

УДК 519.872

Е.А. Моисеева, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|GI|1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ¹

Исследована математическая модель системы массового обслуживания MMPP|GI|1 с источником повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Получена асимптотическая характеристическая функция числа заявок в источнике повторных вызовов.

Ключевые слова: *RQ-система, источник повторных вызовов, метод асимптотического анализа, большая загрузка.*

В связи с бурным развитием информационно-вычислительных систем, систем коммуникаций, появлением и усложнением разнообразных технологических систем особый интерес с середины прошлого века получили исследования нового класса систем массового обслуживания – системы с источником повторных вызовов (ИПВ) или Retrial Queuing System (RQ-системы).

Особенность таких систем [1] заключается в том, что имеют место ситуации повторного обращения требований к обслуживающему прибору, если при входе в систему попытка встать на обслуживание была неудачной (так как прибор был занят).

В реальных информационных и экономических системах достаточно часто встречаются такие процессы. Предположим, что на телефон (единственный) некоторого учреждения в случайном порядке поступают вызовы. Если в момент поступления вызова телефон свободен, то абонент обслуживается, причем разговор длится в течение случайного времени, которое необходимо для обслуживания. Если же телефон занят, тогда клиент через некоторое время пытается повторно дозвониться в фирму.

Первые системы такого рода были рассмотрены Р.И. Вилкинсоном [2] и Дж. Козном [3]. Основные подходы к описанию систем с ИПВ были описаны Г. Гош-тони [4] и А. Элдином [5]. Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Г. И. Фалина и Дж. Артолехо [6, 7]. Ими получены характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|C и других систем с пуассоновским входящим потоком, а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем. Многие из поставленных задач в моделях RQ-систем решались численно белорусскими учеными [8, 9].

В данной же работе применяется метод асимптотического анализа для исследования таких систем с непуассоновским входящим потоком.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы, задание 8.4055.2011.

1. Математическое описание

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему с источником повторных вызовов, на вход которой поступает MMPP-поток (Markov Arrival Poisson Process) заявок с матрицей условных интенсивностей $\rho\lambda$, где параметр ρ и значения элементов матрицы λ будут определены ниже, и матрицей Q инфинитезимальных характеристик цепи Маркова $n(t)$, управляющей MMPP-поток, время обслуживания каждой заявки имеет произвольную функцию распределения $B(x)$. Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

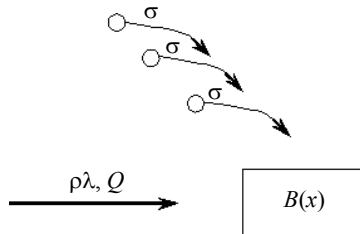


Рис. 1. Однолинейная RQ-система

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-поток, $z(t)$ – оставшееся время обслуживания, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим $P\{k(t)=0, n(t)=n, i(t)=i\}=P(0,n,i,t)$ – вероятность того, что прибор свободен в момент времени t , управляющая MMPP-поток цепь Маркова находится в состоянии n и в источнике повторных вызовов находится i заявок; а $P\{k(t)=1, n(t)=n, i(t)=i, z(t)<z\}=P(1,n,i,z,t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор занят, управляющая MMPP-поток цепь Маркова – в состоянии n , в источнике повторных вызовов находится i заявок и оставшееся время обслуживания меньше z .

Случайный процесс $\{k(t), n(t), i(t), z(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским, поэтому для получения распределения вероятностей $\{P(0,n,i,t); P(1,n,i,z,t)\}$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0,n,i,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(1,n,i,0,t)}{\partial z} - P(0,n,i,t)(\lambda_n + i\sigma - q_{nn}) + \sum_{v \neq n} P(0,v,i,t) \cdot q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1,n,i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(1,n,i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(1,n,i,0,t)}{\partial z} + (-\lambda_n + q_{nn})P(1,n,i,z,t) + \\ + \lambda_n P(0,n,i,t)B(z) + \lambda_n P(1,n,i-1,z,t) + \sigma(i+1) \cdot P(0,n,i+1,t)B(z) + \\ + \sum_{v \neq n} q_{vn} P(1,v,i,z,t). \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим

$$P(0,i) = \{P(0,1,i) \quad P(0,2,i) \quad \dots \quad P(0,N,i)\}$$

и

$$P(1,i,z) = \{P(1,1,i,z) \quad P(1,2,i,z) \quad \dots \quad P(1,N,i,z)\}.$$

В матричном виде в стационарном режиме система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial P(1, i, 0)}{\partial z} - P(0, i)(\lambda + i\sigma I) + P(0, i)Q = 0, \\ \frac{\partial P(1, i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P(1, i, 0)}{\partial z} - \lambda P(1, i, z) + \lambda P(0, i)B(z) + \lambda P(1, i-1, z) + \\ + \sigma(i+1) \cdot P(0, i+1)B(z) + P(1, i, z)Q = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Получили систему двух матричных уравнений в конечных разностях.

Будем полагать, что матрица λ удовлетворяет равенству

$$R\lambda E b = 1,$$

где R – стационарное распределение вероятностей значения цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток, E – единичный вектор-столбец, b – среднее время обслуживания.

Распределение вероятностей значения цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток, можно получить из следующих выражений:

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1. \end{cases}$$

Перед матрицей условных интенсивностей λ введем параметр ρ , характеризующий загрузку системы. Выполнение неравенства $\rho < 1$ представляет собой условие существования стационарного режима.

Тогда система (2) переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial P(1, i, 0)}{\partial z} - P(0, i)(\rho\lambda + i\sigma I) + P(0, i)Q = 0, \\ \frac{\partial P(1, i, z)}{\partial z} - \frac{\partial P(1, i, 0)}{\partial z} - \rho P(1, i, z)\lambda + \rho P(0, i)\lambda B(z) + \rho P(1, i-1, z)\lambda + \\ + \sigma(i+1) \cdot P(0, i+1)B(z) + P(1, i, z)Q = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Перейдем в системе (3) к характеристическим функциям:

$$H(1, u, z) = \sum_i e^{ju i} P(1, i, z) \text{ и } H(0, u) = \sum_i e^{ju i} P(0, i),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial u} H(k, u, z) = j \sum_i i e^{ju i} P(k, i, z)$, система уравнений (3) для ха-

рактеристических функций переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial H(1, u, 0)}{\partial z} + H(0, u)(Q - \rho\lambda) + j\sigma \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial H(1, u, z)}{\partial z} - \frac{\partial H(1, u, 0)}{\partial z} + H(1, u, z)Q + H(0, u)\rho\lambda B(z) + \\ + (e^{ju} - 1)H(1, u, z)\rho\lambda - e^{-ju} j\sigma \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} B(z) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решим систему (4) методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, характеризующемся предельным соотношением $\rho \uparrow 1$. Или, введя бесконечно малую величину $\varepsilon = 1 - \rho > 0$, условие большой загрузки может быть описано условием $\varepsilon \downarrow 0$.

В системе (4) выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad H(0, u) = \varepsilon G(w, \varepsilon), \quad H(1, u, z) = F(w, \varepsilon, z).$$

Получим

$$\begin{cases} \frac{\partial F(w, \varepsilon, 0)}{\partial z} + \varepsilon G(w, \varepsilon)(Q - (1 - \varepsilon)\lambda) + j\sigma \frac{\partial G(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ \frac{\partial F(w, \varepsilon, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(w, \varepsilon, 0)}{\partial z} + F(w, \varepsilon, z)Q + (e^{jw\varepsilon} - 1)(1 - \varepsilon)F(w, \varepsilon, z)\lambda + \\ + (1 - \varepsilon)\varepsilon G(w, \varepsilon)\lambda B(z) - e^{-jw\varepsilon} j\sigma \frac{\partial G(w, \varepsilon)}{\partial w} B(z) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

2. Вывод асимптотических уравнений

1. В системе (5) совершим предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$, обозначив $F(w, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(w, \varepsilon, z)$ и $G(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(w, \varepsilon)$. Получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} + j\sigma \frac{dG(w)}{dw} = 0, \\ \frac{\partial F(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} + F(w, z)Q - j\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z) = 0. \end{cases}$$

Тогда справедливо следующее:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} + j\sigma \frac{dG(w)}{dw} = 0, \\ \frac{\partial F(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) + F(w, z)Q = 0. \end{cases} \quad (6)$$

2. Запишем следующее разложения функций:

$$G(w, \varepsilon) = G(w) + \varepsilon \cdot g(w) + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

$$F(w, \varepsilon, z) = F(w, z) + \varepsilon \cdot f(w, z) + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

где $O(\varepsilon^2)$ – бесконечно малая величина порядка ε^2 .

Подставив разложения (7), (8) в систему (5), в результате несложных преобразований можно записать

$$\begin{cases} \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + \varepsilon G(w)(Q - (1 - \varepsilon)\lambda) + \varepsilon^2 g(w)(Q - (1 - \varepsilon)\lambda) + \\ + j\sigma \frac{dG(w)}{dw} + j\sigma \varepsilon \frac{dg(w)}{dw} = 0, \\ \frac{\partial F(w, z)}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + F(w, z)Q + \varepsilon f(w, z)Q + \\ + (1 - \varepsilon)\varepsilon G(w)\lambda B(z) + (1 - \varepsilon)\varepsilon^2 g(w)\lambda B(z) + jw\varepsilon(1 - \varepsilon)F(w, z) \cdot \lambda + \\ + jw\varepsilon^2(1 - \varepsilon)f(w, z) \cdot \lambda - (1 - jw\varepsilon)j\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z) - (1 - jw\varepsilon)j\sigma \varepsilon \frac{dg(w)}{dw} B(z) = 0. \end{cases}$$

Учитывая (6), разделив на ε и раскладывая экспоненту в ряд Тейлора и совершив предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + G(w)(Q - \lambda) + j\sigma \frac{dg(w)}{dw} = 0, \\ \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + f(w, z)Q + G(w)\lambda B(z) + jwF(w, z) \cdot \lambda + \\ + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z) - j\sigma \frac{dg(w)}{dw} B(z) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В частности, при суммировании уравнений системы (9) по всем строкам и предельном переходе при $z \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{cases} \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} E - G(w)\lambda E + j\sigma \frac{dg(w)}{dw} E = 0, \\ -\frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} E + G(w)\lambda E + jwF(w, z) \cdot \lambda E + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} E - j\sigma \frac{dg(w)}{dw} E = 0. \end{cases}$$

Суммируя уравнения, получаем

$$F(w, z) \cdot \lambda E + j\sigma \frac{dG(w)}{dw} E = 0. \quad (10)$$

3. Суммируем уравнения системы (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(w, \varepsilon, z)}{\partial z} + F(w, \varepsilon, z)Q + \varepsilon G(w, \varepsilon)Q + (e^{jw\varepsilon} - 1)(1 - \varepsilon)F(w, \varepsilon, z) \cdot \lambda + \\ + (1 - \varepsilon)\varepsilon G(w, \varepsilon)\lambda(B(z) - 1) + (1 - e^{-jw\varepsilon}B(z))j\sigma \frac{\partial G(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{aligned}$$

Совершим предельный переход при $z \rightarrow \infty$ и суммируем уравнения по всем строкам. Учитывая, что $QE = 0$, получим

$$(1 - \varepsilon)F(w, \varepsilon) \cdot \lambda E + e^{-jw\varepsilon}j\sigma \frac{\partial G(w, \varepsilon)}{\partial w} E = 0. \quad (11)$$

Подставим разложения (7), (8), учитывая (10), из выражения (11) имеем следующее уравнение:

$$-\varepsilon F(w) \cdot \lambda E + (1 - \varepsilon)\varepsilon f(w) \cdot \lambda E - jw\varepsilon j\sigma \frac{dG(w)}{dw} E + (1 - jw\varepsilon)\varepsilon j\sigma \frac{dg(w)}{dw} E = O(\varepsilon^2).$$

Разделим уравнение на ε и совершим предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$-F(w) \cdot \lambda E + f(w) \cdot \lambda E - jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} E + j\sigma \frac{dg(w)}{dw} E = 0. \quad (12)$$

Объединив (6), (9), (10) и (12), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} + j\sigma \frac{dG(w)}{dw} = 0, & \frac{\partial F(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) + F(w, z)Q = 0, \\ \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + G(w)(Q - \lambda) + j\sigma \frac{dg(w)}{dw} = 0, \\ \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + f(w, z)Q + G(w)\lambda B(z) + jwF(w, z) \cdot \lambda + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z) - \\ - j\sigma \frac{dg(w)}{dw} B(z) = 0, \\ F(w) \cdot \lambda E + j\sigma \frac{dG(w)}{dw} E = 0, \\ -F(w) \cdot \lambda E + f(w) \cdot \lambda E - jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} E + j\sigma \frac{dg(w)}{dw} E = 0. \end{cases} \quad (13)$$

3. Исследование системы полученных уравнений

1. Будем искать $F(w, z)$ в виде произведения:

$$F(w, z) = R \cdot A(z) \cdot \Phi(w). \quad (14)$$

Тогда из 2-го уравнения системы (13) можно записать

$$A'(z) - A'(0)(1 - B(z)) = 0.$$

Решение такого уравнения

$$A(z) = A'(0) \int_0^z (1 - B(x)) dx.$$

Найдем $A'(0)$. Так как $A(\infty) = 1$, то $A'(0) \int_0^\infty (1 - B(x)) dx = 1$. Отсюда $A'(0) = \frac{1}{b}$.

Тогда получаем

$$A(z) = \frac{1}{b} \int_0^z (1 - B(x)) dx. \quad (15)$$

Из 1-го уравнения можно записать

$$j\sigma \frac{dG(w)}{dw} = -\frac{\partial F(w, 0)}{\partial z} = -R A'(0) \Phi(w) = -\frac{1}{b} R \Phi(w). \quad (16)$$

Суммируя (16) по всем строкам, имеем

$$j\sigma \frac{dG(w)}{dw} E = -A'(0) \Phi(w) = -\frac{1}{b} \Phi(w). \quad (17)$$

2. Выразим из 3-го уравнения системы (13) $\frac{dg(w)}{dw}$ и подставим его в 4-е уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} + f(w, z)Q + G(w)\lambda B(z) + jwF(w, z) \cdot \lambda + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z) + \\ + \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} B(z) + G(w)(Q - \lambda)B(z) = 0. \end{aligned}$$

В результате несложных преобразований можно записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} (1 - B(z)) + f(w, z)Q + jwF(w, z) \cdot \lambda + \\ + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z) + G(w)Q = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Перепишем уравнение при условии $z \rightarrow \infty$, обозначив $F(w) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(w, z)$ и $f(w) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(w, z)$:

$$f(w)Q + jwF(w) \cdot \lambda + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} + G(w)Q = 0. \quad (19)$$

Подставим в (19) выражения (15), (16). В ходе несложных преобразований получаем следующее уравнение:

$$\{f(w) + G(w)\}Q = jw\Phi(w) \left(\frac{1}{b} R - R\lambda \right).$$

Пусть $\{G(w) + f(w)\} = jw\Phi(w)V$, где V – некоторый вектор, для которого выполняется

$$VQ = R \left(\frac{1}{b} I - \lambda \right). \quad (20)$$

Для того чтобы существовало решение такой системы, необходимо, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы Q . Так как определитель $|Q| = 0$, то и ранг расширенной матрицы должен быть меньше размерности системы. Тогда достаточно выполнения следующего условия:

$$\left(R\lambda - \frac{1}{b} R \right) E = 0.$$

Получаем $R\lambda E = 1/b$, что выполняется для данной системы массового обслуживания с выбранными параметрами в условии большой загрузки при $\rho \uparrow 1$.

Тогда решение системы (20) можно представить в виде

$$V = CR + V_{\text{част}},$$

где C – произвольная постоянная, $V_{\text{част}}$ – частное решение системы, которое можно найти из некоторых начальных условий, например $VE = 0$.

Таким образом, из (19) можно записать

$$f(w) = jw\Phi(w) \cdot V - G(w). \quad (21)$$

3. Пусть $f(w, z) = f(w)v(z)$. Тогда $\frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} = f(w)v'(0)$. Рассмотрим уравнение (18), суммированное по всем строкам:

$$f(w)v'(z)E - f(w)v'(0)(1 - B(z))E + jwF(w, z) \cdot \lambda E + jwj\sigma \frac{dG(w)}{dw} B(z)E = 0.$$

Разделим последнее выражение на $f(w)E$. Учитывая (15) и (16), имеем

$$v'(z) - v'(0)(1 - B(z)) + jw \cdot (f(w)E)^{-1} \cdot R \cdot A(z) \cdot \Phi(w) \cdot \lambda E - \\ - \frac{jw}{b} \cdot (f(w)E)^{-1} R \cdot \Phi(w) B(z)E = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad v(z) = v'(0) \int_0^z (1 - B(x))dx - \frac{jw}{b} \cdot f^{-1}(w)E \cdot \Phi(w) \int_0^z (A(x) - B(x))dx.$$

Из условия $v(\infty) = 1$ получим

$$v'(0)b = 1 + \frac{jw}{b} \cdot (f(w)E)^{-1} \cdot \Phi(w) \int_0^\infty (A(x) - 1) + (1 - B(x))dx. \quad (22)$$

Было найдено, что интеграл $\int_0^\infty (1 - A(x))dx = \frac{1}{b} \int_0^\infty x(1 - B(x))dx = \frac{b_2}{2b}$. Подставляя

это значение в (22), имеем конечное выражение для $v'(0)$:

$$v'(0) = \frac{1}{b} + \frac{jw}{b^2} \cdot (f(w)E)^{-1} \cdot \Phi(w) \left(-\frac{b_2}{2b} + b \right).$$

Тогда справедливо следующее выражение:

$$\frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} E = f(w) E v'(0) = \frac{1}{b} f(w) E + \frac{jw}{b^2} \cdot \Phi(w) \left(-\frac{b_2}{2b} + b \right). \quad (23)$$

4. Из 3-го уравнения системы (13), получим

$$j\sigma \frac{dg(w)}{dw} = -\frac{\partial f(w, 0)}{\partial z} - G(w)(Q - \lambda). \quad (24)$$

5. Суммируем 5-е и 6-е уравнения системы (13):

$$f(w)\lambda E + (1 - jw)j\sigma \frac{dG(w)}{dw} E + j\sigma \frac{dg(w)}{dw} E = 0.$$

Подставим в это выражение формулы (17), (21), (23) и (24):

$$f(w) \cdot \lambda E - (1 - jw) \frac{1}{b} \Phi(w) - \frac{1}{b} f(w) E - \frac{jw}{b^2} \cdot \Phi(w) \left(-\frac{b_2}{2b} + b \right) + G(w)\lambda E = 0.$$

Учитывая (19), получим

$$jw\Phi(w)V\lambda E - (1 - jw) \frac{1}{b} \Phi(w) - jw \frac{1}{b} \Phi(w)VE + \frac{1}{b} G(w)E - \frac{jw}{b^2} \Phi(w) \left(b - \frac{b_2}{2b} \right) = 0.$$

Продифференцируем последнее выражение и учтем (24):

$$\Phi'(w) \left[jwV\lambda E - jw \frac{1}{b} VE + jw \frac{b_2}{2b^3} - \frac{1}{b} \right] + j\Phi(w) \left[V\lambda E - \frac{1}{b} VE + \frac{b_2}{2b^3} + \frac{1}{\sigma b^2} \right] = 0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на выражение $V\lambda E - \frac{1}{b} VE + \frac{b_2}{2b^3}$:

$$\Phi'(w) \left[jw - \frac{1}{b(V\lambda E - \frac{1}{b} VE + \frac{b_2}{2b^3})} \right] + j\Phi(w) \left[1 + \frac{1}{\sigma b^2(V\lambda E - \frac{1}{b} VE + \frac{b_2}{2b^3})} \right] = 0. \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{1}{b} \left(V\lambda E - \frac{1}{b} VE + \frac{b_2}{2b^3} \right)^{-1}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\sigma b^2} \left(V\lambda E - \frac{1}{b} VE + \frac{b_2}{2b^3} \right)^{-1}.$$

Тогда формула (25) примет вид

$$\Phi(w) \cdot j\alpha = \Phi'(w) \cdot [\beta - jw].$$

Решение такого уравнения

$$\Phi(w) = C \cdot [w + j\beta]^{-\alpha}, \quad (26)$$

где C – произвольная постоянная.

Из условия $\Phi(0) = 1$ нетрудно найти значение постоянной $C = [j\beta]^\alpha$. Подставив полученное выражение в (26), имеем конечное выражение для искомой функции

$$\Phi(w) = \left[1 - \frac{jw}{\beta} \right]^{-\alpha}. \quad (27)$$

Возвращаясь к (14), получим, что

$$F(w) = R \left(1 - \frac{jw}{\beta} \right)^{-\alpha}.$$

Таким образом, функцию $F(w)$ можно представить в виде характеристической функции гамма-распределения с параметрами α и β , где

$$\beta = \frac{1}{b} \left(V\lambda E - \frac{1}{b} V E + \frac{b_2}{2b^3} \right)^{-1}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{b\sigma} \beta.$$

Замечание. На множестве решений $V = CR + V_{\text{част}}$ неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (20) параметры α и β гамма-распределения не зависят от значений постоянной C .

Доказательство. Рассмотрим выражение $(V\lambda E - \frac{1}{b} V E + \frac{b_2}{2b^3})$. Подставим в него множество решений $V = CR + V_{\text{част}}$.

$$(CR + V_{\text{част}})\lambda E - \frac{1}{b}(CR + V_{\text{част}})E + \frac{b_2}{2b^3} = CR\lambda E + V_{\text{част}}\lambda E - \frac{1}{b}CRE - \frac{1}{b}V_{\text{част}}E + \frac{b_2}{2b^3}.$$

Учитывая условия $RE = 1$ и $1/b = R\lambda E$, получим

$$V_{\text{част}}\lambda E - \frac{1}{b}V_{\text{част}}E + \frac{b_2}{2b^3}.$$

Таким образом, выражение $\left(V\lambda E - \frac{1}{b} V E + \frac{b_2}{2b^3} \right)$ зависит только от частного решения системы (20). Выберем такое решение, для которого выполняется $VE = 0$.

Тогда параметры α и β гамма-распределения примут следующий вид:

$$\beta = \frac{1}{b} \left(V\lambda E + \frac{b_2}{2b^3} \right)^{-1}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{b\sigma} \beta.$$

Заключение

Таким образом, характеристическая функция $H(u) = H(1, u, \infty) + H(0, u)$ в условиях большой загрузки может быть приближенно определена равенством $H(u) \approx h(u)$. Тогда, возвращаясь к переменной $u = \varepsilon w$ и параметру ρ в выражении $F(w) = \left(1 - \frac{jw}{\beta} \right)^{-\alpha}$, получим

$$h(u) = F(w/\varepsilon) = F(w/(1-\rho)) = \left(1 - \frac{ju}{\beta(1-\rho)} \right)^{-\alpha}.$$

Асимптотическое распределение $P(i)$, характеристическая функция которого равна $h(u) = \left(1 - \frac{ju}{\beta(1-\rho)} \right)^{-\alpha}$, может также быть найдено с помощью обратного преобразования Фурье либо с использованием свойства гамма-распределения.

Представим в виде таблицы результаты численных исследований значений параметров α и β характеристической функции числа заявок в ИПВ при различных

значениях параметров системы массового обслуживания MMPP|GI|1. Рассмотрим случай, когда закон обслуживания имеет вид гамма-распределения с параметрами $\alpha_{\text{обсл}}$ и $\beta_{\text{обсл}}$. Матрицы условных интенсивностей и инфинитезимальных характеристик входящего потока пусть имеют следующий вид:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix},$$

Численное исследование параметров полученного распределения

$\alpha_{\text{обсл}}$	$\beta_{\text{обсл}}$	σ	α	β
1	1	0,1	9,058	0,806
1	1	1	1,806	0,806
1	1	10	1,081	0,806
0,1	0,1	0,1	2,742	0,174
0,1	0,1	1	1,174	0,174
10	15	0,1	10,607	1,441
100	50	0,1	21,164	1,008

Таким образом, в работе была исследована математическая модель системы массового обслуживания MMPP|GI|1 с источником повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Полученная асимптотическая характеристическая функция числа заявок в источнике повторных вызовов имеет вид характеристической функции гамма-распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Моисеева Е.А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Известия ТПУ. 2013. Т. 322. № 2. С. 19–23.
2. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. V. 35. No. 2. P. 421–507.
3. Коэн Дж., Бонсма О. Граничные задачи в теории массового обслуживания: пер. с англ. А.Д. Вайнштейна. М.: Мир, 1987. 272 с.
4. Гоштони Г. Сравнение вычисленных и моделированных результатов для пучков соединительных линий при наличии повторных попыток установления связи // Материалы 8-й ИТС, Сидней, 1977. № 1. С. 1–16.
5. Элдин А. Подход к теоретическому описанию повторных попыток вызова // Ericsson Technics. 1967. Т. 23. № 3. С. 345–407.
6. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial Queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
7. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 267 p.
8. Дудин А.Н. Об одной системе с повторными вызовами и изменяемым режимом работы / ред. журн. Известия АН СССР. Техническая кибернетика. М.: 1985. 10 с. Деп. в ВИНТИ 10.01.1985, № 10293-85.
9. Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленец Ю.В. Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания: учеб. пособие. Минск: Электронная книга БГУ, 2003. 166 с.

Моисеева Екатерина Александровна
 Назаров Анатолий Андреевич
 Томский государственный университет
 E-mail: moiskate@mail.ru; nazarov.tsu@gmail.com

Поступила в редакцию 11 апреля 2013 г.

Moiseeva Ekaterina A., Nazarov Anatoly A. (Tomsk State University). **Researching of Retrial Queueing system MMPP[GI]1 by using asymptotic analysis method on heavy load condition.**

Keywords: Retrial queueing system, orbit, asymptotic analysis method, heavy load.

In the article we research the queueing system with the orbit (retrial queueing system) with MMPP input flow, which diagonal matrix of the arrival rates associated with each state is $\rho\lambda$ and generator matrix of Markov chain $n(t)$ is Q , service time of a customer is distributed by general independent law $B(x)$. The task is to obtain probability distribution for the number of calls in the orbit.

Let following notation: $i(t)$ – stochastic process describing the number of calls in the orbit, $n(t)$ – Markov chain controlling MMPP input flow, $z(t)$ – remaining service time and $k(t)$ defines a state of service.

The stochastic process with variable component number $\{1, n(t), i(t), z(t)\}$, $\{0, n(t), i(t)\}$ of the system states in time is Markov, thus the Kolmogorov system of differential equation was written for obtaining probability distribution $\{P(0, n, i, t); P(1, n, i, z, t)\}$ the RQ-system states.

The system was considered at stationary state in matrix form. The transition to the characteristic functions in the equations system was made, then the asymptotic analysis method on heavy load condition was applied.

After mathematical transformations the asymptotic characteristic function of the calls number in the orbit was obtained as: $h(u) = (1 - \frac{ju}{\beta(1-\rho)})^{-\alpha}$, so it is characteristic function of gamma-

distribution with parameters $\beta = \frac{1}{b} \left(V\lambda E + \frac{b_2}{2b^3} \right)^{-1}$, $\alpha = 1 + \frac{1}{b\sigma}\beta$, where b, b_2 are first and second

moments of service distribution law, vector V is a solution of the system $VQ = R(\frac{1}{b}I - \lambda)$. Also in the paper some numerical results of asymptotic distribution parameters researching are presented.