

УДК 532.529, 519.63

Л.Л. Миньков, Ю.О. Степанова

**ВЛИЯНИЕ ЦИРКУЛЯЦИОННОЙ ЗОНЫ НА СКОРОСТЬ ОСЕДАНИЯ
МЕЛКИХ ЧАСТИЦ БИДИСПЕРСНОЙ СУСПЕНЗИИ¹**

Методами численного моделирования исследуется циркуляционная зона за сферической частицей при ее обтекании ламинарным потоком несжимаемой жидкости. Проводится оценка увеличения скорости седиментации мелких частиц при совместном оседании мелких и крупных частиц за счет той доли мелких частиц, которые находятся в гидродинамическом следе крупных.

Ключевые слова: *обтекание сферы, ламинарное течение, циркуляционная зона, бидисперсная суспензия, седиментация.*

В горнодобывающей промышленности и в химическом производстве широко применяются гидроциклоны, в основе принципа работы которых лежит сепарация частиц твёрдой фазы во вращающемся потоке жидкости [1]. При работе малоразмерных гидроциклонов качество разделения частиц по размерам в области тонких фракций ухудшается, что ведет к росту сепарационной функции с уменьшением размера частиц [2, 3]. Аномальный рост сепарационной функции связывают с тем, что имеет место ускоренная седиментация мелких частиц, служащая причиной усиленного выноса мелкой фракции суспензии вместе с крупной фракцией из гидроциклона [3, 4]. Механизм процесса ускоренной седиментации мелких частиц не совсем изучен.

Для объяснения этого эффекта в работе [5] была предложена ячеистая модель, построенная на определении среднего времени пребывания мелкой частицы в ячейке, окружающей крупную частицу, и последующего определения средней скорости оседания мелкой частицы.

В [6] ускоренная седиментация мелких частиц объяснялась их удержанием в погранслое крупной частицы, которое имело место для чисел $Re < 25$. При последующем увеличении числа Рейнольдса наблюдается отрыв погранслоя, и мелкие частицы не в состоянии удерживаться в окрестности крупной частицы.

Другим объяснением ускоренного оседания можно считать захват крупной частицей мелких, попадающих в гидродинамический след, образующийся за крупной частицей при числах $Re > 25$ [7]. Целью данной работы является исследование циркуляционной зоны, возникающей при обтекании сферической частицы ламинарным потоком несжимаемой жидкости, и определение среднеобъемной скорости оседания мелких частиц при седиментации бидисперсной суспензии на основе ячеистой модели.

Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о стационарном обтекании сферы ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости в диапазоне чисел Рейнольдса от 0 до 1000.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России 2009-2013 г.» Гос. Соглашение №14.В37.21.0872.

Система уравнений, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости для осесимметричного приближения в цилиндрической системе координат, имеет вид [8]

$$\begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= v \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= v \left(\nabla^2 V_z \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Область интегрирования системы уравнений (1), представленная на рис. 1, ограничена входной границей AB, выходной границей BC, осью симметрии AE ∪ DC, а также контуром тела ED.

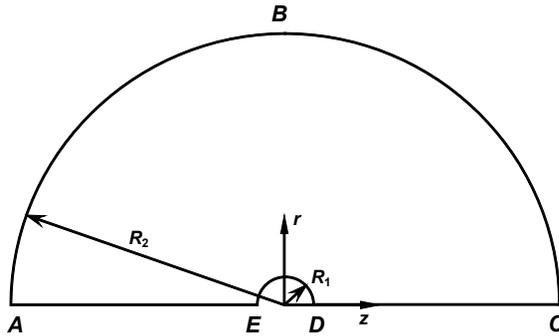


Рис. 1. Область численного интегрирования

На границе области задаются следующие граничные условия:

На твердой стенке (ED):

$$-R_1 < z < R_1, \quad r = \sqrt{R_1^2 - z^2}, \quad V_r = 0, \quad V_z = 0.$$

На входной границе (AB):

$$-R_2 < z < 0, \quad r = \sqrt{R_2^2 - z^2}, \quad V_r = 0, \quad V_z = U_0.$$

На выходной границе (BC):

$$0 < z < R_2, \quad r = \sqrt{R_2^2 - z^2}, \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

На оси симметрии AE ∪ DC:

$$-R_2 < z < -R_1, \quad R_1 < z < R_2, \quad V_r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Отношение радиусов границ (ABC) и (ED) задавалось постоянным, $R_2/R_1 = 14$.

Метод решения задачи

Решение системы уравнений (1) проводилось конечно-разностным методом по схеме Патанкара [9] с использованием процедуры SIMPLE для согласования поля давления и поля скоростей жидкости и противопоточной схемы второго порядка точности для определения конвективных потоков.

Реализация указанного метода осуществлялась с помощью пакета программ ANSYS-Fluent 14.5. Для построения конечно-разностной сетки использовалась программа Gambit 2.3.16.

Для исследования сходимости численного решения были проведены расчеты по определению коэффициента сопротивления сферы $C_{D,i}$ на четырех равномерных сетках, в каждой из которых количество узлов в радиальном направлении (AE), (DC) и в окружном направлении (ED), (ABC) задавалось одинаковым: сетка № 1 – 2500 ячеек, № 2 – 10 000 ячеек, № 3 – 40 000 ячеек, № 4 – 160 000 ячеек. Результаты, полученные на сетке № 4, принимались за точное значение $C_{D,t}$.

В таблице приведена относительная погрешность коэффициента сопротивления сферы

$$\frac{|C_{D,i} - C_{D,t}|}{C_{D,t}} \cdot 100 \%,$$

полученная для $Re = 1; 10; 100; 1000$. Видно, что, в целом, сгущение разностной сетки ведет к уменьшению относительной погрешности вычислений. Дальнейшие расчеты проводились на сетке № 3.

Относительная погрешность вычисления коэффициента сопротивления сферы C_D

Re	Сетка № 1	Сетка № 2	Сетка № 3
1	1,68	0,23	0,003
10	1,52	0,03	0,14
100	6,02	1,47	0,34
1000	30,60	11,20	3,40

На рис. 2 показана зависимость коэффициент сопротивления сферы в зависимости от числа Рейнольдса. Точки соответствуют результатам численного решения, а сплошная кривая – данным экспериментальной формулы Шиллера – Науманна [9]:

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}).$$

Различие в результатах численного решения и данных эксперимента не превосходит 5 % для $Re \leq 200$. При более высоких значений числа Рейнольдса это различие возрастает и достигает 23,7 % для $Re = 1000$. Такое отклонение рассчитанной зависимости коэффициента сопротивления от экспериментальной можно объяснить тем, что при высоких значениях числа Re (порядка 1000) начинает проявляться турбулизация потока и течение в окрестности сферы перестает быть осесимметричным.

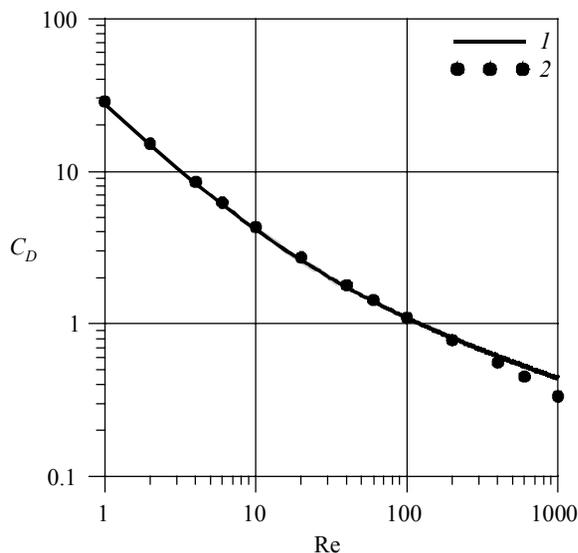


Рис. 2. Зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса.
1 – формула Шиллера – Науманна; 2 – численное решение

Зависимость размера циркуляционной зоны от чисел Рейнольдса

Известно, что при числах $Re > 25$ [7, 11] происходит образование циркуляционной зоны за кормовой частью сферы, которая обусловлена отрывом пограничного слоя от поверхности сферы. На рис. 3 приведена зависимость относительного объема циркуляционной зоны $f(Re) = v_{\text{цирк}}/v_{\text{сф}}$ от числа Рейнольдса Re . Размер циркуляционной зоны монотонно увеличивается при увеличении значения Re . Величина относительного объема циркуляционной зоны аппроксимируется полиномом второй степени в диапазоне $Re = 25 \div 1000$ с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9998$:

$$f(Re) = -0,258 + 1,017 \frac{Re}{100} - 3,78 \cdot 10^{-2} \left(\frac{Re}{100} \right)^2. \quad (2)$$

Как следует из формулы (2), циркуляционная зона начинает образовываться при $Re_* = 25,6$.

Размер циркуляционной зоны можно также характеризовать ее длиной, определяемой как расстояние от кормовой точки сферы D (рис. 1) до точки пересечения предельной линии тока циркуляционной зоны с осью симметрии, отнесенной к диаметру сферы. На рис. 4 приведена зависимость длины циркуляционной зоны $L(Re)$ от числа Рейнольдса. Результаты численного моделирования, показанные в виде кружочков, аппроксимируются с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9997$ зависимостью

$$L(Re) = 2,858 \exp\left(-\frac{28,778}{Re^{0,7}}\right).$$

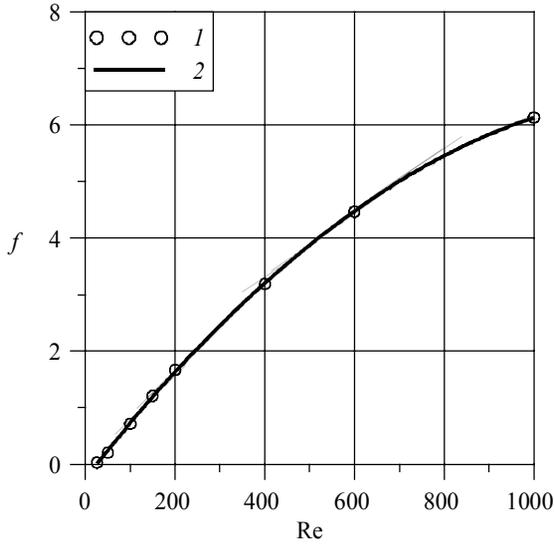


Рис. 3. Зависимость объема циркуляционной зоны от числа Рейнольдса.
1 – данные численного эксперимента; 2 – аппроксимационная кривая.

Результаты экспериментов, выполненных Танедой [12] для Re от 40 до 100, изображены на рис. 4 в виде треугольников. Видно хорошее согласование между расчетными и экспериментальными данными. С увеличением числа Рейнольдса в диапазоне от 10 до 1000 наблюдается увеличение длины циркуляционной зоны, скорость роста которой снижается при приближении значения Re к 1000.

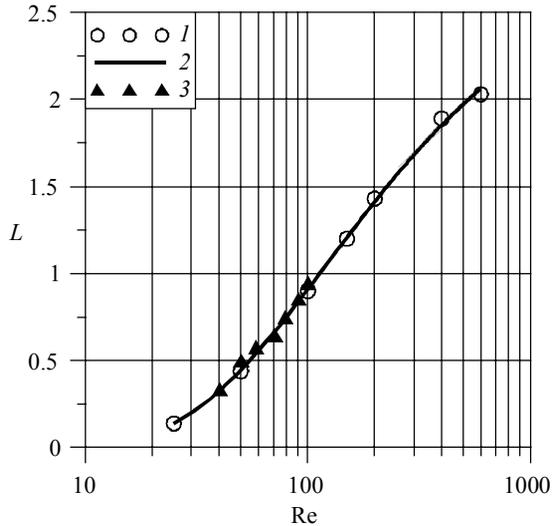


Рис. 4. Зависимость длины циркуляционной зоны от числа Рейнольдса.
1 – численный эксперимент; 2 – аппроксимационная кривая;
3 – данные эксперимента [12]

Скорость седиментации мелких частиц в бидисперсной суспензии

Рассмотрим седиментацию бидисперсной суспензии, состоящей из смеси крупных частиц диаметром d_c и мелких частиц диаметром d_f . Вокруг каждой крупной частицы построим сферическую ячейку радиуса R (рис. 5).

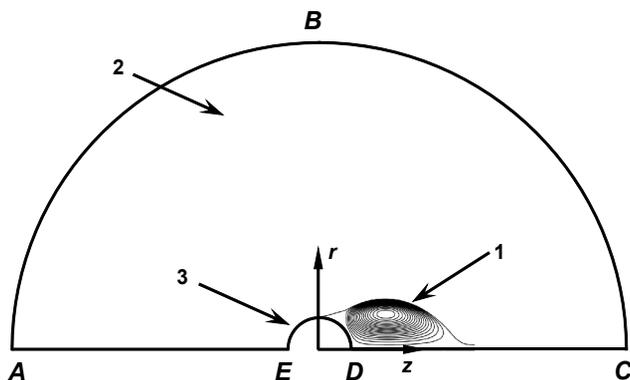


Рис. 5. Схема сферической ячейки: 1 – циркуляционная зона; 2 – свободный объем сферической ячейки; 3 – крупная частица

Предположим, что при совместном оседании мелкие частицы, попавшие в циркуляционную зону, образовавшуюся за крупной частицей, имеют скорость оседания такую же, как и крупная частица $U_c \sim (d_c)^2$, а другие мелкие частицы оседают со своей собственной скоростью $U_f \sim (d_f)^2$. Пусть рассматриваемая ячейка имеет объем $v_{яч}$, а циркуляционная зона – объем $v_{цирк} < v_{яч}$. Тогда среднеобъемная скорость оседания мелкой частицы в ячейке будет определяться выражением

$$\langle U_f \rangle = \frac{v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}} U_c + \frac{v_{яч} - v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}} U_f,$$

или

$$\frac{\langle U_f \rangle}{U_f} = \frac{v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}} \left(\frac{d_c}{d_f} \right)^2 + \frac{v_{яч} - v_{сф} f(Re)}{v_{яч} - v_{сф}}.$$

Поскольку объемная доля крупной частицы выражается через объем ячейки и объем самой частицы соотношением: $\alpha_c = v_{сф} / v_{яч}$, то

$$\frac{\langle U_f \rangle}{U_f} = \frac{1}{1 - \alpha_c} + \frac{\alpha_c f(Re)}{1 - \alpha_c} \left(\left(\frac{d_c}{d_f} \right)^2 - 1 \right). \quad (3)$$

Как видно из формулы (3), средняя скорость оседания мелких частиц увеличивается пропорционально отношению квадратов диаметров крупной и мелкой частиц, что находится в согласии с экспериментальными данными работы [13], полученными для водо-песчаной суспензии в тарельчатой центрифуге. Из (2) и (3) также следует, что средняя скорость оседания мелких частиц будет монотонно возрастать с увеличением числа Рейнольдса и объемной доли крупных частиц.

Границы применимости формулы (3) определяются тем, что циркуляционная зона 1 (рис. 5) должна полностью находиться внутри сферической ячейки 2, т.е.

$d_c L(\text{Re}) + d_c/2 < R$, откуда следует ограничение на объемную долю крупных частиц в зависимости от числа Рейнольдса:

$$\alpha_c \leq \frac{1}{[1 + 2L(\text{Re})]^3}. \quad (4)$$

Как следует из (3), максимальный прирост скорости оседания мелких частиц при совместном их оседании с крупными частицами получается при максимально возможном значении α_c , которое определяется из (4) (знак равенства):

$\alpha_m(\text{Re}) = [1 + 2L(\text{Re})]^{-3}$. Тогда максимальное значение средней скорости седиментации мелких частиц в зависимости от Re имеет вид:

$$\frac{\langle U_f \rangle_m}{U_f} = \frac{1}{1 - \alpha_m(\text{Re})} + \frac{\alpha_m(\text{Re})f(\text{Re})}{1 - \alpha_m(\text{Re})} k, \quad (5)$$

где $k = (d_c/d_f)^2 - 1$.

На рис. 6 показана зависимость максимального значения средней скорости седиментации мелких частиц от числа Re при различных значениях k . Видно, что зависимость носит немонотонный характер, что объясняется различной скоростью нарастания длины и объема циркуляционной зоны при увеличении числа Рейнольдса.

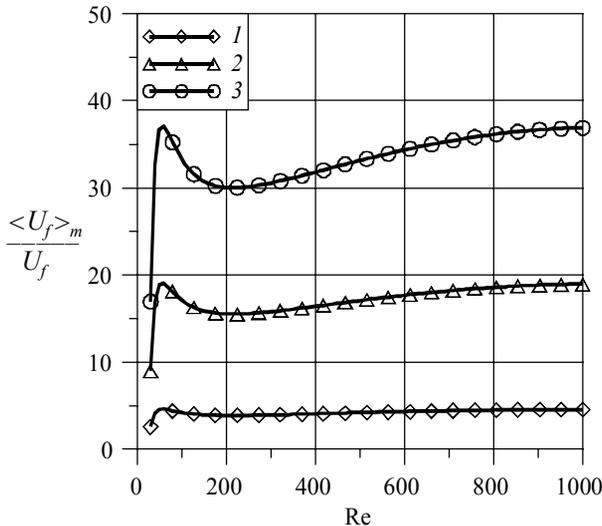


Рис. 6. Максимально возможная скорость седиментации мелких частиц при k : 1 – 100, 2 – 500, 3 – 1000

Заключение

На основе численного моделирования обтекания несжимаемой жидкостью сферической частицы получены характерные размеры (объем и длина) циркуляционной зоны, формирующейся в кормовой части сферы, в зависимости от числа Рейнольдса для $25 < \text{Re} < 1000$.

Получена формула для скорости оседания мелких частиц в присутствии оседающих крупных частиц (случай бидисперсной суспензии) в предположении, что мелкие частицы, попавшие в циркуляционную зону, оседают со скоростью крупных частиц. Получено выражение для максимального прироста скорости оседания мелких частиц в зависимости от числа Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терновский И.Г., Кутенов А.М. Гидроциклонирование. М.: Наука, 1994.
2. Heiskanen K. Particle Classification. London – Glasgow – New York – Tokyo – Melbourne – Madras: Chapman and Hall, 1993.
3. Finch J.A. Modeling a fish-hook in hydrocyclone selectivity curves // Powder Technol. 1983. No. 36. P. 127–129.
4. Neesse Th., Dueck J., Kerkhoff Th. Feinstkornabscheidung im Hydrozyklon // Aufbereitungstechnik. 1996. V.37. No.9. P. 413–421.
5. Dück J., Minkov L., Neeße Th. A hydrodynamic model for enhanced sedimentation of small particles in a bidisperse suspension // Thermophysics and Aeromechanics. 2001. V. 8. No. 2. P. 259–269.
6. Schubert H. On the origin of «anomalous» shapes of the separation curve in hydrocyclone separation of fine particles // Part. Sci. Technol. 2004. V. 22. No.3. P. 219–234.
7. Ван-Дайк М. Альбом течения жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
9. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 149 с.
10. Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. V. 77. P. 318.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
12. Taneda S. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds number // J. Phys. Soc. Japan. 1956. V. 11. No. 10. P. 1104–1108.
13. Gerhart Ch., Dück J., Neeße Th. Grundlagen-untersuchungen zur behinderten Sedimentation polydispenser Suspensionen bei der Hydrostromklassierung. Teil I: Untersuchungen in einer Laborzentrifuge // Aufbereitungstechnik. 1999. B. 40. N 7. S. 328–334.

Статья поступила 17.08.2013 г.

Minkov L.L., Stepanova Y.O. INFLUENCE OF THE CIRCULATION ZONE ON SETTLING VELOCITY OF FINE PARTICLE IN BIDISPERSE SUSPENSION. The circulation zone formed behind a spherical particle under a flow around it in incompressible fluid is investigated on the base of numerical simulation. The increase in the settling velocity of fine particles in joint sedimentation of small and large particles due to the fraction of small particles that are in the hydrodynamic wake of large ones is estimated.

Keywords: flow past a sphere, laminar flow, circulation zone, bidisperse suspension, sedimentation.

Minkov Leonid Leonidovich (Tomsk State University)
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Stepanova Yuliya Olegovna (Tomsk State University)