ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 5(25)

УДК 519.216.3

Т.В. Емельянова, В.В. Конев

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ НЕПРЕРЫВНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Для устойчивого процесса авторегрессии с непрерывным временем предлагается последовательная процедура оценивания неизвестных параметров, использующая специальное правило остановки наблюдений. Процедура строится на основе классических оценок по методу наименьших квадратов, но в отличие от них обеспечивает контроль за среднеквадратической точностью оценок. Получены формулы для асимптотической длительности наблюдений при увеличении среднеквадратической точности оценок. Результаты могут найти применение в задачах идентификации динамических систем, подверженных действию шумов, адаптивного прогнозирования, а также для оценивания параметров спектров гауссовских процессов с непрерывным временем.

Ключевые слова: *гарантированная среднеквадратическая точность*, *авторегрессионный процесс*, *гауссовский процесс с рациональной плотностью*, *последовательное оценивание*, *момент остановки.*

В задачах обработки временных рядов, идентификации, прогнозирования и управления в динамических системах широко используются модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Параметры этих уравнений во многих случаях неизвестны, и решению основных задач фильтрации, прогнозирования, управления обычно предшествует этап идентификации, заключающийся в оценивании неизвестных параметров. Для решения задач идентификации параметров стохастических динамических систем разработаны различные эффективные методы: максимального правдоподобия, стохастической аппроксимации, наименьших квадратов и др. (см., например, [1–4]). Использование этих методов усложняется, если получаемые оценки являются существенно нелинейными функциями и поддаются исследованию лишь в асимптотике при неограниченной длительности наблюдений. Однако в практических задачах объем доступных данных всегда конечен и желательно знать качество оценок, вычисленных по наблюдениям на ограниченном временном интервале. Для решения задач в неасимптотической постановке требуются методы, позволяющие контролировать точность оценок при малых и умеренных объемах данных. Один из подходов к решению задач идентификации динамических систем в неасимптотической постановке связан с использованием последовательного анализа, который характеризуется тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее и определяется специальными правилами накопления данных.

Пусть наблюдаемый p-мерный процесс $X_t = (X_1(t),...,X_p(t))'$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t, \tag{1}$$

в которой A и B – квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, причем все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, W_t – стандартный p-мерный процесс броуновского движения. Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \|a_{ij}\|$ по наблюдениям процесса X_t. К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p-го порядка ($AP(p)$)

$$dx_t^{p-1} = \left(\theta_1 x_t^{p-1} + \ldots + \theta_p x_t\right) dt + \sigma dw_t \qquad (2)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2}{|Q(i\lambda)|^2}$.

Предполагается, что неизвестные параметры θ_i, $i = \overline{1, p}$, таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \ldots - \theta_p$ имеют отрицательные вещественные части. Процесс (2) представляется в виде (1), если положить

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_t^{p-1} \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \theta_p & \theta_{p-1} & \ldots & \ldots & \theta_1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \sigma \end{pmatrix}; \ \sigma > 0. \qquad (3)$$

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d \langle X_t \rangle_p , \qquad (4)$$

где $\langle a \rangle_i$ обозначает i-ю координату вектора-столбца $a = (a_1, \ldots, a_p)'$;

$$M_T = \int_0^T X_s X_s' ds \qquad (5)$$

– выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1} – обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1}=0$ – в противном случае. Асимптотические свойства вектора оценок $\hat{\theta}_T$ по методам максимального правдоподобия и наименьших квадратов изучались в ряде работ [1, 5, 6 и др.]; они являются сильно состоятельными и асимптотически нормальными. В прикладных задачах использование асимптотических свойств оценок обычно основывается на предположении, что эти свойства сохраняются для малых и умеренных объемов данных. Однако поведение оценок при малых и умеренных длительностях наблюдений может существенно отличаться от асимптотического, и это может привести к неточным выводам при принятии решений. Изучение задач оценивания параметров диффузионных процессов в неасимптотической подстановке восходит к работам Новикова, Липцера и Ширяева [3, 7, 8], которые предложили последовательный план для оценивания неизвестного параметра диффузионного процесса

$$dx_t = \theta x_t dt + \sigma dw_t ,$$

а также двумерного процесса специального вида с двумя неизвестными параметрами. В этих работах было доказано, что последовательная оценка имеет преимущества перед классической оценкой МНК: она является несмещенной и гауссовской [см. подробнее 7– 9 и др.]

Этот метод, однако, оказывается непригодным в более общей ситуации, когда число неизвестных параметров превышает размерность наблюдаемого процесса. В [10] впервые была разработана общая последовательная процедура, позволяющая получать гарантированные оценки с любой заданной среднеквадратической точностью для авторегрессии с дискретным и непрерывным временем любого порядка по конечной реализации процесса. Предложенная в [10] процедура позволяет оценить неизвестные параметры с любой заданной среднеквадратической точностью и обладает хорошими асимптотическими свойствами. Эта процедура может оказаться, однако, достаточно сложной для практической реализации в случае многих неизвестных параметров, поскольку она включает два этапа и требует построения целой системы оценок МНК, вычисляемых в специальные моменты времени. На первом этапе строится последовательность модифицированных оценок МНК, каждая со своим правилом прекращения наблюдений, на втором этапе проводится процедура сглаживания оценок первого этапа, причем при сглаживании используется случайное число оценок, зависящее от требуемой точности оценивания неизвестных параметров.

Цель данной работы – предложить одноэтапную процедуру оценивания, использующую специальное правило остановки наблюдений, которая позволяет контролировать среднеквадратическую точность оценок. Эта процедура, как и в [10], является последовательной модификацией оценки МНК и может использоваться при наличии некоторой априорной информации о параметрах.

1. Построение последовательной процедуры

При построении последовательного плана будет использоваться следующая лемма, дающая оценку нормы уклонения оценки (4) от ее истинного значения.

Лемма 1. Пусть матрица M_T в (5) невырождена. Тогда квадрат нормы уклонения оценки (4) удовлетворяет неравенству

$$\left\|\hat{\theta}_T - \theta\right\|^2 \le \left\|M_T^{-2}\right\| \cdot \left\|m_T\right\|^2, \tag{6}$$

где $m_T = \int_0^T X_s dW_s$.

Доказательство. Пусть Q_T – ортогональная матрица размера $p \times p$, приводящая матрицу M_T к диагональной форме, т. е.

$$Q_T \Lambda_T Q_T' = M_T , \tag{7}$$

где $\Lambda_T = \mathrm{diag}\left(\lambda_1(M_T),\ldots,\lambda_p(M_T)\right)$, $\lambda_i(M)$ – собственные числа матрицы M, занумерованные в порядке убывания: $\lambda_1(M) \ge \lambda_2(M) \ge \ldots \ge \lambda_p(M)$.

Подставляя (1) в (4) и используя (7), получаем

$$Q_T \Lambda_T Q_T'\left(\hat{\theta} - \theta\right) = m_T .$$

Поскольку транспонированная к ортогональной матрице совпадает с обратной к ней, то это равенство можно переписать в виде

$$\Lambda_T Q_T{}'\left(\hat{\theta}_T - \theta\right) = Q_T{}' m_T$$

или, в координатной форме,

$$\lambda_i\left(M_T\right)\left\langle Q_T{}'\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)\right\rangle_i = \left\langle Q_T{}' m_T\right\rangle,\ i = \overline{1,p}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, просуммировав по i и применив неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\sum_{i=1}^{p}\left\langle Q_T{}'\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)\right\rangle_i = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{-2}\left(M_T\right)\left\langle Q_T{}' m_T\right\rangle_i^2 \le \left\|Q_T{}' m_T\right\|\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{-2}\left(M_T\right)\left|\left\langle Q_T{}' m_T\right\rangle_i\right| \le$$

$$\left\|Q_T{}' m_T\right\|\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{-4}\left(M_T\right)}\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left\langle Q_T{}' m_T\right\rangle_i^2}.$$

Таким образом,

$$\left\|Q_T{}'\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)\right\|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{-4}\left(M_T\right)\right)^{1/2}\left\|Q_T{}' m_T\right\|^2.$$

Так как матрица Q_T ортогональна, то

$$\left\|\hat{\theta}_T - \theta\right\|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{-4}\left(M_T\right)\right)^{1/2}\left\|m_T\right\|^2.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{-4}\left(M_T\right) = \operatorname{tr}\Lambda_T^{-4} = \operatorname{tr}M_T^{-4} = \left\|M_T^{-2}\right\|^2,$$

приходим к утверждению леммы. Лемма 1 доказана.

Как будет показано ниже (см. лемму 3), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{M_T}{T} = F, \tag{8}$$

причем матрица F является положительно определенной. Поэтому отсюда следует, что множитель $\left\|M_T^{-2}\right\|$ в правой части (6) монотонно убывает с ростом T, причем $\lim\limits_{T\to\infty}\left\|M_T^{-2}\right\| = 0$. Для контроля среднеквадратической точности будем использовать следующий план оценивания.

Пусть $H > 0$. Определим длительность наблюдений процесса и оценку неизвестных параметров по формулам

$$\tau = \tau(H) = \inf\left\{\tau > 0 : \left\|M_T^{-2}\right\|^{1/2} \le \frac{1}{H}\right\}; \tag{9}$$

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1}\cdot\int_0^{\tau(H)} X_s d < X_t >_p. \tag{10}$$

Используя этот план, получим верхнюю границу для среднеквадратической точности оценок.

Лемма 2. Пусть матрица (5) удовлетворяет условию (8) Тогда для любого $H > 0$ оценка $\theta^*(H)$, определенная в (9) и (10), удовлетворяет неравенству

$$E_\theta \left\| \theta^*(H) - \theta \right\|^2 \le \frac{E_\theta \mathrm{tr} M_{\tau(H)}}{H^2}. \tag{11}$$

Доказательство. Заменяя в лемме 1 T на $\tau(H)$, получим

$$\left\| \theta^*(H) - \theta \right\|^2 \le \left\| M_{\tau(H)}^{-2} \right\| \cdot \left\| \int_0^{\tau(H)} X_s dW_s \right\|^2.$$

Учитывая (6), имеем $E_\theta \left\| \theta^*(H) - \theta \right\|^2 \le \frac{1}{H^2} E_\theta \left\| \int_0^{\tau(H)} X_s dW_s \right\|^2$. Переходя к усеченным моментам и используя свойства стохастического интеграла, получаем

$$\frac{1}{H^2} \sum_{l=1}^{p} E_\theta \int_0^{\tau(H)} \langle X_t \rangle_l^2 \, dt = \frac{1}{H^2} E_\theta tr M_{\tau(H)}.$$

Отсюда приходим к (11). Лемма 2 доказана.

2. Свойства выборочной информационной матрицы Фишера

Для изучения свойств последовательного плана (9), (10) для процесса (2) нам потребуется установить некоторые свойства выборочной информационной матрицы Фишера. Наложим дополнительные условия на возможные значения параметра процесса (1).

Будем предполагать, что значения параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)'$ таковы, что все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля известной отрицательной постоянной γ, то есть $\max_{1 \le i \le p} \mathrm{Re}\, \lambda_i(A(\theta)) < -\gamma < 0$.

Обозначим это множество

$$\Lambda_\gamma = \left\{ \theta \in R^p : \max_{1 \le i \le p} \mathrm{Re}\, \lambda_i(A(\theta)) < -\gamma \right\}. \tag{12}$$

Пусть $K \subset \Lambda_\gamma$ – компакт.

Лемма 3. Пусть в уравнении (1) $E\left\| X_0 \right\|^4 < +\infty$. Тогда матрица (5) удовлетворяет предельному соотношению $P_\theta - \lim_{t \to \infty} \frac{M_T}{T} = F$**,** где F – положительно определенная матрица, являющаяся единственным решением уравнения

$$FA' + AF' + BB' = 0, \tag{13}$$

где $F = \int_0^\infty e^{As} BB' e^{A's} ds$.

Доказательство. Заметим, что матрица F в (13) является положительно определенной (см., лемму 1 в [11]). По формуле Ито имеем

$$d\left(XX_T'\right) = X_T X_T' A' dt + X_T \left(dW_T\right)' B' + AX_T X_T' dt + BdW_T X_T' + BB' dt.$$

Переходя в этом равенстве к интегральному виду и учитывая, что

$$M_T = \int_0^T X_s X_s' ds ,$$

получим
$$M_T A' + AM_T' + BB't + \xi_T = 0 , \tag{14}$$

где
$$\xi_T = X_0 X_0^T + \int_0^T X_s (dW_s)' B' + B\int_0^T (dW_s)' X_s' - X_T X_T' . \tag{15}$$

Разделив обе части равенства (14) на T и учитывая (13), получим

$$\left(\frac{M_T}{T} - F\right) A' + A\left(\frac{M_T}{T} - F\right) + \frac{\xi_T}{T} = 0 . \tag{16}$$

Разрешим это уравнение относительно матрицы $\frac{M_T}{T} - F$. Так как матрица A устойчива, то решение уравнения единственно и имеет вид (см., например, [12, с. 212])

$$\frac{M_T}{T} - F = \int_0^\infty e^{As} \frac{\xi_T}{T} e^{A's} ds .$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| \le \left\|\int_0^\infty e^{As} e^{A's} ds\right\| \left\|\frac{\xi_T}{T}\right\| = \frac{c_\gamma}{T}\|\xi_T\|, \text{ где } c_\gamma = \sup_{\theta\in\Lambda_\gamma}\left\|\int_0^\infty e^{As} e^{A's} ds\right\|, \tag{17}$$

из которой следует, что

$$E_\theta\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\|^2 \le c_\gamma^2 E_\theta \left\|\frac{\xi_T}{T}\right\|^2 . \tag{18}$$

Из представления (15) для ξ_T, проводя несложные арифметические преобразования, получаем

$$E_\theta\left\|\frac{\xi_T}{T}\right\|^2 \le 4\left(\frac{E_\theta \|X_0 X_0'\|^2}{T^2} + \frac{E_\theta \|X_T X_T'\|^2}{T^2}\right) +$$

$$+\frac{4}{T^2} E_\theta \left\|\int_0^T X_s (dW_s)' B'\right\|^2 + \frac{4}{T^2} E_\theta \left\|B\int_0^T (dW_s) X_s'\right\|^2 . \tag{19}$$

Оценим сверху второе слагаемое в правой части неравенства (19). Имеем

$$\frac{E_\theta \|X_T X_T'\|}{T^2} = \frac{1}{T^2} E_\theta \left(\operatorname{tr}(X_T X_T') \cdot (X_T X_T')'\right) =$$

$$= \frac{1}{T^2} \operatorname{tr} E_\theta \left(\int_0^T e^{A(T-s)} B dW_s\right)\left(\int_0^T e^{A(T-s)} B dW_s\right)' = \frac{1}{T^2} \operatorname{tr}\int_0^T e^{A(T-s)} BB' \left(e^{A(T-s)}\right)' ds =$$

$$= \frac{\sigma^2}{T^2} \operatorname{tr}\left(\int_0^T e^{A(T-s)} \left(e^{A(T-s)}\right)' ds\right) = \sigma^2 \int_0^T \left\|e^{A(T-s)}\right\|^2 ds. \tag{20}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если $\max\limits_{1\le i\le p}\mathrm{Re}\lambda_i(A)<-\gamma<0$, то $\left\|e^{(T-s)A}\right\|\le ce^{-\gamma(T-s)}$. Отсюда и из (20) следует, что

$$\frac{1}{T^2}E_\theta\|X_T X_T{}'\|^2\le\sigma^2c^2\int_0^T e^{-2\gamma(T-s)}ds\le\frac{c^2\sigma^2}{T^2}\cdot\frac{1}{2\gamma}\underset{T\to\infty}{\to}0. \qquad (21)$$

Далее получаем

$$\frac{1}{T^2}E_\theta\left\|\int_0^T X_s\,(dW_s)'B'\right\|^2=\frac{1}{T^2}\sum_{k=1}^{p}\sigma^2E_\theta\int_0^T\langle X_s\rangle_p^2\,ds\le\frac{1}{T^2}p\,\sigma^2E_\theta\int_0^T\|X_s\|^2\,ds\le$$

$$\le\frac{p\sigma^2}{T^2}\int_0^T\sqrt{E_\theta\|X_s\|^4\,ds}\le\frac{\tilde c}{T},$$

где $\tilde c$ – некоторая постоянная. Аналогично оценивается последнее слагаемое в (19). Поскольку первое слагаемое в (19) стремится к нулю, то $\lim\limits_{T\to\infty}E_\theta\left\|\frac{\xi_T}{T}\right\|^2=0$. Отсюда и из (17) следует требуемое предельное соотношение. Лемма 3 доказана.

Оценим скорость убывания с ростом T четвертого момента нормы уклонения отношения $M_T\,/\,T$ от предельной матрицы F.

Лемма 4. Пусть начальное условие в уравнении (2) таково, что $\sup\limits_{\theta\in\Lambda_\gamma}E_\theta\|X_0\|^8<+\infty$, где область Λ_γ определена в (12). Тогда для любого компакта $K\subset\Lambda_\gamma$ справедлива оценка

$$\sup_{\theta\in K}E_\theta\left\|\frac{M_T}{T}-F\right\|^4\le\frac{L}{T^2}, \qquad (22)$$

где L – некоторая постоянная.

Доказательство. Исходя из (17), (18) и проводя несложные арифметические преобразования, получим

$$E_\theta\left\|\frac{M_T}{T}-F\right\|^4\le C^4\,4^4\,E_\theta\left(\frac{\|X_0X_0{}'\|^4}{T^4}+\frac{\|X_TX_T{}'\|^4}{T^4}+2\frac{\left\|\int_0^T X_s\,(dW_s)'B'\right\|^4}{T^4}\right). \qquad (23)$$

По условию леммы для всех $\theta\in K$ имеем $\sup\limits_{\theta\in K}\frac{E_\theta\|X_0X_0{}'\|^4}{T^4}\le\frac{C_1}{T^4}$. Для оценки математического ожидания второго слагаемого используем лемму 1.1.1 из [13], согласно которой X_t удовлетворяет неравенству

$$E\|X_T\|^{2m}\le(2m-1)!!\mu^{2m}\left(\frac{1-e^{-2\gamma T}}{2\gamma}\right)^m$$

для всякого $t\in R_+$, где μ – некоторая постоянная. Поэтому

$$\frac{E_\theta \left\| X_T X_T' \right\|^4}{T^4} = \frac{E_\theta \left\| X_T \right\|^8}{T^4} \le 105\sigma^8 \left(\frac{1-e^{-2\gamma T}}{2\gamma} \right)^4 \frac{1}{T^4} = \frac{C_2}{T^4}. \tag{24}$$

Заметим, что последнее слагаемое допускает следующую оценку:

$$\frac{E_\theta \left\| \int_0^T X_s \left(dW_s \right)' B' \right\|^4}{T^4} \le \frac{1}{T^4} p \sum_{k=1}^{p} E_\theta \left(\int_0^T \langle X_s \rangle_k \, dW_p \right)^4.$$

Используя известное свойство стохастических интегралов (см., например, [3])

$$E \left(\int_0^T f\left(s,\omega\right) dW_s \right)^{2m} \le \left[m\left(2m-1\right) \right]^m T^{m-1} \int_0^T Ef^{2m}\left(s,\omega\right) ds, \tag{25}$$

получаем

$$\frac{E_\theta \left\| \int_0^T X_s \left(dW_s \right)' B' \right\|^4}{T^4} \le \frac{108\sigma^8}{T^2} p^2 \left(\frac{1-e^{-2\gamma T}}{2\gamma} \right)^2 = \frac{C_3}{T^2}. \tag{26}$$

Отсюда и из (23), (24) приходим к требуемой оценке. Лемма 4 доказана.

Следствие. Из леммы 4 имеем $P\left(\left\| \frac{M_n}{n} - F \right\| \ge \varepsilon \right) \le \frac{E \left\| \frac{M_n}{n} - F \right\|^4}{\varepsilon^4} \le \frac{L}{\varepsilon^2 n^2}$. Отсюда и из леммы Бореля – Кантелли получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = F$ п.н.

Лемма 5. Для всякого $H > 0$ справедливо неравенство

$$E_\theta \operatorname{tr} M_{\tau(H)} \le \operatorname{tr} F \cdot E_\theta \tau\left(H\right) + \int_0^\infty \operatorname{tr}\left(e^{As} E_\theta X_0 X_0' e^{A's} \right) ds. \tag{27}$$

Доказательство. Используя рассуждения из доказательства леммы 3, имеем

$$M_T - TF = \int_0^\infty e^{As} \xi_s e^{A's} ds =$$

$$= \int_0^\infty e^{As} \left(X_0 X_0' - X_T X_T' + \int_0^T X_s \left(dW_s \right)' B' + B \int_0^T dW_s X_s' \right) e^{A's} ds.$$

Заменяя T на τ и учитывая, что математические ожидания третьего и четвертого слагаемых в правой части этого равенства равны нулю, получаем

$$E_\theta M_\tau - F E_\theta \tau = \int_0^\infty e^{As} E_\theta \left(X_0 X_0' \right) e^{A's} ds - \int_0^\infty e^{As} E_\theta \left(X_T X_T' \right) e^{A's} ds.$$

Поэтому $$E_\theta \operatorname{tr} M_\tau \le \operatorname{tr} F \cdot E_\theta \tau + \int_0^\infty \operatorname{tr}\left(e^{As} E_\theta \left(X_0 X_0' \right) e^{A's} \right) ds.$$

Лемма 5 доказана.

Асимптотическое поведение средней длительности процедуры дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\tau(H)$ определяется формулой (9) и выполнены условия леммы 4. Тогда для любого компакта $K \subset \Lambda_\gamma$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{\theta\in K} \left| E_\theta \frac{\tau(H)}{H} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| = 0 .$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\lim\limits_{H\to\infty} \sup\limits_{\theta\in K} E_\theta \dfrac{\tau(H)}{H} < +\infty$. По определению $\tau(H)$ имеем

$$E_\theta \tau(H) = \int_0^\infty P_\theta(\tau(H) > T)\, dT = \int_0^\infty P_\theta\left(\left\| M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{H} \right) dT .$$

Выбирая $\delta > 0$, такое, что

$$\sup_{\theta\in K} \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2\delta}, \tag{28}$$

получаем оценку

$$E_\theta \tau(H) \le \int_0^\infty \chi(T\delta < H)\, dT + \int_{\frac{H}{\delta}}^\infty P_\theta\left(\left\| T^2 M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) dT .$$

Для подынтегральной функции во втором интеграле имеем оценку

$$P_\theta\left(\left\| T^2 M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) \le P_\theta\left(\left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2\delta} \right) + P_\theta\left(\left| \left\| T^2 M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| > \frac{1}{2\delta} \right) \le$$

$$\le P_\theta\left(\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| \le \eta, \left| \left\| T^2 M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| > \frac{1}{2\delta} \right) + P_\theta\left(\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| > \eta \right), \ \theta \in K. \tag{29}$$

Поскольку $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{M_T}{T} = F$ п.н. и функция $\left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}}$ равномерно непрерывна по θ на компакте K, то для $\Delta < \dfrac{1}{2\delta}$ найдутся такие $T_0 > 0$ и $\eta > 0$, что при $T > T_0$, если $\left\| \dfrac{M_T}{T} - F \right\| < \eta$, то $\left| \left\| T^2 M^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} - \left\| F^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \right| < \Delta$, поэтому первое слагаемое в правой части (29) равно нулю и неравенство (29) принимает вид

$$P_\theta\left(\left\| T^2 M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{\delta} \right) \le P_\theta\left(\left\| \frac{M_T}{T} - F \right\| > \eta \right) \le \frac{1}{\eta^4} E_\theta \left\| \frac{M_T}{T} - F \right\|^4 . \tag{30}$$

Используя лемму 4, получаем требуемую асимптотическую равномерную ограниченность величины $E_\theta \dfrac{\tau(H)}{H}$. Далее имеем

$$\left|E_\theta \frac{\tau(H)}{H} - \left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}}\right| = \left|E_\theta \left\|\left(\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)}\right)^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} - \left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}}\right| \le$$

$$\le \Delta + E_\theta\left(\frac{\tau(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F\right\| \ge \eta\right)\right) + \left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} \cdot P_\theta\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F\right\| \ge \eta\right).$$

Покажем, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{H\to\infty} \sup_{\theta\in K} P_\theta\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F\right\| \ge \eta\right) = 0. \tag{31}$$

Имеем

$$P_\theta\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F\right\| \ge \eta\right) \le P_\theta\left(\tau(H) < m\right) + \sum_{k=m}^{\infty} P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| \ge \eta\right). \tag{32}$$

Рассмотрим k-й член ряда в правой части (32). Имеем

$$P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| \ge \eta\right) \le$$

$$\le P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\frac{\left\|X_T X_T{}'\right\|}{T} > \frac{\tilde\eta}{4}\right) + 2P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\frac{\left\|\int_0^T X_s\left(dW_s\right)' B'\right\|}{T} > \frac{\tilde\eta}{4}\right) +$$

$$+P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\frac{\left\|X_0 X_0{}'\right\|}{T} > \frac{\tilde\eta}{4}\right) = p_1(k) + 2p_2(k) + p_3(k),\ \tilde\eta = \frac{\eta}{c_\gamma}, \tag{33}$$

где c_γ определено в (17).

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства. Используя известное неравенство для неотрицательных субмартингалов (см., например, [3])

$$E\left(\sup_{n\le N} X_n\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p EX_N^p \tag{34}$$

и лемму (1.1.1) из [13], получим

$$p_1(k) = P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\frac{\left\|X_T X_T{}'\right\|}{T} > \frac{\tilde\eta}{4}\right) \le \left(\frac{4}{\tilde\eta}\right)^2 \frac{1}{k^2} E_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\left\|X_T X_T{}'\right\|^2\right)$$

$$\le \left(\frac{4}{\tilde\eta}\right)^2 \frac{1}{k^2} E_\theta \sup_{k\le T<k+1}\left\|X_T\right\|^4 \le \frac{l_1(\gamma)}{k^2},\ l_1(\gamma) = \left(\frac{4}{\tilde\eta}\right)^2 \frac{64\sigma^4}{9}\left(\frac{1-e^{-2\gamma(k+1)}}{2\gamma}\right)^2. \tag{35}$$

Так как процесс $\left\|\int_0^T X_s\left(dW_s\right)' B'\right\|^2$, $T \ge 0$, является неотрицательным субмартингалом относительно фильтрации $F = \left(F_t\right)_{t\ge0}$, $F_t = \sigma\left(W_s, s\ge 0\right)$, порожденной винеровским процессом, то второе слагаемое допускает следующую оценку:

$$p_2(k) = P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1} \frac{\left\|\int_0^T X_s (dW_s)' B'\right\|}{T} > \frac{\tilde\eta}{4}\right) \le$$

$$\le \frac{4^4}{(\tilde\eta k)^4} \cdot E_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\left\|\int_0^T X_s (dW_s)' B'\right\|\right)^4 \le \frac{l_2(\gamma)}{k^4} E_\theta\left(\sum_{j=1}^p \left(\int_0^{k+1} \langle X_s\rangle_j \, dW_p(s)\right)^2\right)^2 .$$

Используя неравенства (34) , (25) и лемму (1.1.1) из [13], получаем, что

$$P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1} \frac{\left\|\int_0^T X_s (dW_s)' B'\right\|}{T} > \frac{\tilde\eta}{4}\right) \le \frac{l_3(\gamma)}{k^4}\cdot(k+1)\int_0^{k+1} E_\theta \|X_s\|^4 \, ds .$$

Таким образом,

$$p_2(k) \le \frac{(k+1)^2}{k^4} l_4(\gamma) . \tag{36}$$

По условию теоремы для последнего слагаемого в (33) имеем оценку

$$p_3(k) = P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1} \frac{\|X_0 X_0'\|}{T}\right) \le \frac{E_\theta \|X_0\|^4}{k^2} = \frac{l_5}{k^2} . \tag{37}$$

Из (35) – (37) имеем оценку для ряда в (32)

$$\sum_{k=m}^{\infty} P_\theta\left(\sup_{k\le T<k+1}\left\|\frac{M_T}{T} - F\right\| \ge \eta\right) \le l \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2} . \tag{38}$$

Первое слагаемое в (32) допускает оценку

$$P_\theta(\tau(H) < m) = P_\theta\left(\frac{1}{\lambda_1^4(M_m)} + \ldots + \frac{1}{\lambda_p^4(M_m)} \le \frac{1}{H^4}\right) \le P_\theta(\lambda_1(M_m) \ge H) \le$$

$$P_\theta(\operatorname{tr} M_m \ge H) = P_\theta\left(\int_0^m \operatorname{tr}(X_s X_s')\, ds \ge H\right) = P_\theta\left(\int_0^m \|X_s\|^2 \, ds \ge H\right) \le$$

$$\le \frac{1}{H} E_\theta\left(\int_0^m \|X_s\|^2 \, ds\right) \le \frac{1}{H}\left(\frac{\mu^2}{2\gamma}\left(m + \frac{1}{2\gamma}\left(e^{-2\gamma m} - 1\right)\right)\right) . \tag{39}$$

Подставляя эту оценку и оценку (38) в (32), получаем

$$\sup_{\theta\in K}\left(P_\theta\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)} - F\right\| \ge \eta\right) \le \frac{1}{H}\left(\frac{\mu^2}{2\gamma}\left(m + \frac{1}{2\gamma}\left(e^{-2\gamma m} - 1\right)\right)\right) + l \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Переходя к пределу при $H \to \infty$, затем при $m \to \infty$, приходим к (31). Учитывая лемму (1.1.1) из [13], получим

$$P_\theta(\tau(H) < m) \le \frac{1}{H}\left(\frac{\mu^2}{2\gamma}\left(m + \frac{1}{2\gamma}\left(e^{-2\gamma m} - 1\right)\right)\right) \to 0 .$$

Остается убедиться в том, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{H\to\infty}\sup_{\theta\in K} E_\theta\left(\frac{\tau(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)}-F\right\|\ge\eta\right)\right)=0\,. \tag{40}$$

Рассмотрим

$$E_\theta\frac{\tau(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)}-F\right\|\ge\eta\right)=E_\theta\frac{\tau(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)}-F\right\|\ge\eta\right)\chi(\tau(H)<m)+$$

$$+E_\theta\frac{\tau(H)}{H}\chi\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)}-F\right\|\ge\eta\right)\chi(\tau(H)\ge m)\le$$

$$\le\frac{m}{H}P_\theta\left(\left\|\frac{M_{\tau(H)}}{\tau(H)}-F\right\|\ge\eta\right)+E_\theta\frac{\tau(H)}{H}\chi(\tau(H)\ge m)\,.$$

Выбирая m из условия $m>\dfrac{H}{\delta}$ с δ, удовлетворяющим (28), имеем

$$E(\tau(H)\chi(\tau(H)\ge m))=\int_m^\infty P_\theta(\tau(H)\ge T)\,dT=\int_m^\infty P_\theta\left(\left\|T^2M_T^{-2}\right\|^{\frac12}>\frac{1}{\delta}\right)dT\,;$$

отсюда и из (30) получаем требуемое. Теорема 1 доказана.

Найдем верхнюю границу для среднеквадратической точности оценки вектора неизвестных параметров $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p)'$ в уравнении (2) с помощью последовательного плана (9), (10).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого компактного множества $K\subset\Lambda_\gamma$

$$\sup_{\theta\in K}E_\theta\left(\left\|\theta^*(H)-\theta\right\|^2\right)\le\frac{a_K}{H}(1+o(1))\,,$$

где $$a_k=\sup_{\theta\in K}\varphi(\theta),\ \varphi(\theta)=\operatorname{tr}F\left\|F^{-2}\right\|^{\frac12},$$ где $o(1)\to0$ при $H\to\infty$. (41)

Доказательство. Используя оценки (11) и (27) из лемм 2 и 5, приходим к неравенству

$$E_\theta\left(\left\|\theta^*(H)-\theta\right\|^2\right)\le\frac{1}{H^2}\left(\operatorname{tr}F\cdot E_\theta\tau+\int_0^\infty\operatorname{tr}\left(e^{As}E_\theta(X_0X_0{}')e^{A's}\right)ds\right). \tag{42}$$

В силу теоремы 1 отсюда следует неравенство (41). Теорема 2 доказана.

Пример. Применим полученные результаты к процессу $AP(2)$ с неизвестными параметрами $\theta=(\theta_1,\theta_2)$

$$d\dot x_t=(\theta_1\dot x_t+\theta_2x_t)dt+\sigma dw_t\,. \tag{43}$$

Этот процесс в матричной форме имеет вид

$$dX_t=AX_t+BdW_t\,,$$

где $$X_t=\begin{pmatrix}x_t\\ \dot x_t\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}0&1\\ \theta_2&\theta_2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&\sigma\end{pmatrix};$$

W_t – стандартный двумерный винеровский процесс, причем $\langle W_t\rangle_2=w_t$. Область устойчивости Λ_γ процесса (43) задается равенством (см. рис. 1)

$$\Lambda_\gamma = \left\{(\theta_1, \theta_2): \theta_2 < \frac{\gamma}{2}\theta_1 + \gamma^2, \theta_1 < 0\right\}, \gamma > 0 .$$

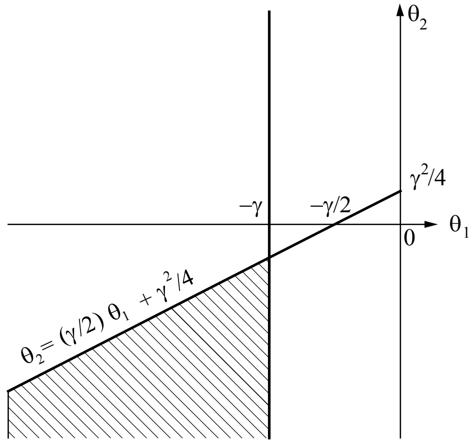

Рис. 1. Область устойчивости Λ_γ

Разрешая уравнение (13) относительно F, получаем

$$F = \operatorname{diag}\left(\frac{\sigma^2}{2\theta_2\theta_1}, \frac{\sigma^2}{2\theta_2}\right), \ \left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} = \frac{4\theta_2{}^2\sqrt{1+\theta_1{}^4}}{\sigma^4} .$$

Поэтому при больших H средняя длительность процедуры оценивания удовлетворяет соотношению

$$E_\theta\tau(H) \sim H\frac{4\theta_2^2\sqrt{1+\theta_1^4}}{\sigma^4}$$

для всех $\theta = (\theta_1, \theta_2)' \in K$, где K – компакт в параметрической области Λ_γ, $\gamma > 0$. При этом среднеквадратическая точность оценивания равномерно по компакту K определяется неравенством (41), причем

$$\varphi(\theta) = trF\left\|F^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} = \frac{16\theta_2^4}{\sigma^8}(1+\theta_1^2)\sqrt{1+\theta_1^4} .$$

Подставляя полученную оценку $\hat\theta(H) = \left(\hat\theta_1, \hat\theta_2\right)'$ в (2), получаем оценку спектральной плотности $\tilde f(\lambda)$ процесса (43). Теорема 2 позволяет построить доверительную область для оценки $\tilde f(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М.: Наука, 1989.
2. *Ибрагимов И.А.*, *Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.
3. *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. *Яглом А.М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. 1955. Т. 7. Вып. 5. С. 3–168.

5. *Тараскин А.Ф.* Об асимптотической нормальности стохастических интегралов в оценках коэффициента переноса диффузионного процесса // Мат. физика. Киев: Наукова думка, 1970. Вып. 8. С. 149–163.
6. *Тараскин А.Ф.* Об асимптотической нормальности некоторых стохастических интегралов и оценках параметров переноса многомерного диффузионного процесса // Теор. вероятн. и мат. статистика. Киев: Наукова думка, 1970. Вып. 2. С. 205–220.
7. *Новиков А.А.* Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. Вып. 2. С. 394–396.
8. *Новиков А.А.* Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Мат. заметки. 1972. Т. 12. Вып. 5. С. 627–638.
9. *Арато М.*, *Колмогоров А.Н.*, *Синай Я.Г.* Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // ДАН СССР. 1962. Т. 156. № 4. С. 747–750.
10. *Konev V.V. and Pergamenshchikov S.M.* Sequential Estimation of the Parameters in a Trigonometric Regression Model with the Gaussian Coloured Noise // Statistical Inference for Stochastic Processes 6: 215-235, 2003.
11. *Конев В.В. Пергаменщиков С.М.* Последовательное оценивание параметров линейных неустойчивых стохастических систем с гарантированной среднеквадратической точностью // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28. № 4.
12. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
13. *Kabanov Yu.M. and Pergamenshchikov S.M.* Two Scale Stochastic Systems: Asymptotic Analysis and Control // Springer, Berlin, New York, 2002.

Статья поступила 24.06.2013 г.

Emel'yanova T.V., *Konev V.V.* ON THE SEQUENTIAL ESTIMATION OF PARAMETERS IN A CONTINUOUS AUTOREGRESSION MODEL. In this paper, we propose a sequential procedure for estimating unknown parameters for a stable autoregressive continuous time processes. The procedure uses a special rule to stop observations and is based on the classical least squares (LS) estimates but, in contrast, provides control for the mean-square accuracy of estimates. Formulas for the asymptotic duration of observations with an increase in the mean-square accuracy of estimates are obtained. The results can be applied in a wide range of problems such as system identification, adaptive forecasting, and estimation of parameters of spectra of continuous time Gaussian processes.

Keywords: fixed-accuracy estimation, autoregressive process, gaussian process with rational density, sequential estimation, stopping time.

EMEL'YANOVA Tatiana Veniaminovna (Tomsk State University)
E-mail: tv_em@mail.ru

KONEV Victor Vasil'evich (Tomsk State University)
E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru