УДК 512.541

**А.Р. Чехлов, Мл.В. Агафонцева**

# ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ КВАДРАТАМИ КОММУТАТОРОВ ЭНДОМОРФИЗМОВ[1]

Описаны делимые группы, вполне разложимые, векторные и сепарабельные группы без кручения, квадраты коммутаторов эндоморфизмов которых центральны в кольце эндоморфизмов этих групп.

**Ключевые слова**: *кольцо эндоморфизмов, коммутатор эндоморфизмов, E-коммутант.*

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Пусть $A$ – группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов, $r(A)$ – ранг, $A_p$ – ее $p$-компоненту, а $t(A)$ – периодическую часть. Если $A$ – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип. Если $f$: $A \to B$ – гомоморфизм, то $f\,|\,H$ – ограничение $f$ на $H \subseteq A$. Если $B$, $G$ – группы и $X$ – непустое подмножество $B$, то через Hom $(B, G)X$ обозначим подгруппу в $G$, порожденную всеми подмножествами $fX$, где $f \in$ Hom $(B, G)$. Через $1_A$ обозначим тождественный автоморфизм группы $A$, $\mathbf{Z}$ – аддитивную группу целых чисел, $\mathbf{Q}$ – аддитивную группу всех рациональных чисел. $Z_{p^\infty}$ – квазициклическую $p$-группу.

Напомним, что если $R$ – кольцо и $a,b \in R$, то элемент $[a,b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов $a$ и $b$.

Статья посвящена изучению абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых удовлетворяют тождеству $[[x,y]^2,z] = 0$. Обозначим класс таких групп через $\mathrm{ZBL}_2$. Исследованию тождеств в алгебре посвящена обширная литература, см., напр., [1 – 7]. Не претендуя на полноту, отметим также статьи [8–17]. В [8] помимо прочего доказано, что некоммутативная алгебра с делением, удовлетворяющая тождеству $[[x,y]^2,z] = 0$, четырехмерна над своим центром.

В [18, 19] изучался класс $\mathrm{BL}_2$ групп $A$, таких, что $[\alpha,\beta]^2 = 0$ для любых $\alpha,\beta \in E(A)$; а в [20] изучались E-нильпотентные группы ступени $\leq 2$ – такие группы $A$, кольца эндоморфизмов которых удовлетворяют тождеству $[[x,y],z] = 0$. Как это следует из [19, лемма 1], группы из класса $\mathrm{BL}_2$ не содержат прямых слагаемых вида $B \oplus C$, где $B \cong C$, а у E-нильпотентных групп кольца эндоморфизмов нормальны [20, предложение 1.2]. Поэтому класс $\mathrm{ZBL}_2$-групп шире классов $\mathrm{BL}_2$-групп и E-нильпотентных групп ступени $\leq 2$ (см. далее теоремы 5, 7, 8). В [21–29] изучались группы из класса $\mathrm{BL}_n$ для произвольного натурального $n$ и другие (E-разрешимые, E-энгелевы, проективно разрешимые) близкие классы групп. В [30] исследовались центрально инвариантные подгруппы (т.е. подгруппы, инвариантные относительно центра группы) и коммутаторно инвариантные

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, № 14. В 37.21.0354 и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

подгруппы (т.е. такие подгруппы $H$ группы $A$, что $[\alpha,\beta]H \subseteq H$ для любых $\alpha,\beta \in E(A)$). В [31–34] изучались проективно инвариантные подгруппы, т.е. такие подгруппы $H$ группы $A$, что $\pi H \subseteq H$ для любой проекции $\pi$ группы $A$. Вопросы продолжения автоморфизмов подмодулей изучались в [35]. Близкие классы групп исследовались в [36, 37].

Подгруппу $A' = \langle [\varphi,\psi]A \mid \varphi,\psi \in E(A)\rangle$ назовем Е-*коммутантом* группы $A$. Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$. Некоторые свойства и описание Е-коммутанта ряда классов групп получены в [18 – 29].

Прямые слагаемые групп из класса $\mathrm{ZBL}_2$ также принадлежат этому классу. Поэтому в следующих трех леммах приводятся общие свойства прямых слагаемых групп из класса $\mathrm{ZBL}_2$.

**Лемма 1.** *Пусть* $A = B \oplus C$, *где* $B,C \neq 0$. *Тогда если* $A \in \mathrm{ZBL}_2$, *то* $B,C \in \mathrm{ZBL}_2$, $[\varphi,\psi](\mathrm{Hom}\,(B,C)B) = 0$, $\alpha(B') = 0$ *и* $[\mu,\nu](\mathrm{Hom}\,(C,B)C) = 0$, $\lambda(C') = 0$ *для любых* $\varphi,\psi \in E(C)$, $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(B,C)$ *и* $\mu,\nu \in E(B)$, $\lambda \in \mathrm{Hom}\,(C,B)$.

***Доказательство.*** Пусть $\pi\colon A \to B$, $\theta\colon A \to C$ – проекции, $\varphi,\psi \in E(C)$, $\lambda \in \mathrm{Hom}\,(C,B)$, а $\gamma \in \mathrm{Hom}\,(B,C)$.

Продолжим $\varphi,\psi$ до эндоморфизмов группы $A$, полагая $\varphi \mid B = \gamma$, $\psi \mid B = 0$. Тогда для $b \in B$ имеем

$$[\varphi,\psi]b = \varphi\psi b - \psi\varphi b = -\,\psi\varphi b = -\,\psi\gamma b \text{ и } [\varphi,\psi]^2 b = -\,([\varphi,\psi]\psi\gamma)b.$$

Оставив действие $\varphi$ прежним, а действие $\psi$ на $B$ определив как действие тождественного автоморфизма, получим

$$[\varphi,\psi]b = \varphi\psi b - \psi\varphi b = \gamma b - \psi\gamma b \text{ и } [\varphi,\psi]^2 b = ([\varphi,\psi]\gamma)b - ([\varphi,\psi]\psi\gamma)b.$$

Откуда ввиду того, что $[[\varphi,\psi]^2,\pi]b = [\varphi,\psi]^2 b$, приравняв к 0 полученные выше выражения для квадратов коммутаторов, имеем $([\varphi,\psi]\psi\gamma)b = 0$ и $([\varphi,\psi]\gamma)b - ([\varphi,\psi]\psi\gamma)b = 0$. Следовательно, $([\varphi,\psi]\gamma)b = 0$ и, значит, $[\varphi,\psi](\mathrm{Hom}\,(B,C)B) = 0$ в силу произвольности $\gamma \in \mathrm{Hom}\,(B,C)$ и $b \in B$.

Определим $\overline{\varphi},\overline{\psi} \in E(A)$, полагая $\overline{\varphi} \mid C = \varphi + \lambda$, $\overline{\varphi} \mid B = 1_B$, $\overline{\psi} \mid C = \psi$, $\overline{\psi} \mid B = 0$. Тогда для $c \in C$ имеем $[\overline{\varphi},\overline{\psi}]\,c = (\overline{\varphi}\overline{\psi})\,c - (\overline{\psi}\overline{\varphi})\,c = [\varphi,\psi]\,c + (\lambda\psi)\,c$. Так как $[\overline{\varphi},\overline{\psi}] \mid B = 0$, то $[\overline{\varphi},\overline{\psi}]^2 c = [\varphi,\psi]^2 c + (\lambda\psi[\varphi,\psi])\,c$. Далее $\left[\pi,[\overline{\varphi},\overline{\psi}]^2\right] c = (\pi[\varphi,\psi]^2)\,c = (\lambda\psi[\varphi,\psi])\,c = 0$. Определим теперь $\overline{\varphi},\overline{\psi}$ следующим образом: $\overline{\varphi} \mid C = \varphi + \lambda$, $\overline{\varphi} \mid B = 0$, $\overline{\psi} \mid C = \psi$, $\overline{\psi} \mid B = 1_B$. Тогда

$$\begin{aligned}[\overline{\varphi},\overline{\psi}]\,c &= (\overline{\varphi}\overline{\psi})\,c - (\overline{\psi}\overline{\varphi})\,c = (\varphi\psi)c + (\lambda\psi)c - \overline{\psi}(\varphi c + \lambda c) = \\ &= (\varphi\psi)c + (\lambda\psi)c - (\psi\varphi)c - \lambda c = [\varphi,\psi]\,c + (\lambda\psi)\,c - \lambda c.\end{aligned}$$

А так как и здесь $[\overline{\varphi},\overline{\psi}] \mid B = 0$, то

$$[\overline{\varphi},\overline{\psi}]^2 c = [\varphi,\psi]^2 c + (\lambda\psi[\varphi,\psi])\,c - (\lambda[\varphi,\psi])\,c$$

и

$$\left[\pi,[\overline{\varphi},\overline{\psi}]^2\right] c = (\lambda\psi[\varphi,\psi])\,c - (\lambda[\varphi,\psi])\,c = 0,$$

откуда из доказанного выше равенства $(\lambda\psi[\varphi,\psi])\,c = 0$ получаем $(\lambda[\varphi,\psi])\,c = 0$. Следовательно, $\lambda(C') = 0$. Ввиду симметричности прямых слагаемых $B$ и $C$ лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть* $A = B \oplus C \oplus N$. *Тогда если* $A \in \mathrm{ZBL}_2$, *то* $\beta(\mathrm{Hom}\,(B,C)B) = 0$ *для каждого* $\beta \in \mathrm{Hom}\,(C,N)$.

***Доказательство.*** Пусть $\gamma \in \mathrm{Hom}\,(B,C)$. Определим $f \in E(A)$ следующим образом: $f \mid B = \gamma$, $f \mid C = \beta$ и $f \mid N = 0$. Если теперь $b \in B$, а $\pi$: $A \to C$ – проекция, то

$$[\pi,f]b = (\pi f)b - (f\pi)b = \gamma b,\ [\pi,f]^2 b = ([\pi,f]\gamma)b = (\pi f\gamma)b - (f\pi\gamma)b = -\beta\gamma b.$$

Имеем $[[\pi,f]^2,\pi]b = -(\pi\,[\pi,f]^2)b = \beta\gamma b = 0$. Откуда следует, что $\beta(\mathrm{Hom}\,(B,C)B) = 0$.

**Лемма 3.** *Пусть* $A = B \oplus C$, *где* $\mathrm{Hom}\,(B,C) \neq 0$ *и каждый ненулевой гомоморфизм из* $\mathrm{Hom}\,(B,C)$ *является мономорфизмом, а* $B,C$ *– такие группы, что их ненулевые эндоморфизмы также являются мономорфизмами. Тогда если* $A \in \mathrm{ZBL}_2$, *то кольца* $E(B)$ *и* $E(C)$ *коммутативны.*

***Доказательство.*** Согласно лемме 1, $\alpha(B') = 0$ для каждого $0 \neq \alpha \in \mathrm{Hom}\,(B,C)$, а поскольку все такие $\alpha$ являются мономорфизмами, то $B' = 0$, т.е. кольцо $E(B)$ коммутативно. Далее, по той же лемме $\mathrm{Hom}\,(B,C)B \subseteq \ker\,[\varphi,\psi]$ для всех $\varphi,\psi \in E(C)$. А так как по условию $\mathrm{Hom}\,(B,C)B \neq 0$, то $[\varphi,\psi] = 0$. Это означает коммутативность $E(C)$.

**Лемма 4.** *Пусть* $A = \oplus_{i \in I} A_i$ $(A = \prod_{i \in I} A_i)$, *где подгруппы* $A_i$ *вполне характеристичны в* $A$. *Тогда* $A \in \mathrm{ZBL}_2$ *в том и только в том случае, когда все* $A_i \in \mathrm{ZBL}_2$.

***Доказательство.*** Очевидно.

**Теорема 5.** *Пусть* $D$ *– ненулевая делимая группа. Тогда* $D \in \mathrm{ZBL}_2$ *в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $D \cong \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ или $D \cong \mathbf{Q}$;

2) $D \cong \mathrm{Q} \oplus (\underset{p\in\Pi}{\oplus} Z_{p^\infty})$, где $\Pi$ – некоторое непустое множество простых чисел;

3) $D \cong \underset{p\in\Pi}{\oplus} (\underset{m_p}{\oplus} Z_{p^\infty})$, где $\Pi$ – некоторое непустое множество простых чисел, а $m_p = 1$ или $m_p = 2$ для каждого $p \in \Pi$.

***Доказательство.*** Делимая группа без кручения имеет вид $\underset{m}{\oplus}\mathrm{Q}$, где $m$ – некоторое кардинальное число. Поэтому необходимость п. 1) следует из леммы 2. Для $D \cong \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ кольцо $E(D)$ изоморфно кольцу матриц $M(2,\mathbf{Q})$ над полем $\mathbf{Q}$. Такое кольцо удовлетворяет условию $[[x,y]^2,z] = 0$, что доказывает п. 1) теоремы.

Если периодическая часть $t(D)$ группы $D$ отлична от 0, то $D = D_0 \oplus t(D)$, где (если $D_0 \neq 0$) $D_0 \cong \underset{m}{\oplus}\mathrm{Q}$ для некоторого кардинального числа $m$. $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Q}, Z_{p^\infty}) \neq 0$ для каждого простого числа $p$. Поэтому если $D \in \mathrm{ZBL}_2$ и $D_0 \neq 0$, то из леммы 2 следует, что $D_0 \cong \mathbf{Q}$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого простого $p$ с условием $D_p \neq 0$.

Далее, подгруппа $t(D)$ вполне инвариантна в $D$ и для группы $D$, указанной в п. 2), кольца $E(D_0)$ и $E(t(D))$ коммутативны. Для такой группы $D$ квадрат коммутатора любых ее эндоморфизмов равен 0, поэтому такая группа $D$ принадлежит классу $\mathrm{ZBL}_2$.

Каждая ненулевая $p$-компонента $D_p$ делимой группы $D$ изоморфна группе $\underset{m_p}{\oplus} Z_{p^\infty}$ для некоторого кардинального числа $m_p$. Из леммы 2 следует, что $m_p = 1$ или $m_p = 2$. Если группа $D$ периодична, то $D = \underset{p\in\Pi}{\oplus} D_p$ для некоторого множества $\Pi$ простых чисел, каждая подгруппа $D_p$ вполне инвариантна в $D$, если $m_p = 1$, то кольцо $E(D_p)$ коммутативно, если же $m_p = 2$, то $D_p \cong Z_{p^\infty} \oplus Z_{p^\infty}$ и кольцо $E(D_p)$ изоморфно кольцу матриц $M(2, \hat{Z}_p)$, где $\hat{Z}_p$ – кольцо целых $p$-адических чисел

[38, § 43, пример 3], такое кольцо удовлетворяет тождеству $[[x,y]^2,z]=0$, что доказывает п. 3) теоремы.

**Теорема 6.** *Если $0 \neq D$ – делимая часть группы $A$, $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ – группа без кручения, то $A \in \mathrm{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца.*

***Доказательство.*** Необходимость. Имеем $\mathrm{Hom}\,(B,D) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Q}, Z_{p^\infty}) \neq 0$ для каждого простого числа $p$. Поэтому из леммы 2 следует, что $D \cong \mathbf{Q}$ или $D$ – периодическая группа, каждая ненулевая $p$-компонента которой изоморфна группе $Z_{p^\infty}$, кольцо эндоморфизмов $E(D)$ такой группы $D$ коммутативно. Так как для каждого $0 \neq b \in B$ существует гомоморфизм $\varphi\colon B \to D$ со свойством $\varphi b \neq 0$, то из леммы 1 следует, что $B' = 0$, т.е. кольцо $E(B)$ коммутативно. Достаточность вытекает из того, что прямое слагаемое $D$ вполне инвариантно в $A$ и так как кольца $E(B)$ и $E(D)$ коммутативны, то квадрат любого коммутатора эндоморфизмов группы $A$ равен 0.

**Теорема 7.** *Пусть $A$ – вполне разложимая группа без кручения, не являющаяся делимой, $A = B \oplus D$, где $D$ – делимая часть группы $A$. Тогда $A \in \mathrm{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда*:

1) *если $D \neq 0$, то $D \cong \mathbf{Q}$, а $B$ – прямая сумма групп ранга* 1 *с попарно несравнимыми типами*;

2) *если $D = 0$, то $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где типы прямых слагаемых ранга* 1 *групп $A_i$ и $A_j$ не сравнимы при $i \neq j$, причем либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, где $r(B_i) = 1$, а группа $C_i$ изоморфна группе $B_i$ или является прямой суммой групп ранга* 1 *с попарно несравнимыми типами, каждый из которых больше, чем тип $t(B_i)$.*

***Доказательство.*** Необходимость следует из леммы 2, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы $A$, где $r(N_i) = 1$, невозможно условие $t(N_1) \leq t(N_2) \leq t(N_3)$. Достаточность в п. 1) следует из того, что $D$ – вполне инвариантная подгруппа в $A$, а $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца. В п. 2) $A \in \mathrm{ZBL}_2$ как прямая сумма вполне инвариантных подгрупп из $\mathrm{ZBL}_2$.

**Теорема 8.** *Пусть $A$ – сепарабельная (векторная) группа без кручения, $A = B \oplus D$, где $D$ – делимая часть группы $A$. Тогда $A \in \mathrm{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда*:

1) *если $D \neq 0$, то $D \cong \mathbf{Q}$, а $B$ – прямая сумма (прямое произведение) групп ранга* 1 *с попарно несравнимыми типами*;

2) *если $D = 0$, то $A = \oplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), типы прямых слагаемых ранга* 1 *групп $A_i$ и $A_j$ не сравнимы при различных $i$ и $j$, причем либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, а группа $C_i$ изоморфна группе $B_i$ или является сепарабельной (векторной) группой, типы прямых слагаемых ранга* 1 *которой попарно не сравнимы и каждый из них больше, чем тип $t(B_i)$.*

***Доказательство.*** Если $\Omega(A)$ – множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 сепарабельной группы $A$, то $\Omega(A)$ можно разбить на классы эквивалентности $\Omega(A) = \cup_{i \in I} \Omega_i$, где типы $s, t \in \Omega(A)$ считаются эквивалентными, если существуют $t_1,\ldots,t_n \in \Omega(A)$, такие, что типы $t_i$ и $t_{i+1}$ сравнимы для всех $i = 0,\ldots,n$ (здесь $t_0 = s$, $t_{n+1} = t$). В этом случае $A = \oplus_{i \in I} A_i$, $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и подгруппы $A_i$ вполне инвариантны в $A$, т.е. типы из $\Omega(A_i)$ и $\Omega(A_j)$ не сравнимы при $i \neq j$ [39, § 19, упр. 7].

Из этого, в частности, следует, что сепарабельные группы без кручения типы прямых слагаемых ранга 1 которых попарно несравнимы, являются вполне разложимыми группами. Для векторных групп можно использовать лемму: если η – ненулевой гомоморфизм векторной группы $V = \prod_{i \in I} R_i$ в векторную группу $W = \prod_{j \in J} S_j$ ($R_i$ и $S_j$ – группы ранга 1), то $t(R_i) \le t(S_j)$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$ [38, лемма 96.1]. С учетом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично теореме 7. В [40] исследовались слабо транзитивные E-энгелевы группы без кручения.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Адян С.И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. *Бахтурин Ю.А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
3. *Кострикин А.И.* Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.
4. *Бахтурин Ю.А., Ольшанский А.Ю.* Тождества // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фунд. направления. Т. 18. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1987. С. 117–240.
5. *Размыслов Ю.П.* Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.
6. *Rowen L.H.* Polynomial Identities in Ring Theory. New York: Acad. Press, 1980.
7. *Drensky V.* Free Algebras and *PI*-Algebras. Springer, 2000.
8. *Hall M.* Projective planes // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. V. 54. P. 229–277.
9. *Kaplansky I.* Rings with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. P. 575–580.
10. *Мальцев А.И.* Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Мат. сб. 1950. Т. 26. С. 19–23.
11. *Ширшов А.И.* О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. 1957. Т. 43. № 2. С. 277–283.
12. *Ольшанский А.Ю.* О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 2. С. 376–384.
13. *Braun A.* The nilpotency of the radical in a finitely generated *PI*-rings // J. Algebra. 1984. V. 89. P. 375–396.
14. *Шеврин Л.Н., Волков М.В.* Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3– 47.
15. *Белов А.Я.* Ассоциативных *PI*-алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 6. С. 1239–1254.
16. *Бейдар К.И., Михалев А.В., Чеботарь М.А.* Функциональные тождества в кольцах и их приложения // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 3–30.
17. *Адян С.И.* Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы // УМН. 2010. Т. 65. № 5. С. 5–60.
18. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
19. *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78–84.
20. *Чехлов А.Р.* E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 59–71.
21. *Чехлов А.Р.* Некоторые примеры E-разрешимых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 69–76.
22. *Чехлов А.Р.* E-разрешимые модули // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 7. С. 221–236.
23. *Чехлов А.Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп, 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 55–60.
24. *Чехлов А.Р.* E-энгелевы абелевы группы ступени 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 54–60.

25. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах нильгрупп // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 297–304.
26. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17. № 8. С. 183–219.
27. *Чехлов А.Р.* О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 2. С. 451–464.
28. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
29. *Чехлов А.Р.* О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1157–1165.
30. *Чехлов А.Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85–99.
31. *Чехлов А.Р.* Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76–82.
32. *Чехлов А.Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211–218.
33. *Чехлов А.Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31–36.
34. *Чехлов А.Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 942–953.
35. *Туганбаев А.А.* Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискр матем. 2013. Т. 25. № 1. С. 144–151.
36. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // 2001. Матем. заметки. Т. 69. № 6. С. 944–949.
37. *Danchev P.V.* Weakly $\aleph_1$-separable quasi-complete abelian $p$-groups are bounded // 2009. Владикавк. матем. журн. Т. 11. № 3. С. 8–9.
38. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
39. *Крылов П.А.*, *Михалев А.В.*, *Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.
40. *Чехлов А.Р.* Слабо транзитивные E-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 616–623.

Статья поступила 15.04.2013 г.

*Chekhlov A.R.*, *Agafontseva Ml.V.* ON ABELIAN GROUPS WITH CENTRAL SQUARES OF COMMUTATORS OF ENDOMORPHISMS. We describe divisible, completely decomposable, vector, and separable torsion free groups for which the squares of commutators of their endomorphisms are central in endomorphism rings of these groups.

Keywords: endomorphism ring, commutator of endomorphisms, E-commutant.

*CHEKHLOV Andrey Rostislavovich* (Tomsk State University)
E-mail: cheklov@math.tsu.ru

*AGAFONTSEVA Mladena Vladimirovna* (Tomsk State University)
E-mail: mladenka@mail.ru