

УДК 533.65

А.М. Липанов, И.М. Васенин, Э.Р. Шрагер, А.Ю. Крайнов**МЕТОД ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КАНАЛАХ¹**

Представлен подход к прямому численному моделированию турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в криволинейных каналах. Приведены результаты прямого численного моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в канале с препятствием в виде поперечной пластины заданной высоты.

Ключевые слова: вязкий теплопроводный газ, уравнения Навье – Стокса, турбулентность, прямое численное моделирование.

Большим достижением в теории турбулентности явились прямые расчеты турбулентных течений на основе интегрирования уравнений Навье – Стокса [1]. Однако все они проводились для течений, ограниченных прямыми стенками. Из экспериментов и теоретических расчетов известно о возникновении вихрей и турбулентности за плохо обтекаемыми телами. Прямые расчеты турбулентных течений в каналах с криволинейными границами авторам не известны. Для решения задач расчета течений в каналах с переменным контуром целесообразно применять системы координат, связанные с этим контуром. Координатная сетка должна быть достаточно гладкой, чтобы не вносить ошибок в аппроксимацию дифференциальных уравнений. Оптимальной является ситуация, при которой и границы, и координатная сетка описываются аналитическими функциями.

Пусть требуется решить задачу о турбулентном течении в канале с двумя криволинейными противолежащими стенками. Будем рассматривать канал, координаты стенок которого не изменяются в направлении, перпендикулярном некоторой плоскости. В то же время сечение канала упомянутой плоскостью является криволинейным. В таком канале удобно ввести декартову координату z в направлении, перпендикулярном плоскости, и не зависящие от z ортогональные криволинейные координаты q_1 и q_2 в сечении канала плоскостью $z = const$. Если при этом каждая часть границы криволинейной области совпадает с соответствующей координатной линией, то при конформном отображении этой области в прямоугольник плоскости q_1, q_2 в силу сохранения углов при конформном отображении получим ортогональную прямоугольную систему координат. Введенная таким образом система координат q_1, q_2, z будет прямоугольной декартовой системой в трехмерном пространстве.

В качестве примера подходящего изображения рассмотрим отображение полуплоскости с выброшенным отрезком на полуплоскость. Если из полуплоскости $\text{Im } \xi > 0$ исключить отрезок $(a, a+h)$, то такое отображение дается формулой

¹ Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Кадры» на 2009–2013 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России, Государственное соглашение № 14.В37.21.0378.

$$\omega = \sqrt{(\xi - a)^2 + h^2} + a, \quad (1)$$

где $\omega = q_1 + iq_2$, $\xi = x + iy$.

При этом прямым линиям $q_2 = \text{const}$ в плоскости q_1, q_2 в плоскости x, y соответствуют линии

$$y = q_2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{(x - a)^2 + q_2^2}},$$

а прямым $q_1 = \text{const}$ в плоскости q_1, q_2 — линии

$$x = a + (q_1 - a) \sqrt{1 - \frac{h^2}{(q_1 - a)^2 + y^2}}.$$

Эти линии в плоскости q_1, q_2 образуют прямоугольную сетку, а в плоскости x, y — криволинейную ортогональную систему координат (рис. 1). При этом линии $q_2 = 0$ соответствует линия $y = 0$ в плоскости x, y .

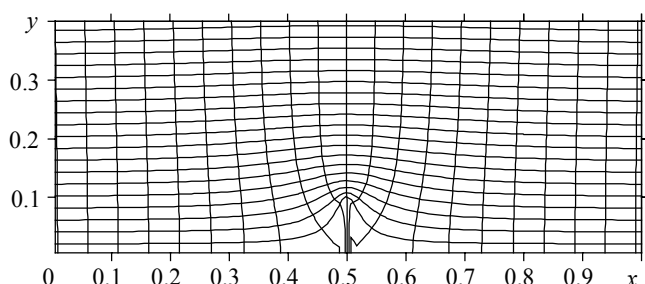


Рис. 1. Сетка координат на плоскости x, y

Производная $\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{(\xi - a)}{\sqrt{(\xi - a)^2 + h^2}}$ обращается в нуль при $\xi = a$ и в бесконечность при $\xi = a + ih$.

Если рассматривать любую часть области при $q_2 > 0$, то отображение везде будет аналитическим.

Приняв за границы канала в области q_1, q_2 две прямых линии $q_{11} = \text{const} > 0$ и $q_{12} = \text{const} > q_{11}$, в области x, y получим две криволинейные границы, между которыми отображение будет аналитической функцией. Если взять $q_{12} \gg 0$, то верхняя граница в плоскости x, y будет близка к прямой линии. Меняя высоту исключенного отрезка h и величину q_{11} , можно изменять высоту и кривизну границы в области максимума, исследовать поведение решений уравнений Навье — Стокса в зависимости от параметров препятствия. Однако главное достоинство введенного отображения заключается в преобразовании криволинейного канала в прямоугольный канал в координатах q_1, q_2, z . Отметим, что рассматриваемое отображение описывает течение идеальной несжимаемой жидкости с линиями тока $q_2 = \text{const}$, которые сгущаются в области препятствия. Последнее обстоятельство

ство является немаловажным для повышения точности численного решения уравнений Навье – Стокса.

Аналогично конформное отображение можно использовать для канала прямоугольного сечения, который получается из ограничения рассмотренной выше области двумя плоскостями $z_1 = const$ и $z_2 = const$. Полученная область в результате описанного выше конформного отображения также будет прямоугольной областью в трехмерном пространстве.

Уравнения Навье – Стокса в криволинейных ортогональных координатах широко используются при решении задач гидродинамики. В наиболее общем виде они приведены в [1], где для случая вязкости, не зависящей от температуры, они записаны в дивергентной форме. В этой записи для учета преобразования координат применяются коэффициенты Ляме [2].

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \quad H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \quad (2)$$

Запишем систему уравнений Навье – Стокса в криволинейной системе координат q_1, q_2, z , в которой координаты q_1 и q_2 задаются преобразованием (1). Выделяя в (1) действительную и мнимую части и решая полученную систему уравнений относительно x и y , найдем

$$x = a + \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right] + \sqrt{\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right]^2 + 4(q_1 - a)^2 q_2^2} \right]},$$

$$y = \frac{(q_1 - a)q_2}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right] + \sqrt{\left[(q_1 - a)^2 - q_2^2 - h^2 \right]^2 + 4(q_1 - a)^2 q_2^2} \right]}}. \quad (3)$$

Уравнения (3) дают нам искомые связи $x = f_1(q_1, q_2)$, $y = f(q_1, q_2)$. С их помощью по формулам (2) можно вычислить коэффициенты Ляме. Однако последнее легче получить, если заметить, что для конформного преобразования $\xi = f(\omega)$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega}\right)^2,$$

а $z = q_3$ не зависит от q_1, q_2 . Поэтому

$$H_1 = H_2 = \left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|, \quad H_3 = 1. \quad (4)$$

Замечая, что равенства (4) не зависят от конкретного вида конформного отображения, в дальнейшем введем обозначения

$$H_1 = H_2 = H, \quad H_3 = 1. \quad (5)$$

Для отображения (1) $\frac{d\xi}{d\omega} = \frac{\omega - a}{\sqrt{(\omega - a)^2 - h^2}}$. Откуда получаем

$$\left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|^2 = \frac{\omega - a}{\sqrt{(\omega - a)^2 - h^2}} \cdot \frac{\bar{\omega} - a}{\sqrt{(\bar{\omega} - a)^2 - h^2}}.$$

Раскрывая обозначения ω и $\bar{\omega}$, найдем

$$\left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|^2 = \frac{(q_1 - a)^2 + q_2^2}{\sqrt{\left[\left((q_1 - a)^2 + q_2^2 \right) \right]^2 - q \left[\left((q_1 - a)^2 + q_2^2 \right) \right]^2 \cdot h^2 + h^4}}. \quad (6)$$

Запишем уравнения Навье – Стокса в системе координат q_1, q_2, z . Запись произведем, учитывая коэффициенты Ляме (5) и не подставляя для краткости конкретных выражений для H . Такой подход позволяет получить уравнения, справедливые для произвольного конформного отображения $\xi = f(\omega)$.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho H^2 + \frac{\partial}{\partial q_1} \rho V_{q_1} H + \frac{\partial}{\partial q_2} \rho V_{q_2} H + \frac{\partial}{\partial q_3} \rho V_{q_3} H^2 = 0, \quad (7)$$

где ρ – плотность жидкости; $V_{q_1}, V_{q_2}, V_{q_3}$ – проекции скорости жидкости на оси q_1, q_2, q_3 соответственно, $q_3 = z$.

Уравнения движения запишутся в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^2 \rho V_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1}^2 + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_1} V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_1} V_{q_3} = \\ & = \rho V_{q_2}^2 \frac{\partial H}{\partial q_1} - \rho V_{q_1} V_{q_2} \frac{\partial H}{\partial q_2} + H^2 \rho F_{q_1} - H \frac{\partial P}{\partial q_1} - \frac{2}{3} H \frac{\partial}{\partial q_1} \mu \operatorname{div} \bar{\Omega} + 2H^2 (\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^2 \rho V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1} V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_2}^2 + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_2} V_{q_3} = \\ & = \rho V_{q_1}^2 \frac{\partial H}{\partial q_2} - \rho V_{q_1} V_{q_2} \frac{\partial H}{\partial q_1} + H^2 \rho F_{q_2} - H \frac{\partial P}{\partial q_2} - \frac{2}{3} H \frac{\partial}{\partial q_2} \mu \operatorname{div} \bar{\Omega} + 2H^2 (\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^2 \rho V_{q_3} + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1} V_{q_3} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_2} V_{q_3} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_3}^2 = \\ & = H^2 \rho F_{q_3} - H^2 \frac{\partial P}{\partial q_3} - \frac{2}{3} H^2 \frac{\partial}{\partial q_3} \mu \operatorname{div} \bar{\Omega} + 2H^2 (\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_3}. \end{aligned} \quad (10)$$

В этих уравнениях использованы обозначения: P – давление; $F_{q_1}, F_{q_2}, F_{q_3}$ – проекции массовых сил на оси q_1, q_2, q_3 соответственно; μ – вязкость жидкости;

$$\operatorname{div} \bar{\Omega} = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} H V_{q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} H V_{q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 V_{q_3} \right);$$

входящие в уравнения (8) – (10) проекции вектора $\operatorname{Div} \mu \cdot \Phi$ имеют вид

$$\begin{aligned}
(\text{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_1} &= \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} H \mu \Phi_{q_1 q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu \Phi_{q_2 q_1} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu \Phi_{q_3 q_1} \right] + \frac{\mu \Phi_{q_1 q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\mu \Phi_{q_2 q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1}, \\
(\text{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_2} &= \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} H \mu \Phi_{q_1 q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu \Phi_{q_2 q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu \Phi_{q_3 q_2} \right] + \frac{\mu \Phi_{q_1 q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\mu \Phi_{q_1 q_1}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2}, \\
(\text{Div} \mu \cdot \Phi)_{q_3} &= \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} H \mu \Phi_{q_1 q_3} + \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu \Phi_{q_2 q_3} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu \Phi_{q_3 q_3} \right],
\end{aligned}$$

где компоненты тензора скоростей деформации

$$\begin{aligned}
\Phi_{q_1 q_1} &= \frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{V_{q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \Phi_{q_2 q_2} = \frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_2} + \frac{V_{q_1}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \Phi_{q_3 q_3} = \frac{\partial V_{q_3}}{\partial q_3}, \\
\Phi_{q_1 q_2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_1} + \frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_2} - \frac{V_{q_1}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{V_{q_2}}{H^2} \frac{\partial H}{\partial q_1} \right], \quad \Phi_{q_1 q_3} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_3}}{\partial q_1} + \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_3} \right], \\
\Phi_{q_2 q_3} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial V_{q_3}}{\partial q_2} + \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_3} \right], \quad \Phi_{q_3 q_1} = \Phi_{q_1 q_3}, \quad \Phi_{q_3 q_2} = \Phi_{q_2 q_3}, \quad \Phi_{q_2 q_1} = \Phi_{q_1 q_2}.
\end{aligned} \quad (11)$$

В заключение запишем уравнение энергии

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \rho H^2 E + \frac{\partial}{\partial q_1} H \rho V_{q_1} E + \frac{\partial}{\partial q_2} H \rho V_{q_2} E + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \rho V_{q_3} E = \\
&= - \frac{\partial}{\partial q_1} H V_{q_1} P - \frac{\partial}{\partial q_2} H V_{q_2} P - \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 V_{q_3} P + \frac{\partial}{\partial q_3} 2 \mu H (\Phi_{q_1 q_1} V_{q_1} + \Phi_{q_2 q_1} V_{q_2} + \Phi_{q_3 q_1} V_{q_3}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial q_2} 2 \mu H (\Phi_{q_1 q_2} V_{q_1} + \Phi_{q_2 q_2} V_{q_2} + \Phi_{q_3 q_2} V_{q_3}) + \frac{\partial}{\partial q_3} 2 \mu H^2 (\Phi_{q_1 q_3} V_{q_1} + \Phi_{q_2 q_3} V_{q_2} + \Phi_{q_3 q_3} V_{q_3}) - \\
&- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial q_1} H \mu V_{q_1} \text{div} \bar{\Omega} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial q_2} H \mu V_{q_2} \text{div} \bar{\Omega} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \mu V_{q_3} \text{div} \bar{\Omega} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial q_1} \lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_3} H^2 \lambda_{\text{эфф}} \frac{\partial T}{\partial q_3} + \rho H^2 (V_{q_1} F_{q_1} + V_{q_2} F_{q_2} + V_{q_3} F_{q_3}). \quad (12)
\end{aligned}$$

Наряду с обозначениями, использованными выше, в (12) применены обозначения: $E = e_{\text{вн}} + |\bar{\Omega}|^2/2$ – полная энергия единицы массы газа; $\lambda_{\text{эфф}}$ – эффективный коэффициент теплопроводности, записанный с учетом излучения; T – температура газа; проекции тензора напряжений на оси криволинейных координат:

$$\begin{aligned}
F_{q_1} &= (2 \mu \Phi_{q_1 q_1}, 2 \mu \Phi_{q_2 q_1}, 2 \mu \Phi_{q_3 q_1}), \\
F_{q_2} &= (2 \mu \Phi_{q_1 q_2}, 2 \mu \Phi_{q_2 q_2}, 2 \mu \Phi_{q_3 q_2}), \\
F_{q_3} &= (2 \mu \Phi_{q_1 q_3}, 2 \mu \Phi_{q_2 q_3}, 2 \mu \Phi_{q_3 q_3}).
\end{aligned}$$

Система уравнений (7) – (12) замыкается выражением для внутренней энергии идеального газа

$$e_{\text{вн}} = c_v T, \quad (13)$$

и уравнением состояния идеального газа

$$P = \rho RT. \quad (14)$$

В качестве начальных условий для решения системы (7) – (14) в начальный момент времени $t = 0$ задаются скорости

$$\begin{aligned} V_{q_1}(0, q_1, q_2, q_3) &= V_{q_1,0}(q_1, q_2, q_3), \quad V_{q_2}(0, q_1, q_2, q_3) = V_{q_2,0}(q_1, q_2, q_3), \\ V_{q_3}(0, q_1, q_2, q_3) &= V_{q_3,0}(q_1, q_2, q_3), \end{aligned} \quad (15)$$

а также давление

$$P(0, q_1, q_2, q_3) = P_0(q_1, q_2, q_3)$$

и температура

$$T(0, q_1, q_2, q_3) = T_0(q_1, q_2, q_3).$$

Рассматриваются два случая. В первом случае исследуется течение между верхней и нижней криволинейными поверхностями, неограниченными в направлении z , в качестве граничных условий на нижней и верхней границах используются условия прилипания:

$$V_{q_1}|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_{q_2}|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_{q_3}|_{\Gamma_1} = 0, \quad V_{q_1}|_{\Gamma_2} = 0, \quad V_{q_2}|_{\Gamma_2} = 0, \quad V_{q_3}|_{\Gamma_2} = 0. \quad (16)$$

Граничные условия для температуры на этих границах задается из условия адиабатичности:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial q_2} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial q_2} \right|_{\Gamma_2} = 0. \quad (17)$$

На боковых границах задаются условия симметрии [1]:

$$\begin{aligned} V_{q_1}|_{z=0} &= V_{q_1}|_{z=h}, \quad V_{q_2}|_{z=0} = V_{q_2}|_{z=h}, \quad V_{q_3}|_{z=0} = V_{q_3}|_{z=h}, \\ p|_{z=0} &= p|_{z=h}, \quad \rho|_{z=0} = \rho|_{z=h}. \end{aligned} \quad (18)$$

В другом случае рассматривается течение в канале прямоугольного сечения при наличии стенок, перпендикулярных оси z . На этих стенках используются условия прилипания:

$$V_{q_1}|_{z=0} = V_{q_1}|_{z=h} = 0, \quad V_{q_2}|_{z=0} = V_{q_2}|_{z=h} = 0, \quad V_{q_3}|_{z=0} = V_{q_3}|_{z=h} = 0, \quad (19)$$

и условия адиабатичности для температуры:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial q_3} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial q_3} \right|_{z=h} = 0.$$

На входе в канал задаются компоненты вектора скорости и температура. Полагая $V_{q_2}|_{q_1=0} = 0$, $V_{q_3}|_{q_1=0} = 0$ и согласно рекомендации [1]

$$V_{q_1}|_{q_1=0} = f(q_2, q_3) + C_1(P_0 - \bar{P})f_1(q_2, q_3), \quad T|_{q_1=0} = f_3(q_2, q_3), \quad (20)$$

где $f(q_2, q_3)$ – заданное распределение скорости V_{q_1} во входном сечении, $f_3(q_2, q_3)$ – заданное распределение температуры. Слагаемое $C_1(P_0 - \bar{P})$ в выражении для $V_{q_1}|_{q_1=0}$ добавляется согласно [3] с целью вывода за пределы области решения возмущений, достигших левой границы. C_1 – константа порядка едини-

цы, определяемая равенством

$$C_1 = \frac{1}{k \cdot M}, \quad (21)$$

где k – показатель адиабаты, M – число Маха на входе.

Выражение $(P_0 - \bar{P})$ есть разность между текущим значением давления как функции координат q_2, q_3 на входе в канал и средним значением этого давления при $q_1 = 0$.

Поскольку $\iint P_0 dq_2 dq_3 = \bar{P}$, в среднем $P_0 - \bar{P}$ равно нулю. Однако в каждой точке (q_2, q_3) разность $P_0 - \bar{P}$ отлична от нуля и способствует выводу возмущений за пределы области решения [1].

На выходе из канала в дозвуковом потоке задаем одно условие

$$P_L = P_{\text{нар}} + C_2 (\dot{m}_{\text{ср}} - \dot{m}_L),$$

где P_L – давление на выходе из канала, $P_{\text{нар}}$ – наружное давление, $\dot{m}_{\text{ср}}$ – средний в момент времени t расход на длине канала, $\dot{m}_L = \iint_{S(L)} \rho V_{q_1} dq_2 dq_3$ – расход на выходе канала.

Эти расходы соответствуют одному и тому же моменту времени t . Для расчета коэффициента C_2 используется выражение [3]

$$C_2 = \frac{k \cdot M_L}{2D + \dot{m}_{\text{ср}} \cdot M_L},$$

в котором D – половина расстояния в направлении координаты q_2 на выходе из канала, M_L – число Маха на выходе. Все остальные параметры на выходе из канала должны определяться путем экстраполяции значений этих параметров во внутренней части области решения, примыкающей к выходной границе канала [1].

При численном решении сформулированной выше задачи использовались подходы, предложенные в [1] для интегрирования уравнений Навье – Стокса в случае турбулентных течений. В основе этих подходов лежат высокоточные аппроксимации производных от параметров потока по пространственным переменным. При этом для интегрирования по времени применяются явные схемы вида

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^n \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \right)^n (\Delta t)^3 + \dots, \quad (22)$$

в которых в правые части подставляются точные выражения для производных $\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} \right)^n$, вычисленные на n -м слое по времени с помощью дифференциальных уравнений Навье – Стокса.

В настоящей работе производные от параметров потока по пространству вычислялись с 8-м порядком аппроксимации. Производные по времени от параметров потока вычислялись по соотношению (22) с точностью до второго порядка. При этом вместо использования чрезвычайно громоздких аналитических выраже-

ний для вычисления $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)^n$ применялась центральная разность

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)^n = \frac{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{n+1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{n-1}\right]}{2\Delta t},$$

что позволило существенно упростить программу ЭВМ-расчетов и сократить время вычислений.

Приведем два примера расчетов на основе применения разработанной методики.

В первом примере рассматривается течение между двумя поверхностями, координаты точек которых не зависят от направления z . На нижней поверхности была расположена перегородка (турбулизатор), высота которой составляла $0,1b$, где b – расстояние между поверхностями. Число Рейнольдса описываемого течения было выбрано равным 50. Число Маха $M = 0,5$, число Прандтля $0,7$.

На рис. 2 показано распределение давления в плоскости (x, y) , перпендикулярной оси z . На рисунке видно, что за исключением резкого падения за преградой

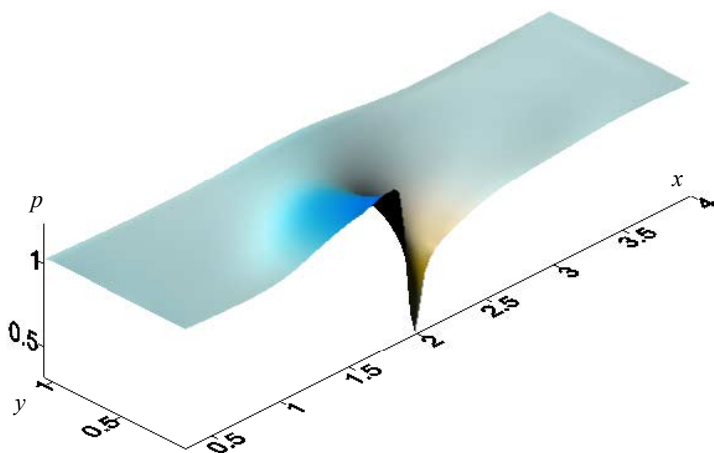


Рис. 2

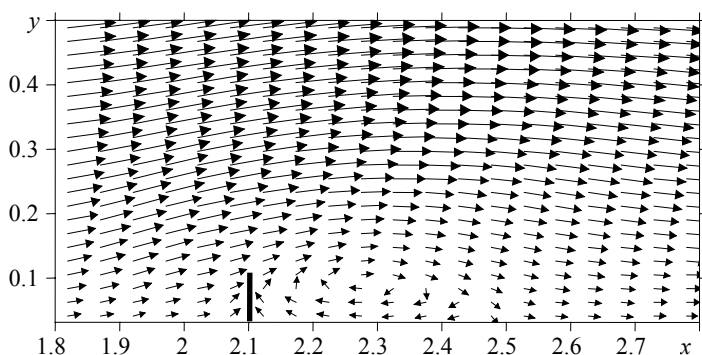


Рис. 3

изменение давления в канале носит плавный характер. На рис. 3 показаны векторы скорости в той же плоскости. Видно, что за преградой возникает вихрь. Этот вихрь является стационарным. Так как, согласно расчетам, скорости не имеют проекций на ось z , то этот вихрь представляет собой вихревую трубку с параметрами, не зависящими от z .

В другом примере рассчитывалось течение при числе $Re = 10^4$ в канале прямоугольного сечения. Высота турбулизатора составляла $0,2b$, где b – расстояние между стенками канала. На рис. 4 приведена картина мгновенного распределения давления, где наблюдаются нерегулярные колебания его величины, увеличивающиеся за турбулизатором. На рис. 5 показаны мгновенные значения проекций векторов скорости на плоскость (x, y) , а на рис. 6, а – проекции этих векторов на плоскость, параллельную турбулизатору и расположенную на расстоянии $0,5D$ позади него. Видно, что течение за турбулизатором носит нерегулярный вихревой характер. На рис. 6, б приведены проекции скорости на плоскость сечения канала, находящуюся на расстоянии D за турбулизатором. Видно, что уносимые потоком вихри распадаются. На рисунке наблюдаются вихревая пелена у дна канала и два небольших вихря у плоскости симметрии. Этот факт подтверждает гипотезу Колмогорова о распаде крупных вихрей на более мелкие [4].

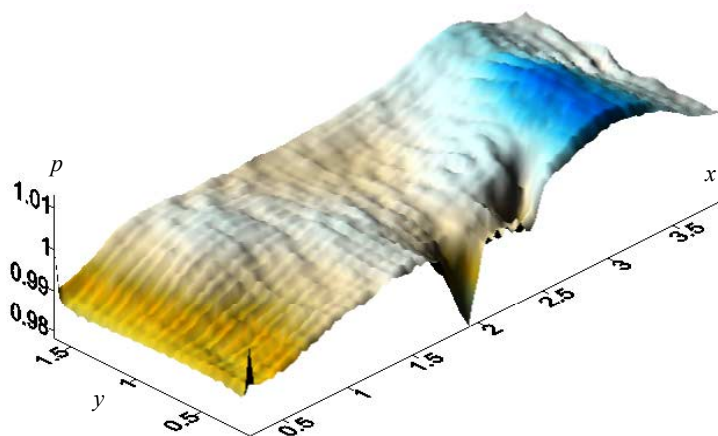


Рис. 4

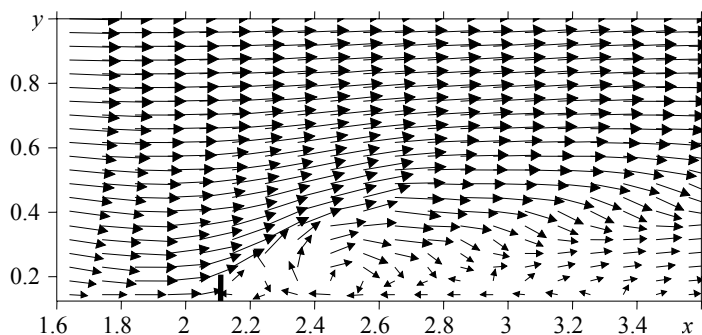


Рис. 5

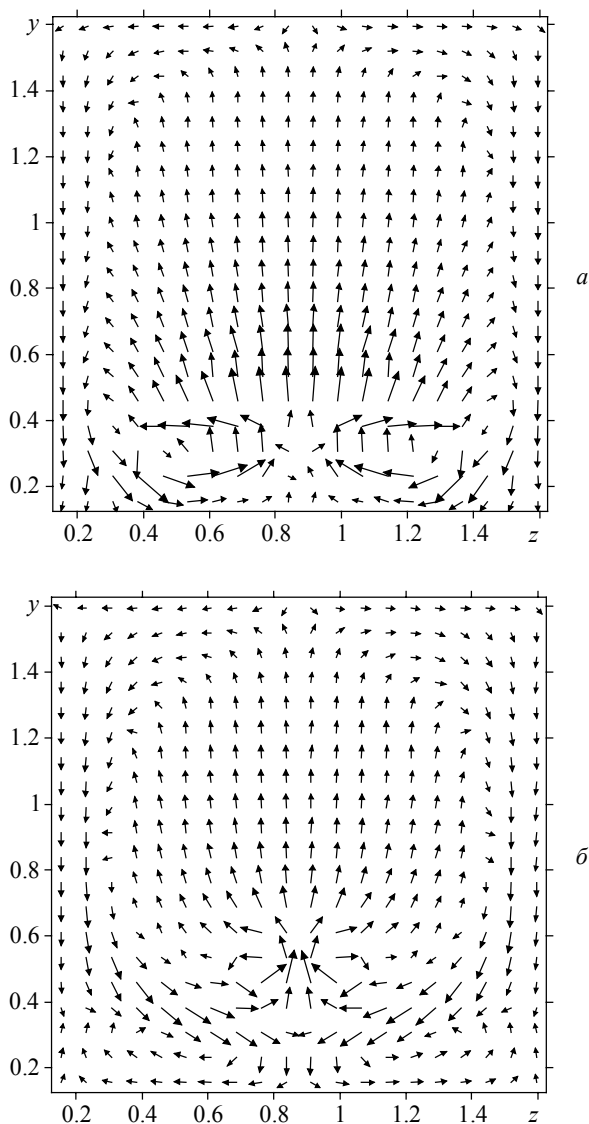


Рис. 6

Приведенные результаты рассчитывались на разностной сетке размером $64 \times 64 \times 160$. Такая сетка не позволяет рассчитывать еще более мелкие вихри, которые по теории Колмогорова обеспечивают диссипацию турбулентной энергии. Для того чтобы при $Re = 10^4$ проводить расчеты таких вихрей, необходима разностная сетка, содержащая порядка 10^9 ячеек. Сетки таких размеров можно создавать на кластере Томского государственного университета. Поэтому в качестве дальнейшего развития созданной методики в настоящее время производится ее распараллеливание на MPI.

Таким образом, разработан подход к прямому численному моделированию турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в криволинейных каналах. Представлены результаты прямого численного моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в канале с препятствием в виде поперечной пластины заданной высоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липанов А.М.* Теоретическая гидродинамика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
3. *Федорченко А.Т.* О проблеме выхода вихря через проницаемую границу расчетной области нестационарного дозвукового потока // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26. № 1. С. 114–129.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 732 с.

Статья поступила 18.09.2013г.

Liparov A. M., Vasin I. M., Shrager E. R., Krainov A. Y. A METHOD OF DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS IN CURVED CHANNELS. An approach to direct numerical simulation of turbulent flows of viscous heat-conducting gas in curved channels is presented. Results of the direct numerical simulation of turbulent flows of viscous heat-conducting gas in a channel with an obstacle in the form of a transverse plate with a given height are presented.

Keywords: viscous heat-conducting gas, Navier-Stokes equations, turbulence, direct numerical simulation

LIPANOV Alexey Matveevich (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

VASENIN Igor Mihailovich (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

SHRAGER Ernst Rafailovich (Tomsk State University)

E-mail: sher@ftf.tsu.ru

KRAINOV Alexey Yurievich (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru