

УДК 512.62+510.22

Е.А. Тимошенко

ЧИСТО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КАК БАЗОВЫЕ ПОЛЯ CSP-КОЛЕЦ^{1,2}

Получены условия, при которых чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел служит базовым полем некоторого csp-кольца. В работе используются свойства кардинальных характеристик континуума.

Ключевые слова: csp-кольцо, базовое поле, кардинальные характеристики континуума.

Пусть L – некоторое бесконечное множество простых чисел. Для числа $p \in L$ зафиксируем кольцо K_p , совпадающее либо с кольцом целых p -адиических чисел, либо с некоторым кольцом вычетов по модулю p^t (для разных простых p число t может быть разным). Введём обозначения

$$K = \prod_{p \in L} K_p, \quad T = \bigoplus_{p \in L} K_p \subset K.$$

Будем называть csp-кольцом каждое подкольцо R кольца K , такое, что $T \subset R$ и R/T является полем. Поле R/T , а также всякое изоморфное ему поле назовём *базовым полем* csp-кольца R . Очевидно, что всякое базовое поле (иначе говоря, поле, вкладывающееся в K/T в качестве подкольца) имеет характеристику нуль и мощность не выше мощности континуума $\mathfrak{c}$.

Всякое csp-кольцо, имеющее поле рациональных чисел своим базовым полем, называют *кольцом псевдорациональных чисел*. Кольца псевдорациональных чисел были введены А. А. Фоминым [1] и П. А. Крыловым [2] в конце 1990-х годов для изучения некоторых классов смешанных абелевых групп (в частности, sp-групп). Позже П. А. Крылов предложил рассматривать csp-кольца (как обобщение колец псевдорациональных чисел).

Изучая базовые поля csp-колец, можем воспользоваться доказанным в [3] фактом, согласно которому базовое поле csp-кольца будет также базовым полем некоторого регулярного (в смысле фон Неймана) csp-кольца. Нетрудно заметить, что csp-кольцо регулярно тогда и только тогда, когда для каждого $p \in L$ кольцо K_p есть поле вычетов $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Поэтому далее мы ограничимся ситуацией

$$K_L = \prod_{p \in L} \mathbf{Z}_p, \quad T_L = \bigoplus_{p \in L} \mathbf{Z}_p \subset K_L. \quad (1)$$

В [3] автором было доказано, что чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\leq \aleph_1$ является базовым полем некоторого регулярного csp-кольца. Данная работа посвящена улучшению оценки $\aleph_1$. Для этого введём кардинальную характеристику $\mathfrak{ie}_L$ и исследуем её свойства.

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

² Работа выполнена частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

1. Кардинальные характеристики континуума

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, m, \dots\}$ есть множество всех натуральных чисел. Зададим отношение частичного порядка $<$ на множестве $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех отображений $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$: считаем, что $z' < z$ тогда и только тогда, когда почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено $z'(i) < z(i)$. Множество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ назовём *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, для которой $z' < z$ при всех $z' \in E$; в противном случае скажем, что E – *неограниченное* множество. Назовём подмножество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *конфинальным*, если для всякого $z' \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ найдётся функция $z \in E$, такая, что выполнено неравенство $z' < z$. Через $\mathbf{b}$ (через $\mathbf{d}$) обозначается наименьшая мощность неограниченного (соответственно конфинального) подмножества множества $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Эти кардиналы связаны соотношениями $\aleph_1 \leq \text{cf}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \leq \text{cf}(\mathbf{d}) \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{c} [4, 5]$; через $\text{cf}(\lambda)$ здесь, как обычно, обозначена конфинальность кардинала λ .

Подмножество H вещественной прямой $\mathbf{R}$ называют *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит внутренних точек; множество вещественных чисел H называется *множеством первой категории*, если H можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств (все остальные подмножества вещественной прямой называются *множествами второй категории*).

Все множества первой категории и все множества нулевой меры образуют два σ -идеала множества всех подмножеств вещественной прямой; будем обозначать эти идеалы через M и N соответственно. Через $\text{non}(M)$ обозначим наименьшую мощность множества вещественных чисел, не принадлежащего идеалу M ; через $\text{cov}(M)$ – наименьшую возможную мощность семейства входящих в M множеств вещественных чисел, объединение которого совпадает с $\mathbf{R}$. Аналогично вводятся кардинальные числа $\text{non}(N)$ и $\text{cov}(N)$. Следующая схема, представляющая собой часть диаграммы Цихоня [4, 6], содержит полную информацию о неравенствах, связывающих указанные кардинальные характеристики континуума:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cov}(N) & \rightarrow & \text{non}(M) & \rightarrow & \mathbf{c} & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \aleph_1 & \rightarrow & \mathbf{b} & \rightarrow & \mathbf{d} & \rightarrow & \mathbf{c} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \aleph_1 & \rightarrow & \text{cov}(M) & \rightarrow & \text{non}(N)
 \end{array} \quad (2)$$

На схеме (2) стрелка, ведущая от кардинала λ к кардиналу λ' , отражает тот факт, что справедливо неравенство $\lambda \leq \lambda'$. Известно, что если приписать каждой из рассматриваемых шести кардинальных характеристик и кардиналу $\mathbf{c}$ одно из значений $\aleph_1$ и $\aleph_2$ так, чтобы не возникало противоречия со схемой (2), то можно построить модель ZFC, в которой реализуются требуемые семь равенств [4, 6].

В этом параграфе под L будет пониматься бесконечное подмножество из $\mathbf{N}$. Множество K_L вновь зададим условием (1); в этом случае для произвольного $p \in L$ сомножитель $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ является, вообще говоря, уже не полем, а кольцом. Можно снабдить множество K_L топологией, рассматривая его как тихоновское произведение дискретных топологических пространств $\mathbf{Z}_p$. Базу этой топологии составляют множества вида

$$A = \prod_{p \in L} A_p, \quad (3)$$

где $A_p \subset \mathbf{Z}_p$ и почти для всех $p \in L$ выполнено равенство $A_p = \mathbf{Z}_p$. На K_L можно

определить полную меру ν , относительно которой будет измеримо, в частности, каждое борелевское подмножество множества K_L . Для множеств вида (3) при этом выполнено $\nu(A) = \prod_{p \in L} (p^{-1}|A_p|)$; равенство остаётся справедливым и в том случае, когда $A_p \neq \mathbb{Z}_p$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Заметим, что мера ν является вероятностной, т. е. $\nu(K_L) = 1$.

Аналогичным образом топология и полная вероятностная мера определяются на множестве $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Как и на вещественной прямой $\mathbb{R}$, в пространствах $2^{\mathbb{N}}$ и K_L можно рассматривать σ -идеалы M и N . Известно [4, 6], что характеристики pop и cov этих σ -идеалов не зависят от того, в каком из трёх пространств ($\mathbb{R}$, K_L или $2^{\mathbb{N}}$) они рассматриваются.

Через π_p будем обозначать проекцию из K_L в $\mathbb{Z}_p$. Введём на множестве K_L отношение $\approx$, полагая $k \approx d$ в том и только в том случае, когда $\pi_p(k) = \pi_p(d)$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Через ie_L (от слов «infinitely equal») обозначим наименьшую возможную мощность множества $B \subset K_L$, обладающего следующим свойством:

$$\text{для всякого } k \in K_L \text{ существует } d \in B, \text{ такое, что } k \approx d. \quad (4)$$

Ясно, что множество $B = K_L$ обладает указанным свойством; имеем $\text{ie}_L \leq \mathfrak{c}$. Установим некоторые свойства кардинальной характеристики ie_L .

Предложение 1.1. $\aleph_1 \leq \text{ie}_L$ для всякого $L \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $B = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ – некоторое счётное подмножество множества K_L . Выберем $k \in K_L$ так, чтобы для всякого $p \in L$ элемент $\pi_p(k)$ не совпадал с $\pi_p(d_i)$ ни для какого натурального $i < p$. В этом случае для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем $\pi_p(k) \neq \pi_p(d_i)$ при всех $p > i$, а значит, условие $k \approx d_i$ не выполнено. Итак, множество B не обладает свойством (4), что и требовалось. ■

Через z_L обозначим возрастающую биекцию из $\mathbb{N}$ в L .

Лемма 1.2. Если бесконечные подмножества L и X множества $\mathbb{N}$ таковы, что $z_L(i) \geq z_X(i)$ при всех $i \in \mathbb{N}$, то $\text{ie}_L \geq \text{ie}_X$.

Доказательство. Из условия следует, что существует сюръекция $K_L \rightarrow K_X$, сохраняющая отношение $\approx$. Отсюда получаем требуемое утверждение. ■

Замечание. Условие леммы 1.2 можно ослабить. Например, вместо условия $z_L(i) \geq z_X(i)$ достаточно потребовать, чтобы для некоторого натурального s при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнялось $z_L(si) \geq z_X(i)$.

Для $k \in K_L$ через $D(k)$ будем обозначать множество всех $d \in K_L$, таких, что $\pi_p(k) \neq \pi_p(d)$ почти для всех $p \in L$; очевидно, что множество $B \subset K_L$ обладает свойством (4) тогда и только тогда, когда при всех $k \in K_L$ выполнено $B \not\subset D(k)$. Заметим, что множество D_i всех $d \in K_L$, таких, что $\pi_p(k) \neq \pi_p(d)$ при всех $p > i$, является замкнутым и не содержит внутренних точек, т. е. нигде не плотно в K_L . При этом $D(k)$ совпадает с объединением множеств D_i по всем $i \in \mathbb{N}$ и поэтому является множеством первой категории.

Предложение 1.3. $\text{non}(M) \geq \text{ie}_L$ для всякого $L \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $B \subset K_L$ есть множество второй категории, имеющее мощность $\text{non}(M)$. Так как $D(k)$ является множеством первой категории, имеем $B \not\subset D(k)$ для любого $k \in K_L$. Следовательно, B обладает свойством (4) и, значит, $\text{ie}_L \leq |B| = \text{non}(M)$. ■

Следующий известный факт приведём без доказательства.

Лемма Бореля – Кантелли. Пусть ν – вероятностная мера на пространстве S и $G_i \subset S$, где $i \in \mathbb{N}$, – последовательность измеримых множеств. Для множества $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} G_i$ справедливы следующие утверждения:

а) Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(G_i)$ сходится, то $\nu(G) = 0$.

б) Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(G_i)$ расходится и G_i – взаимно независимые множества, т. е.

$\nu(\bigcap_{i \in I} G_i) = \prod_{i \in I} \nu(G_i)$ для всякого непустого конечного $I \subset \mathbb{N}$, то $\nu(G) = 1$. ■

Зафиксируем произвольное $k \in K_L$ и применим лемму к пространству $S = K_L$ и последовательности множеств $G_p = \{d \in K_L \mid \pi_p(k) = \pi_p(d)\}$, где $p \in L$. Тогда получаем, что $\nu(G_p) = p^{-1}$ и $G = K_L \setminus D(k)$. Итак, если ряд

$$\sum_{p \in L} p^{-1} \quad (5)$$

сходится, то $D(k)$ имеет меру 1 для любого $k \in K_L$; если же этот ряд расходится, то $D(k)$ имеет меру 0 для любого $k \in K_L$.

Предложение 1.4. Если ряд (5) сходится, то $\text{ie}_L \geq \text{cov}(N)$.

Доказательство. Пусть множество $B \subset K_L$ имеет мощность ie_L и обладает свойством (4). В этом случае для всякого $k \in K_L$ найдётся элемент $d \in B$, такой, что $k \approx d$, т. е. $k \in K_L \setminus D(d)$. Поэтому K_L совпадает с объединением множеств $K_L \setminus D(d)$ по всем $d \in B$. Поскольку каждое из множеств $K_L \setminus D(d)$ имеет меру 0, получаем, что $\text{cov}(N) \leq |B| = \text{ie}_L$. ■

Следующее свойство было подсказано автору А. Блассом.

Предложение 1.5. Если ряд (5) расходится, то $\text{ie}_L \leq \text{non}(N)$.

Доказательство. Пусть B содержится в K_L , не является множеством меры нуль и имеет мощность $\text{non}(N)$. Так как $D(k)$ есть множество меры нуль, имеем $B \not\subset D(k)$ при любом $k \in K_L$. Следовательно, B обладает свойством (4), поэтому $\text{ie}_L \leq |B| = \text{non}(N)$. ■

Замечание. Из доказанного предложения, в частности, следует, что условие $\text{ie}_L \leq \text{non}(N)$ выполнено, если L совпадает с множеством всех простых чисел.

Будем говорить, что $\Pi = \{I_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ есть разбиение множества $\mathbb{N}$ на конечные интервалы, если $I_j = \{i_j, i_j + 1, \dots, i_{j+1} - 1\}$, где $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m < \dots$ (здесь $i_j \in \mathbb{N}$); пусть IP обозначает множество всех таких разбиений. Говорят, что разбиение

$\{J_j | j \in \mathbf{N}\}$ мажорируется разбиением $\{I_j | j \in \mathbf{N}\}$, если почти для каждого $j \in \mathbf{N}$ существует $m \in \mathbf{N}$, такое, что $J_m \subset I_j$.

Теорема 1.6. а) Если $\mathbf{d} < \text{non}(M)$, то $\sup_{L} \text{ie}_L = \text{non}(M)$.

б) Если $\mathbf{d} < \text{cf}(\text{non}(M))$, то для некоторого $L \subset \mathbf{N}$ выполнено $\text{ie}_L = \text{non}(M)$.

Доказательство. Существует множество $\{\Pi_\xi | \xi \in \Gamma\} \subset IP$, такое, что всякое разбиение из IP мажорируется некоторым разбиением Π_ξ и выполнено $|\Gamma| = \mathbf{d}$ [4, теорема 2.10]. Не умаляя общности, можно считать, что каждое из разбиений $\Pi_\xi = \{I_{j,\xi} | j \in \mathbf{N}\}$ обладает свойством $|I_{j,\xi}| < |I_{j+1,\xi}|$ при всех $j \in \mathbf{N}$.

Через L_ξ обозначим множество всех натуральных чисел вида $2^{|I_{j,\xi}|}$, где $j \in \mathbf{N}$. Тогда существует естественная биекция δ_ξ из пространства K_{L_ξ} в пространство

$\prod_{j \in \mathbf{N}} 2^{|I_{j,\xi}|} = 2^{\mathbf{N}}$. Через B_ξ мы обозначим подмножество пространства K_{L_ξ} , имеющее мощность ie_{L_ξ} и такое, что для всякого $k \in K_{L_\xi}$ существует $d \in B_\xi$ со свойством $k \approx d$. Множество $H \subset 2^{\mathbf{N}}$ зададим как объединение множеств $\delta_\xi(B_\xi)$, где $\xi \in \Gamma$.

Зафиксируем функцию $h \in 2^{\mathbf{N}}$. Для всякого $\xi \in \Gamma$ и $k = \delta_\xi^{-1}(h) \in K_{L_\xi}$ можно найти элемент $d \in B_\xi$, такой, что $k \approx d$. Отсюда получаем, что для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$ сужения функций h и $h' = \delta_\xi(d) \in H$ на интервал $I_{j,\xi}$ совпадают. Таким образом, для произвольной функции $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и произвольного разбиения $\Pi_\xi = \{I_{j,\xi} | j \in \mathbf{N}\}$ нашлась функция $h' \in H$, для которой сужения h и h' на $I_{j,\xi}$ совпадают для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$. Поскольку всякое разбиение из IP мажорируется подходящим разбиением Π_ξ , получаем, что для каждой функции $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и каждого разбиения $\Pi = \{J_j | j \in \mathbf{N}\} \in IP$ можно найти функцию, принадлежащую H и такую, что её действие на интервале J_j совпадает с действием h на том же интервале для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$. Это означает, что H есть множество второй категории [4, теорема 5.2], поэтому

$$\text{non}(M) \leq |H| \leq \sum_{\xi \in \Gamma} |B_\xi| = \sum_{\xi \in \Gamma} \text{ie}_{L_\xi} \leq \mathbf{d} \cdot \sup_L \text{ie}_L.$$

Отсюда сразу получаем утверждение теоремы. ■

Следствие 1.7. Если $\mathbf{d} = \mathbf{b}$, то $\sup_L \max(\text{ie}_L, \mathbf{b}) = \text{non}(M)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{b}$. Из диаграммы (2) и предложения 1.3 следует, что левая часть доказываемого равенства не превосходит $\text{non}(M)$.

Если выполнено $\mathbf{b} = \text{non}(M)$, то из условия $\max(\text{ie}_L, \mathbf{b}) = \text{non}(M)$ немедленно получаем нужное равенство. Если же $\mathbf{b} < \text{non}(M)$, то по теореме 1.6 имеем

$$\sup_L \max(\text{ie}_L, \mathbf{b}) \geq \sup_L \text{ie}_L = \text{non}(M),$$

что и требовалось. ■

Следствие 1.8. Неравенство $\text{ie}_L > \text{cov}(N)$ совместимо с ZFC.

Доказательство. Нужное утверждение следует из того факта, что равенства $\text{non}(M) = \aleph_2$ и $\mathbf{d} = \mathbf{b} = \text{cov}(N) = \aleph_1$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то по следствию 1.7 имеем $\text{ie}_L = \aleph_2$ для некоторого множества L . ■

Замечание. Из леммы 1.2 можно заключить, что утверждения теоремы 1.6 и следствий 1.7 и 1.8 останутся справедливыми, если рассматривать в качестве L лишь бесконечные подмножества множества всех простых чисел.

Важное место в теории множеств занимает аксиома Мартина. Она является следствием континуум-гипотезы ($\aleph_1 = \mathfrak{c}$), но совместима и с гипотезой $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Имеет место такой факт: из справедливости аксиомы Мартина следует, что все кардинальные характеристики, входящие в схему (2), равны $\mathfrak{c}$ (это верно и для всех остальных характеристик из диаграммы Цихоня, см. [4]). Ниже мы увидим, что аналогичным свойством обладает и $\mathfrak{ie}_L$.

Определение 1.9. Пусть $(W, \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Будем говорить, что W удовлетворяет условию *счётности цепей* (у. с. ц.), если для каждого несчётного подмножества $\{c_\xi \mid \xi \in \Delta\} \subset W$ можно найти различные индексы $\xi, \eta \in \Delta$ и элемент $c \in W$, такие, что $c \leq c_\xi$ и $c \leq c_\eta$.

Множество $W' \subset W$ называется *плотным* в W , если для всякого $c \in W$ можно найти элемент $c' \in W'$ со свойством $c' \leq c$.

Определение 1.10. Пусть $U = \{W_\xi \mid \xi \in \Gamma\}$ есть некоторое семейство плотных подмножеств частично упорядоченного множества W . Назовём *U-генерическим* всякое множество $W' \subset W$, обладающее следующими свойствами:

- 1) если $c' \in W'$ и $c' \leq c$, то $c \in W'$;
- 2) если $c, c' \in W'$, то для некоторого $b \in W'$ выполнено $b \leq c$ и $b \leq c'$;
- 3) для всякого $\xi \in \Gamma$ множество W' имеет непустое пересечение с W_ξ .

Аксиома Мартина. Если W – непустое частично упорядоченное множество, удовлетворяющее у. с. ц., то для всякого семейства U , состоящего из плотных подмножеств множества W и такого, что $|U| < \mathfrak{c}$, можно найти *U-генерическое* множество $W' \subset W$.

Теорема 1.11. Из аксиомы Мартина следует, что $\mathfrak{ie}_L = \mathfrak{c}$ для всякого $L \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть для всякого $p \in L$ задано множество $A_p \subset \mathbb{Z}_p$. Будем говорить, что последовательность (A_p) является *s-ограниченной*, если для всякого $p \in L$ выполнено неравенство $|A_p| \leq \min(s, p-1)$. Обозначим через W множество, состоящее из всех произведений вида $\prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus A_p)$, где (A_p) – это *s-ограниченная*

последовательность (для некоторого $s \in \mathbb{N}$); заметим, что $\emptyset \notin W$. Покажем, что непустое частично упорядоченное множество $(W, \subset)$ удовлетворяет у. с. ц.

Пусть $\{C_\xi \mid \xi \in \Delta\}$ – несчётное подмножество множества W . Можем записать $C_\xi = \prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus A_{p,\xi})$, где $(A_{p,\xi})$ – s_ξ -ограниченная последовательность. Из $|\Delta| > \aleph_0$

вытекает, что найдётся бесконечно много различных C_ξ , имеющих общее $s_\xi = s$. Поэтому существуют различные $\xi, \eta \in \Delta$, такие, что $s_\xi = s_\eta = s$ и при всех $p \leq 2s$ выполнено $A_{p,\xi} = A_{p,\eta}$. Обозначим $A_p = A_{p,\xi} \cup A_{p,\eta}$.

Если $p \leq 2s$, то $|A_p| = |A_{p,\xi}| \leq \min(s, p-1) \leq \min(2s, p-1)$. В случае $p > 2s$ можем записать $|A_p| \leq |A_{p,\xi}| + |A_{p,\eta}| \leq 2\min(s, p-1) = 2s = \min(2s, p-1)$. Таким образом, (A_p) есть $(2s)$ -ограниченная последовательность. Это означает, что

$$C_\xi \cap C_\eta = \prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus (A_{p,\xi} \cup A_{p,\eta})) = \prod_{p \in L} (\mathbb{Z}_p \setminus A_p) \in W$$

и, следовательно, $(W, \subset)$ удовлетворяет у. с. ц.

Пусть $B = \{d_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset K_L$, причём $|\Gamma| < \mathfrak{c}$. Обозначим через W_ξ множество всех $C' \in W$, для которых $C' \subset D(d_\xi)$; положим $U = \{W_\xi \mid \xi \in \Gamma\}$. Убедимся, что каждое из множеств W_ξ плотно в W .

Пусть $C \in W$, тогда для некоторой s -ограниченной последовательности (A_p) имеем $C = \prod_{p \in L} (Z_p \setminus A_p)$. Обозначим

$$V_p = \begin{cases} A_p, & \text{если } p \leq s+1; \\ A_p \cup \{\pi_p(d_\xi)\}, & \text{если } p > s+1. \end{cases}$$

Если $p \leq s+1$, то $|V_p| = |A_p| \leq \min(s, p-1) \leq \min(s+1, p-1)$. Если же $p > s+1$, то можем записать $|V_p| \leq |A_p| + 1 \leq \min(s, p-1) + 1 = s+1 = \min(s+1, p-1)$. Итак, (V_p) есть $(s+1)$ -ограниченная последовательность. Таким образом, для произведения $C' = \prod_{p \in L} (Z_p \setminus V_p) \subset C \cap D(d_\xi)$ выполнено $C' \in W_\xi$, т. е. W_ξ плотно в W .

В силу аксиомы Мартина можно найти U -генерическое множество $W' \subset W$. Обозначим через D пересечение всех множеств, которые принадлежат W' . Для всякого индекса $\xi \in \Gamma$ найдётся множество $C_\xi \in W' \cap W_\xi$; имеем $D \subset C_\xi \subset D(d_\xi)$. Учитывая условие $\emptyset \notin W'$ и условие 2) из определения 1.10, можем заключить, что пересечение любого конечного числа принадлежащих W' множеств непусто. Поэтому ввиду компактности K_L и замкнутости всех множеств, входящих в W' , имеем $D \neq \emptyset$.

Зафиксируем некоторый элемент $k \in D$. Для каждого $\xi \in \Gamma$ имеем $k \in D(d_\xi)$, т. е. условие $k \approx d_\xi$ не выполнено. Итак, множество B не обладает свойством (4), поэтому $\mathbf{ie}_L = \mathbf{c}$. ■

2. Основные результаты

Перейдём теперь к основной цели данной статьи: убедимся, что чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$ служит базовым полем подходящего регулярного csp-кольца. Снова считаем, что L – это бесконечное множество простых чисел. Заметим, что справедливо

Предложение 2.1. Каждое из следующих неравенств совместимо с ZFC:

- а) $\mathbf{ie}_L > \mathbf{ie}_X$;
- б) $\mathbf{ie}_L < \mathbf{b}$;
- в) $\mathbf{ie}_L > \mathbf{b}$.

Доказательство. а) Пусть X состоит из всех простых чисел, а бесконечное множество простых чисел L выбрано так, чтобы ряд (5) сходил. Известно, что равенства $\text{non}(N) = \aleph_1$ и $\text{cov}(N) = \aleph_2$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то по предложениям 1.1, 1.4 и 1.5 получаем $\mathbf{ie}_L \geq \text{cov}(N) > \aleph_1 = \mathbf{ie}_X$.

б) Пусть множество L состоит из всех простых чисел. Условия $\text{non}(N) = \aleph_1$ и $\mathbf{b} = \aleph_2$ совместимы с ZFC; по предложениям 1.1 и 1.5 имеем $\mathbf{ie}_L = \aleph_1 < \mathbf{b}$.

в) Пусть L выбрано так, что ряд (5) сходится. Условия $\mathbf{b} = \aleph_1$ и $\text{cov}(N) = \aleph_2$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то в силу предложения 1.4 получаем $\mathbf{ie}_L \geq \text{cov}(N) > \mathbf{b}$. ■

Через π обозначаем естественный эпиморфизм $K_L \rightarrow K_L/T_L$; через π_p , как и раньше, обозначается проекция из K_L в Z_p . Под π_p^x будем понимать кольцевой гомоморфизм из $K_L[x]$ в $Z_p[x]$, сопоставляющий каждому $\bar{\mu}(x) \in K_L[x]$ многочлен,

коэффициенты которого – это образы соответствующих коэффициентов многочлена $\bar{\mu}(x)$ при отображении π_p . Гомоморфизм колец π^x , индуцированный отображением π и определённый на кольце $K_L[x]$, задаётся аналогично. Можно убедиться, что для многочленов $\bar{\mu}(x) \in K_L[x]$, $\mu_p = \pi_p^x(\bar{\mu})$, $\mu = \pi^x(\bar{\mu})$ и элемента $k \in K_L$ всегда справедливы следующие равенства:

- а) $\pi_p(\bar{\mu}(k)) = \mu_p(\pi_p(k))$ для любого $p \in L$;
- б) $\mu(k + T_L) = \bar{\mu}(k) + T_L$.

Теорема 2.2. Пусть K_L/T_L содержит в качестве подполя поле F , мощность которого меньше $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$. Тогда естественное вложение $F \rightarrow K_L/T_L$ можно продолжить до вложения $F(x) \rightarrow K_L/T_L$, где $F(x)$ есть простое трансцендентное расширение поля F .

Доказательство. Пусть $\{v_\xi(x) \mid \xi \in \Gamma\}$ – множество, которое состоит из всех унитарных многочленов кольца $F[x]$; ясно, что $|\Gamma| = |F|$. Зафиксируем унитарные многочлены $\bar{v}_\xi(x) \in K_L[x]$, такие, что $\pi^x(\bar{v}_\xi) = v_\xi$. Рассмотрим два случая.

I. Допустим сначала, что $|F| < \mathbf{b}$. Ясно, что почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено $v_\xi(i) \neq 0$, т. е. элемент $v_\xi(i) = \bar{v}_\xi(i) + T_L$ поля F отличен от нуля. Из обратимости этого элемента следует, что при почти всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\bar{v}_\xi(i)) \neq 0$.

Построим теперь функцию $z_\xi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Если $v_\xi(i) = 0$, полагаем $z_\xi(i) = 1$. Если же выполнено $v_\xi(i) \neq 0$, то выберем значение $z_\xi(i) \in \mathbf{N}$ так, чтобы для каждого $p \in L$ из условия $p > z_\xi(i)$ следовало неравенство $\pi_p(\bar{v}_\xi(i)) \neq 0$. Рассмотрим множество функций $\{z_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Из $|\Gamma| < \mathbf{b}$ следует, что для некоторой функции $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ при всех $\xi \in \Gamma$ выполнено $z_\xi < z$. Будем считать, что функция z является строго возрастающей (очевидно, что её можно выбрать обладающей данным свойством). Функцию $\kappa: L \rightarrow \mathbf{N}$ зададим равенством

$$\kappa(p) = \begin{cases} i, & \text{если } z(i) \leq p < z(i+1); \\ 1, & \text{если } p < z(1). \end{cases}$$

Зафиксируем некоторое $\xi \in \Gamma$. Убедимся, что справедливы два свойства:

(i) Почти для всех $p \in L$ выполнено $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$.

Утверждение следует из того факта, что каждое своё значение κ принимает лишь конечное число раз, а многочлен $v_\xi(x)$ имеет конечное число корней в F .

(ii) $\pi_p(\bar{v}_\xi(\kappa(p))) \neq 0$ почти для всех $p \in L$.

Действительно, существует $i_\xi \in \mathbf{N}$, для которого при всех $i \geq i_\xi$ справедливо неравенство $z_\xi(i) < z(i)$. Пусть выполнено $p \geq z(i_\xi)$ и $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$ (этим условиям удовлетворяют почти все $p \in L$). Тогда для некоторого $i \geq i_\xi$ имеем неравенства $z(i) \leq p < z(i+1)$; следовательно, $z_\xi(\kappa(p)) = z_\xi(i) < z(i) \leq p$. Отсюда в силу свойств функции z_ξ получаем $\pi_p(\bar{v}_\xi(\kappa(p))) \neq 0$, что и требовалось.

Выберем $k \in K_L$ так, чтобы при любом $p \in L$ выполнялось $\pi_p(k) = \kappa(p) + p\mathbf{Z}$; положим $a = k + T_L \in K_L/T_L$. Вновь зафиксируем некоторое $\xi \in \Gamma$. Из условия $\pi_p(k) = \pi_p(\kappa(p))$ получаем $\pi_p(\bar{v}_\xi(k)) = \pi_p(\bar{v}_\xi(\kappa(p)))$; в силу свойства (ii) отсюда вытекает, что почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\bar{v}_\xi(k)) \neq 0$. Поэтому элемент

$v_\xi(a) = \bar{v}_\xi(k) + T_L$ обратим в K_L/T_L (и, в частности, не равен 0). Подмножество $F(a)$ кольца K_L/T_L зададим равенством

$$F(a) = \{u(a) \cdot (v(a))^{-1} \mid u(x), v(x) \in F[x]; v(x) - \text{унитарный}\}. \quad (6)$$

Из наших рассуждений следует, что $F(a)$ есть поле, F -изоморфное полю $F(x)$, причём элемент a является трансцендентным над F .

II. Пусть теперь выполнено неравенство $|F| < \mathbf{ie}_L$. Заметим, что для каждого $p \in L$ многочлен $\pi_p^x(\bar{v}_\xi) \in \mathbf{Z}_p[x]$ является унитарным, а его степень равна числу $s_\xi = \deg v_\xi$. В частности, многочлен $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$ имеет не более s_ξ корней в поле $\mathbf{Z}_p$. Поэтому можно найти состоящее из s_ξ элементов множество $B_\xi \subset K_L$, такое, что $\mathbf{Z}_p \setminus \{\pi_p(d) \mid d \in B_\xi\}$ не содержит корней многочлена $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$ ни при каком $p \in L$.

Зададим множество $B \subset K_L$ как объединение множеств B_ξ по всем $\xi \in \Gamma$; из $|\Gamma| < \mathbf{ie}_L$ следует, что B не обладает свойством (4). Тогда найдётся $k \in K_L$ с тем свойством, что для всякого $d \in B$ при почти всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(k) \neq \pi_p(d)$.

Фиксируя $\xi \in \Gamma$, получаем, что почти для всех простых $p \in L$ элемент $\pi_p(k)$ входит в $\mathbf{Z}_p \setminus \{\pi_p(d) \mid d \in B_\xi\}$ и поэтому не является корнем многочлена $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$. Поскольку $\pi_p(\bar{v}_\xi(k))$ совпадает со значением многочлена $\pi_p^x(\bar{v}_\xi)$ в точке $\pi_p(k)$, можно сделать вывод, что почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\bar{v}_\xi(k)) \neq 0$.

Обозначим $a = k + T_L \in K_L/T_L$. Для всякого $\xi \in \Gamma$ элемент $v_\xi(a) = \bar{v}_\xi(k) + T_L$ обратим в K_L/T_L . Отсюда получаем, что множество $F(a) \subset K_L/T_L$, задаваемое равенством (6), является простым трансцендентным расширением поля F . ■

В следующей теореме мы отождествляем $\mathbf{Q}$ с простым полем, содержащимся в кольце K_L/T_L .

Теорема 2.3. Кольцо K_L/T_L содержит подкольцо, являющееся чисто трансцендентным расширением поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$.

Доказательство. Рассмотрим множество, элементами которого служат все подкольца кольца K_L/T_L , являющиеся полями; это множество непусто, так как оно содержит $\mathbf{Q}$. Пусть F — максимальный (относительно включения) элемент рассматриваемого множества; существование такого элемента следует из леммы Цорна. Из теоремы 2.2 имеем $|F| \geq \max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$. Нетрудно видеть, что в этом случае поле F содержит некоторое чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$. ■

Таким образом, каждое чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$, степень трансцендентности которого не больше кардинального числа $\max(\mathbf{ie}_L, \mathbf{b})$, служит базовым полем некоторого регулярного csp-кольца $R \subset K_L$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fomin A.A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Basel et al.: Birkhäuser, 1999. P. 87–100.
2. Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 47–51.

3. Тимошенко Е.А. О базовых полях csp-колец // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. С. 555–565.
4. Blass A. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum // Handbook of Set Theory. V. 1. Dordrecht et al.: Springer, 2010. P. 395–489.
5. Van Douwen E.K. The integers and topology // Handbook of Set-Theoretic Topology. Amsterdam et al.: North-Holland, 1984. P. 111–167.
6. Bartoszyński T., Judah H. Set Theory: on the Structure of the Real Line. Wellesley: A.K. Peters, 1995.

Статья поступила 08.06.2013 г.

Timoshenko E.A. PURELY TRANSCENDENTAL EXTENSIONS OF THE FIELD OF RATIONAL NUMBERS AS BASE FIELDS OF CSP-RINGS. We obtain conditions under which a purely transcendental extension of the field of rational numbers is a base field of some csp-ring. In the paper, we use properties of cardinal characteristics of the continuum.

Keywords: csp-ring, base field, cardinal characteristics of the continuum.

TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich (Tomsk State University)

E-mail: tea471@mail.tsu.ru