный момент t_0 .

Теорема. Вероятности состояний рассматриваемой сети удовлетворяют системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i] u(k_i) P(k, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ u(k_i) P(k - I_i, t) + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i \left(p_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij}^- (1 - u(k_j)) \right) \right] P(k + I_i, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_i \left[p_{ij}^+ u(k_j) P(k + I_i - I_j, t) + p_{ij}^- P(k + I_i + I_j, t) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Доказательство. В силу экспоненциальности времен обслуживания заявок случайный процесс $k(t) = (k, t)$ является цепью Маркова со счетным числом состояний. Возможны следующие переходы в состояние $(k, t + \Delta t)$ за время Δt : из состояния $(k - I_i, t)$ с вероятностью $\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$, из состояния $(k + I_i, t)$ с вероятностью $(\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i p_{ij}^- (1 - u(k_j))) \Delta t + o(\Delta t)$, из состояния $(k + I_i - I_j, t)$ с вероятностью $\mu_i p_{ij}^+ u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$, из состояния $(k + I_i + I_j, t)$ с вероятностью $\mu_i p_{ij}^- \Delta t + o(\Delta t)$, из состояния (k, t) с вероятностью $\left(1 - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i] u(k_i) \right) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$; из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности, можно записать

$$\begin{aligned} P(k, t + \Delta t) = & \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ u(k_i) P(k - I_i, t) \Delta t + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left[\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i p_{ij}^- (1 - u(k_j)) \right] P(k + I_i, t) \Delta t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^+ u(k_j) P(k + I_i - I_j, t) \Delta t + \sum_{i,j=1}^n p_{ij}^- P(k + I_i + I_j, t) \Delta t + \\
& + \left(1 - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i] u(k_i) \right) \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Разделив обе части этого соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему уравнений для вероятностей состояний сети (1).

2. Нахождение вероятностей состояний сети

Предположим, что все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки, т.е. $k_i(t) > 0$, $\forall t > 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда система РДУ (1) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dP(k, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i) P(k, t) + \\
& + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ P(k - I_i, t) + \sum_{i=1}^n (\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^-) P(k + I_i, t) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \mu_i [p_{ij}^+ P(k + I_i - I_j, t) + p_{ij}^- P(k + I_i + I_j, t)].
\end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через $\Psi_n(z, t)$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, n -мерную производящую функцию

$$\begin{aligned}
\Psi_n(z, t) = & \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(k_1, k_2, \dots, k_n, t) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} = \\
= & \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(k, t) \prod_{i=1}^n z_i^{k_i}.
\end{aligned}$$

Умножив (2) на $\prod_{l=1}^n z_l^{k_l}$ и просуммировав по всем возможным значениям k_l от 1 до $+\infty$, $l = \overline{1, n}$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ДУ)

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_n(z, t)}{dt} = & - \left[\sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i) - \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ z_i - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^-}{z_i} - \right. \\
& \left. - \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^+ \frac{z_j}{z_i} - \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^- \frac{1}{z_i z_j} \right] \Psi_n(z, t) - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^-}{z_i} \sum_{\substack{k_j=1 \\ j=1, n, j \neq i}}^{\infty} P(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_n, t) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n z_l^{k_l} - \\
& - \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^+ \frac{z_j}{z_i} \sum_{\substack{k_m=1 \\ m=1, n, m \neq j}}^{\infty} P(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_n, t) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n z_l^{k_l} -
\end{aligned}$$

$$- \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^- \frac{1}{z_i z_j} \sum_{\substack{k_m=1 \\ m=1, n, m \neq j}}^{\infty} P(k_1, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_n, t) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n z_l^{k_l}. \quad (3)$$

Поскольку все СМО-сети функционируют в условиях высокой нагрузки, то последние три выражения в виде сумм в уравнении (3) будут равны нулю и оно становится однородным:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_n(z, t)}{dt} = & - \left[\sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i) - \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ z_i - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^-}{z_i} - \right. \\ & \left. - \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^+ \frac{z_j}{z_i} - \sum_{i,j=1}^n \mu_i p_{ij}^- \frac{1}{z_i z_j} \right] \Psi_n(z, t). \end{aligned}$$

Решение его имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_n(z, t) = C_n \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i) - \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ z_i - \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} (\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_i \sum_{j=1}^n p_{ij}^+ z_j - \mu_i \sum_{j=1}^n p_{ij}^- \frac{1}{z_j}) \right] t \right\}. \end{aligned}$$

Будем считать, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0)$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) = 1$, $P(k_1, k_2, \dots, k_n, 0) = 0$, $\forall \alpha_i \neq k_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда начальным условием для последнего уравнения будет

$$\Psi_n(z, 0) = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) \prod_{l=1}^n z_l^{\alpha_l} = \prod_{l=1}^n z_l^{\alpha_l}. \text{ Используя его, получаем } C_n = 1.$$

Таким образом, выражение для производящей функции $\Psi_n(z, t)$ с учетом разложения входящей в него экспоненты в ряд Маклорена имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_n(z, t) = a_0(t) \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} \sum_{q_1=0}^{\infty} \dots \sum_{q_n=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_n=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_n=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (l_i + q_i + r_i + u_i)} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda_{0i}^{+l_i} p_{0i}^{+l_i} (\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^-)^{q_i} \mu_i^{r_i + u_i} \left(\prod_{j=1}^n p_{ij}^+ \right)^{r_i} \left(\prod_{j=1}^n p_{ij}^- \right)^{u_i}}{l_i! q_i! r_i! u_i!} z_i^{\alpha_i + l_i - q_i - r_i + R - u_i - U} \right], \quad (4) \end{aligned}$$

где $R = \sum_{i=1}^n r_i$, $U = \sum_{i=1}^n u_i$, $a_0(t) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i) t \right\}$. Вероятности состояний $P(k, t)$ являются коэффициентами разложения функции $\Psi_n(z, t)$ в многократный ряд по степеням z_i , $i = \overline{1, n}$.

Пример. Пусть количество СМО в сети $n = 5$. Интенсивности входного потока положительных и отрицательных заявок λ_{0i}^+ и λ_{0i}^- равны соответственно: $\lambda_{01}^+ = 2$, $\lambda_{02}^+ = 3$, $\lambda_{03}^+ = 2$, $\lambda_{04}^+ = 4$, $\lambda_{05}^+ = 5$, $\lambda_{01}^- = 1$, $\lambda_{02}^- = \lambda_{03}^- = \lambda_{04}^- = 0$, $\lambda_{05}^- = 1$.

Интенсивности обслуживания заявок μ_i равны $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$, $\mu_4 = 1$, $\mu_5 = 3$. Пусть также вероятности p_{0i}^+ , с которыми положительная заявка направляется в СМО S_i , равны $p_{01}^+ = 2/15$, $p_{02}^+ = 1/5$, $p_{03}^+ = 1/15$, $p_{04}^+ = 4/15$, $p_{05}^+ = 1/3$, а аналогичные вероятности для отрицательных заявок равны $p_{01}^- = 1/3$, $p_{02}^- = p_{03}^- = p_{04}^- = 0$, $p_{05}^- = 2/3$. Вероятности p_{ij}^+ того, что положительные заявки, обслуженные в СМО S_i , направляются в СМО S_j как положительные заявки, равны: $p_{12}^+ = p_{13}^+ = p_{14}^+ = p_{21}^+ = p_{23}^+ = p_{24}^+ = p_{31}^+ = p_{32}^+ = p_{34}^+ = 1/3$, $p_{41}^+ = p_{42}^+ = p_{43}^+ = p_{45}^+ = 1/4$, $p_{54}^+ = 1/2$. С вероятностью $p_{50} = 1/2$ заявка уходит из сети во внешнюю среду.

Тогда выражение $a_0(t)$ примет вид $a_0(t) = \exp\left\{-\frac{71}{5}t\right\} = e^{-\frac{71}{5}t}$.

Пусть нам надо найти, например, вероятность состояния $P(1,1,\dots,1,t)$. Она является коэффициентом при $z_1 z_2 \dots z_n$ в разложении функции $\Psi_n(z,t)$ в многократный ряд (4), поэтому степени при z_i должны удовлетворять соотношению $\alpha_i + l_i - q_i - r_i + R - u_i - U = 1$, $i = \overline{1,n}$, откуда следует, что

$$q_i = \alpha_i + l_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j - 1, \quad i = \overline{1,n},$$

$$q_i + r_i + u_i = \alpha_i + l_i + \sum_{j=1}^n r_j - \sum_{j=1}^n u_j - 1, \quad i = \overline{1,n},$$

$$l_i + q_i + r_i + u_i = \alpha_i + 2l_i + \sum_{j=1}^n r_j - \sum_{j=1}^n u_j - 1, \quad i = \overline{1,n},$$

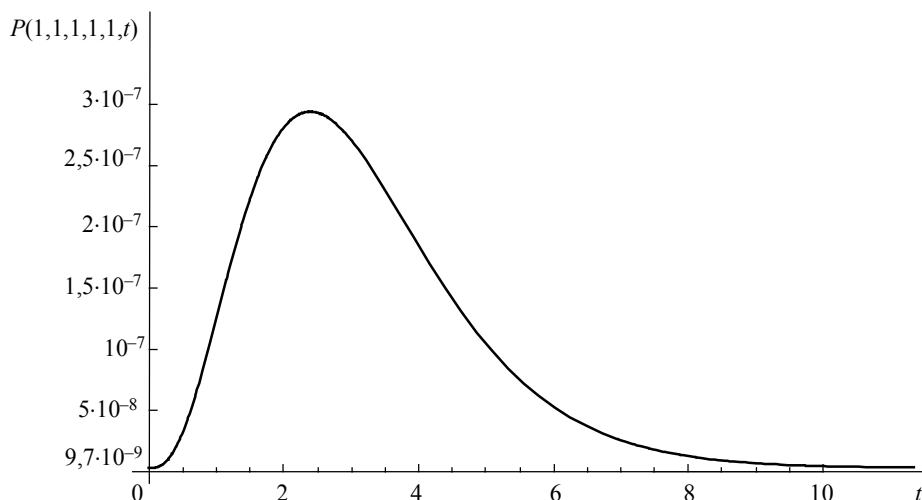
$$\sum_{i=1}^n (l_i + q_i + r_i + u_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 2l_i) + n(R - U - 1).$$

Тогда из соотношения (4) получаем, что

$$P(1,1,1,1,1,t) = e^{-\frac{71}{5}t} \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \dots \sum_{u_n=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (\alpha_i + 2l_i) + n(R - U - 1)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda_{0i}^{+l_i} p_{0i}^{+l_i} (\mu_i p_{i0}^{+} + \lambda_{0i}^{-} p_{0i}^{-})^{\alpha_i + l_i + \sum_{j=1}^n r_j - \sum_{j=1}^n u_j - 1} \mu_i^{r_i + u_i} \left(\prod_{j=1}^n p_{ij}^{+} \right)^{r_i} \left(\prod_{j=1}^n p_{ij}^{-} \right)^{u_i}}{l_i! \left(\alpha_i + l_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j - 1 \right)! r_i! u_i!} \right], \quad n = 5.$$

На рис. 1 изображен график данной вероятности при различных значениях t . Отметим, что, зная вероятности состояний сети, можно, в принципе, найти выражения для любых средних характеристик рассматриваемой сети.

Рис. 1. График вероятности состояния $P(1,1,1,1,1,t)$

3. Анализ сети с доходами, когда доходы от переходов между состояниями сети – детерминированные функции

Будем рассматривать теперь нашу сеть с учетом доходов и расходов СМО сети при обслуживании положительных и отрицательных заявок. Рассмотрим случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени. Возможные переходы между состояниями сети, вероятности переходов и доходы системы S_i от этих переходов указаны в таблице. Они находятся аналогично как в [4] для сети без отрицательных заявок.

Возможные переходы между состояниями сети, их вероятности и доходы системы S_i

Возможные переходы между состояниями сети	Вероятности переходов	Доходы системы S_i от переходов между состояниями
$(k,t) \rightarrow (k,t+\Delta t)$	$1 - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i] \times u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$	$r_i(k) \Delta t + v_i(k,t)$
$(k,t) \rightarrow (k+I_j,t+\Delta t), j \neq i$	$(\mu_j p_{j0} + \lambda_{0j}^- p_{0j}^- + \mu_j p_{ji}^- (1-u(k_j))) \Delta t + o(\Delta t)$	$r_i(k) \Delta t + v_i(k+I_j,t)$
$(k,t) \rightarrow (k-I_j,t+\Delta t), j \neq i$	$\lambda_{0j}^+ p_{0j}^+ u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$	$r_i(k) \Delta t + v_i(k-I_j,t)$
$(k,t) \rightarrow (k+I_c-I_s,t+\Delta t), c,s \neq i$	$\mu_c p_{cs}^+ u(k_s) \Delta t + o(\Delta t)$	$r_i(k) \Delta t + v_i(k+I_c-I_s,t)$
$(k,t) \rightarrow (k+I_i,t+\Delta t)$	$(\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i p_{ij}^- (1-u(k_j))) \Delta t + o(\Delta t)$	$r_{0i}(k+I_i,t) + v_i(k+I_i,t)$
$(k,t) \rightarrow (k-I_i,t+\Delta t)$	$\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$	$-R_{i0}(k-I_i,t) + v_i(k-I_i,t)$

Окончание таблицы

Возможные переходы между состояниями сети	Вероятности переходов	Доходы системы S_i от переходов между состояниями
$(k, t) \rightarrow (k + I_i - I_j, t + \Delta t), j \neq i$	$\mu_i p_{ij}^+ u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$	$r_{ij}^+(k + I_i - I_j, t) + v_i(k + I_i - I_j, t)$
$(k, t) \rightarrow (k + I_i + I_j, t + \Delta t), j \neq i$	$\mu_i p_{ij}^- \Delta t + o(\Delta t)$	$r_{ij}^-(k + I_i + I_j, t) + v_i(k + I_i + I_j, t)$

Тогда, используя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем систему РДУ для дохода $v_i(k, t)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_i(k, t)}{dt} = & -(\lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i) u(k_i) v_i(k, t) + \\
 & + \sum_{j=1}^n \left[(\mu_j p_{j0} + \lambda_{0j}^- p_{0j}^- + \mu_j p_{ji}^- (1 - u(k_i))) v_i(k + I_j, t) + \lambda_{0j}^+ p_{0j}^+ u(k_j) v_i(k - I_j, t) \right] + \\
 & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[\mu_i p_{ij}^+ u(k_j) v_i(k + I_i - I_j, t) + \mu_j p_{ji}^+ u(k_i) v_i(k - I_i + I_j, t) + \mu_i p_{ij}^- v_i(k + I_i + I_j, t) \right] + \\
 & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[\mu_i p_{ij}^+ u(k_j) r_{ij}^+(k + I_i - I_j, t) - \mu_j p_{ji}^+ u(k_i) r_{ij}^+(k - I_i + I_j, t) + \mu_i p_{ij}^- r_{ij}^-(k + I_i + I_j, t) \right] + \\
 & + \sum_{\substack{c,s=1 \\ c,s \neq i}}^n \mu_c p_{cs}^+ u(k_s) v_i(k + I_c - I_s, t) + (\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- p_{0i}^- + \mu_i p_{ij}^- (1 - u(k_j))) r_{0i}(k + I_i, t) - \\
 & - \lambda_{0i}^+ p_{0i}^+ u(k_i) R_{i0}(k - I_i, t) + r_i(k). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Число уравнений в этой системе равно числу состояний сети, т.е. для открытой сети равно ∞ . Формально система уравнений (5) может быть сведена к системе счетного числа линейных неоднородных ОДУ с постоянными коэффициентами, которая в матричной форме может быть записана в виде

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = Q_i(t) + AV_i(t), \tag{6}$$

где $V_i^T(t) = (v_i(1, t), v_i(2, t), \dots, v_i(l, t), \dots)$ – искомый вектор доходов системы S_i . Решение системы (6) можно найти, используя прямой метод (с помощью матричной экспоненты). Умножив обе части системы (6) на e^{-At} , получим

$$e^{-At} V_i'(t) = e^{-At} AV_i(t) + e^{-At} Q_i(t),$$

откуда следует, что

$$V_i(t) = e^{At} V_i(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Q_i(\tau) d\tau,$$

где $e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^m t^m}{m!} + \dots$ – матричная экспонента, I – единичная матрица. Для нахождения матрицы e^{At} необходимо найти собственные значения $q_1, q_2, \dots, q_l, \dots$ матрицы A и полную систему соответствующих им правых собственных векторов $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}, \dots$, если это возможно [5]. Затем мы должны воспользоваться представлением

$$e^{At} = UB(t)U^{-1},$$

где U – матрица, столбцами которой являются собственные векторы $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}, \dots$; $B(t)$ – диагональная матрица

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{q_1 t} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{q_2 t} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{q_l t} & \dots \\ & & \dots & & \dots \end{pmatrix}.$$

Но из-за неограниченности размерности матриц A , $Q_i(t)$ на практике такой способ можно применить только в частных случаях, когда они имеют специальный вид.

Для решения системы (5) можно применить метод многомерных z -преобразований, введя в рассмотрение многомерные z -преобразования для ожидаемых доходов систем сети:

$$\Phi_i(z, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} v_i(k_1, k_2, \dots, k_n, t) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} = \sum_{\substack{k_i=0, \\ i=1, n}}^{\infty} v_i(k, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l},$$

$$z \in \{(z_1, z_2, \dots, z_n) / |z_i| < 1, i = \overline{1, n}\},$$

получив для них соотношения подобным образом, как в [4]. На основе этих соотношений можно предложить алгоритм вычисления ожидаемых доходов, но, как показывает опыт [6, 7], такие алгоритмы являются довольно сложными для реализации. Для решения систем РДУ, подобных (5), в [4] также предложено использовать метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.

Заключение

В работе предложена методика нахождения нестационарных вероятностей состояний сети МО с однолинейными СМО, положительными и отрицательными заявками, основанная на использовании аппарата многомерных производящих функций. Получены приближенные выражения для вероятностей состояний в условиях высокой нагрузки. Предложена также методика нахождения ожидаемых доходов в СМО такой сети, зависящих от времени. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с получением аналогичных результатов для сетей с многолинейными СМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe E. Product form queueing networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. 1991. V. 28. P. 656–663.
2. Бочаров П.П., Вишневский В.М. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 46–74.
3. Gelenbe E., Schassberger R. Stability of product-form G-networks // Probab. Eng. and Inf. Sci. 1992. V. 6. P. 271–276.
4. Матальцкий М.А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 97–113.
5. Матальцкий М.А., Тихоненко О.М., Колузаева Е.В. Системы и сети МО: анализ и применения. Гродно: ГрГУ, 2011. 817 с.
6. Матальцкий М.А., Колузаева Е.В. Анализ ожидаемых доходов в открытой сети с помощью z -преобразований // Вестник ГрГУ. Сер. 2. 2008. № 1. С. 20–30.
7. Колузаева Е.В., Нахождение ожидаемых доходов в открытой двух узловой НМ-сети с помощью z -преобразований // Вестник ГрГУ. Сер. 2. 2010. № 3. С. 9–14.

Науменко Виктор Викторович

Матальцкий Михаил Алексеевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

E-mail: victornn86@gmail.com; m.matalytski@gmail.com

Поступила в редакцию 7 июня 2013 г.

Naumenko Victor V., Matalytski Mikhail A. (Grodno State University). Analysis of networks with positive and negative messages at transient behavior.

Keywords: G-network with negative messages, HM-network with positive and negative messages, transient behavior.

The object of research is queueing network with one-line systems, positive and negative messages which can be used to model the behavior of viruses in the information and telecommunication systems and networks. It is obtained a system of difference-differential equations for the non-stationary states probabilities of the network. To find the state probabilities of the network applied a methodology based on the use of the apparatus of multidimensional generating functions. It is obtained an expression for generating function.

Also is conducted an investigation of such a network with incomes (HM-networks). It is considered the case: when the incomes from the state transition networks are deterministic functions depending on network states and time. It is obtained a system of difference-differential equations for the expected incomes of systems in the network. It is proposed the ways of solving it.