

УДК 519.6:532.516

Б.О. Цыденов, А.В. Старченко

**ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМ «РЕКА – ОЗЕРО»
НА ПРИМЕРЕ ВЕСЕННЕГО ТЕРМОБАРА В ОЗЕРЕ КАМЛУПС¹**

Работа посвящена описанию математической модели и численного метода для предсказания гидродинамических процессов, сопровождающих развитие весеннего термобара в глубоководном озере. Особое внимание уделено верификации построенной модели: результаты выполненных расчётов показывают хорошее качественное и количественное согласование с результатами расчётов других авторов и натурных наблюдений, проведённых на озере Камлупс. Для расчёта течений со смешанной конвекцией, когда плотность среды зависит не только от температуры, но и давления и солёности, разработан алгоритм SIMPLD, представляющий собой модификацию известного алгоритма SIMPLE Патанкара и Сполдинга.

Ключевые слова: *термобар, математическая модель, температура максимальной плотности, приближение Буссинеска, численный эксперимент, озеро Камлупс.*

Исследования естественной конвекции в гидродинамических процессах экосистемы водоёмов вызывают постоянно растущий научный и практический интерес. Особое внимание уделяется данной тематике в последние годы в связи с проблемой взаимодействия человечества с окружающей средой. К числу явлений, которое может оказать существенное влияние на процессы распространения загрязнений в водоёме, относится термобар. Под *термобаром* понимается узкая зона в глубоком озере умеренных широт, в которой происходит погружение имеющей наибольшую плотность воды от поверхности до дна.

Первые результаты по изучению термобара в озёрах были получены Ф.А. Форелем (F.A. Forel) [1], А.И. Тихомировым [2], Дж.К. Роджерсом (G.K. Rodgers) [3].

Весной образование и развитие термобара в водоёме может существенным образом зависеть от наличия речного притока с более высокой температурой, вносящего свой вклад в гидростатическую неустойчивость водных масс. Исследованием влияния притока на формирование термобара занимались авторы работ [4 – 6]. Детальные наблюдения термобара, вызванного речным стоком, проведены для нескольких канадских озёр, к числу которых относится и озеро Камлупс [7 – 9]. Оно находится на юго-западе Канады (провинция Британская Колумбия) в 340 км северо-восточнее Ванкувера и расположено между 50°26' – 50°45' с. ш. и 120°03' – 120°32' з. д. по течению реки Томпсон, имеет вытянутую форму.

В 1979 году П.Д. Киллворт и др. (Killworth P.D. et al.) [10] построили одномерную модель озера Камлупс, которая учитывает сезонные изменения температуры речного притока, и описали годовое изменение термической структуры во-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ для молодых ученых и аспирантов (СП-71.2012.5), Программы развития деятельности студенческих объединений Национального исследовательского Томского государственного университета «Инновации и творчество на 2012–2013 гг.», ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013» (соглашение №14.В37.21.0667), Министерства образования и науки РФ (задание №8.4859.2011).

доёма. П.Р. Холланд и др. (Holland P.R. et al.) [11] с помощью квазидвухмерной модели, учитывающей влияние силы Кориолиса, получили достаточно реалистичную картину развития термобара в озере Камлупс, которая согласуется с натурными наблюдениями Э.К. Кармака и др. (E.C. Carmack et al.) [8].

Данные измерений гидрографических станций, расположенных в акватории озера, позволили Э.К. Кармаку и др. [8] выявить особенности формирования течений в озере Камлупс, обусловленных стоком реки Томпсон. В зависимости от времени года авторы [8] выделили следующие характерные варианты развития течений вблизи впадения реки в озеро (рис. 1):

А – «*зима*», когда речная водная масса, имеющая более низкую температуру по сравнению с температурой воды в озере (температура озёрной воды, в свою очередь, меньше температуры максимальной плотности), втекая в водоём, остаётся на его поверхности;

В – «*ранняя весна*», когда река, проникающая в озеро с температурой максимальной плотности, распространяется по склону под действием силы тяжести;

С – «*середина весны*», когда речная вода продвигается сначала поверхностной струёй, а затем, смешиваясь с более холодной озёрной водной массой, начинает погружаться вниз, формируя термобар;

Д – «*поздняя весна*», когда менее плотная вода речного притока интенсивно распространяется по поверхности озера.

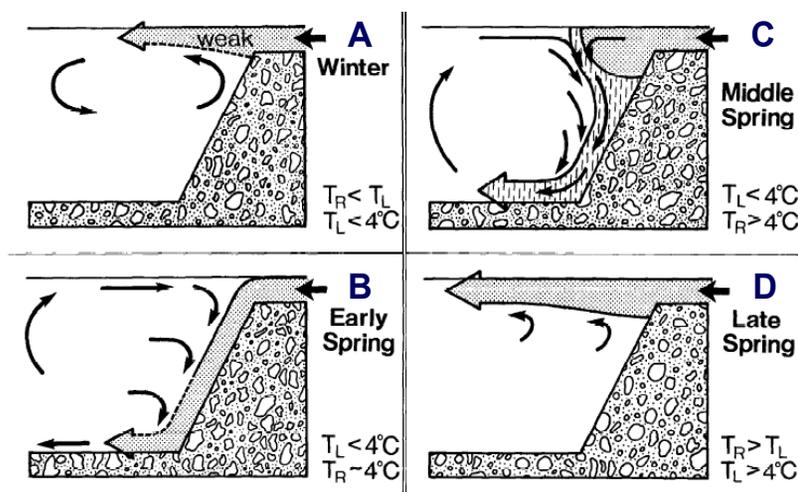


Рис. 1. Схема видов циркуляций в районе втеkania р. Томпсон в оз. Камлупс, описанная Э.К. Кармаком и др. [8] на основе натурных наблюдений

Целью данной работы является моделирование вышеприведенных сценариев взаимодействия систем «река – озеро» с помощью численной модели озера высокого разрешения.

Физическая и математическая постановка задачи

Весной, после вскрытия водоёма, температура воды в озере меньше *температуры максимальной плотности* (ТМП). Увеличение проникающей солнечной радиации и приток тёплых речных вод приводят к тому, что прибрежные поверхно-

стные воды озера быстрее нагреваются и достигают ТМП. Более теплые и наиболее плотные водные массы опускаются до дна, образуя фронтальный раздел (термобар). Слева и справа от термобара образуются две циркуляционные ячейки с зоной опускания воды. Этот фронтальный раздел препятствует горизонтальному перемешиванию вод между двумя циркуляционными ячейками и проникновению прибрежных вод в центральную часть водоёма. По мере прогрева озера термобар смещается к центру и исчезает, когда температура всей акватории становится больше ТМП.

В качестве исследуемой области выбрано вертикальное сечение озера Камлупс, соответствующее направлению впадения р. Томпсон, начало системы координат совпадает с устьем реки (рис. 2, а). Расчётная область имеет протяженность 10 км и глубину 150 м (рис. 2, б). Открытый участок речного стока (на левой границе) и оттока (на правой границе) составляет 15 м от поверхности озера.

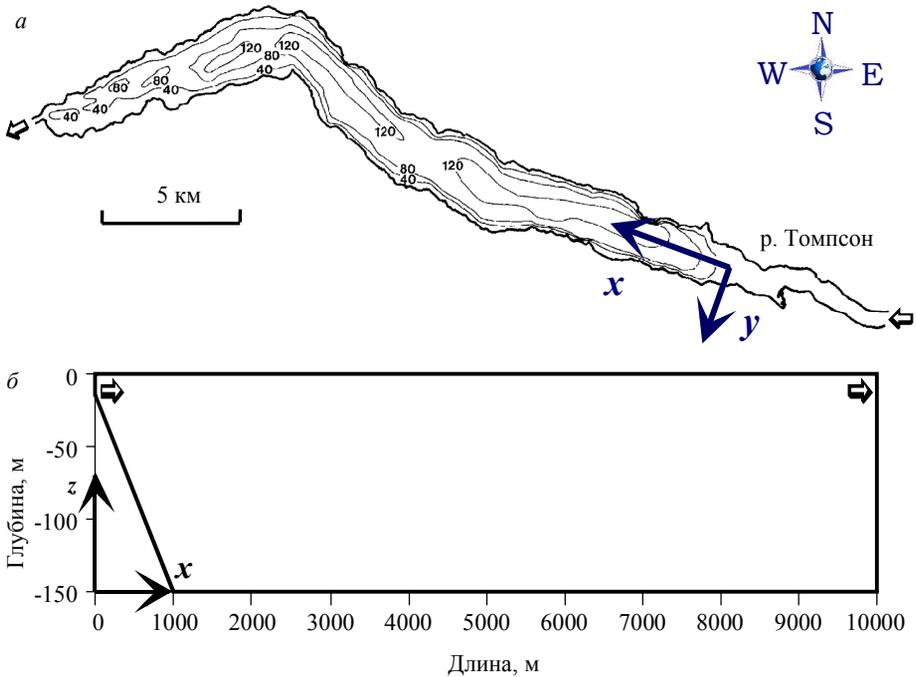


Рис. 2. Морфометрия оз. Камлупс: а – батиметрия оз. Камлупс, б – расчётная область (продольное сечение)

Натурные наблюдения показывают, что при образовании и развитии термобара основные изменения происходят в направлении от устья реки к центру озера (вдоль оси Ox на рис. 2, а). При этом характеристики в направлении, перпендикулярном оси Ox (вдоль оси Oy на рис. 2, а), достаточно однородны. Поэтому можно с большой степенью обоснованности исключить из уравнений математической модели все производные по y , тем самым рассматривая явление термобара в квазидвухмерном приближении [12]. С учётом этого допущения негидростатическая модель термобара, учитывающая влияние силы Кориолиса, связанной с вращением Земли, и записанная в приближении Буссинеска, имеет следующий вид:

а) уравнения количества движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2\Omega_z v - 2\Omega_y w, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\Omega_x w - 2\Omega_z u, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \frac{\rho}{\rho_0} + 2\Omega_y u - 2\Omega_x v,\end{aligned}$$

б) уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

в) уравнение энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{\text{sol}}}{\partial z};$$

г) уравнение баланса солёности в озере:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial wS}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right),$$

где u , v – горизонтальные компоненты скорости; w – вертикальная компонента скорости; Ω_x , Ω_y и Ω_z – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; g – ускорение свободного падения; c_p – удельная теплоёмкость; T – температура; S – солёность; p – давление; ρ_0 – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, температуре T_L и солёности S_L (T_L и S_L – характерная температура и солёность озера соответственно). Коротковолновая солнечная радиация, проникающая в воду, рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра

$$H_{\text{sol}} = Q \exp(-\varepsilon_{\text{abs}} |z|),$$

где Q – поток тепла через свободную поверхность, ε_{abs} – коэффициент поглощения.

Коэффициенты интенсивности диффузионного переноса импульса и тепла в соответствующем направлении рассчитываются следующим образом [11]:

$$K_x = 2,5 \text{ м}^2/\text{с}, \quad K_z = \begin{cases} 0,0004 + 6 \cdot 10^{-7} (N^2)^{-0,5} \text{ м}^2/\text{с}, & \text{если } N^2 > N_{\text{min}}^2, \\ 0,02 \text{ м}^2/\text{с}, & \text{если } N^2 \leq N_{\text{min}}^2, \end{cases}$$

$$D_x = K_x, \quad D_z = K_z,$$

где $N_{\text{min}}^2 = 9,371 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-2}$. Пороговое значение для условия устойчивости N_{min}^2 вводится для того, чтобы избежать больших значений K_z при $N^2 \rightarrow 0$. Для определения условия устойчивой стратификации используется частота Брента – Вьяйсяля (частота плавучести)

$$N^2 = g\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \Gamma \right),$$

где α – коэффициент термического расширения, Γ – адиабатический градиент температуры.

В качестве уравнения состояния $\rho = \rho(T, S, p)$ выбрано уравнение Чена – Миллера [13], принятое UNESCO. Данное уравнение состояния связывает плотность воды с температурой, солёностью, давлением и справедливо в диапазоне $0 \leq T \leq 30$ °C, $0 \leq S \leq 0,6$ г/кг, $0 \leq p \leq 180$ бар.

В начальный момент времени система находится в состоянии покоя и удовлетворяет заданным полям температуры и солёности:

$$t = 0: u = 0; v = 0; w = 0; T = T_L; S = S_L.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

а) на поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \frac{\partial v}{\partial z} = 0; w = 0; \frac{\partial S}{\partial z} = 0; D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{\rho_0 \cdot c_p},$$

б) на дне (на твёрдых границах):

$$u = 0; v = 0; w = 0; \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \frac{\partial S}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на левой границе (см. рис. 2, б):

$$u = u_R; v = 0; w = 0; T = T_R; S = S_R,$$

где u_R – скорость речного притока, T_R и S_R – температура и солёность реки соответственно.

г) на правой границе:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности $p = p_a$ (p_a – атмосферное давление) методом Рунге – Кутты четвёртого порядка точности. Уравнение гидростатики выводится из уравнения движения для вертикальной компоненты скорости (при условии $w = 0$ и отсутствии силы Кориолиса) и имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Численный метод решения

Решение конвективно-диффузионных уравнений основано на *методе конечных объёмов* (МКО), идея которого легко поддается прямой физической интерпретации [14]. Для получения пространственной дискретизации задачи расчётная область (см. рис. 2, б) разбивается на соприкасающиеся конечные объёмы так, чтобы каждая узловая точка содержалась в одном конечном объёме. Заданная сетка определяется множеством узлов и множеством значений сеточных функций. Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому конечному объёму с использованием кусочно-гладких профилей, интерполирующих изменение сеточной функции между узлами сетки. Полученный дискретный аналог выражает интегральный закон сохранения для конечного объёма [14]. Следует заметить, что МКО занимает лидирующее положение по отношению к иным способам дискретизации уравнений гидрогазодинамики, к примеру, этот метод используется в

гидродинамических пакетах FLUENT, STARCCD, CFX, CFD-ACE, FINE (NUMECA) и др. [15]. Согласно МКО, скалярные величины (температура, давление, солёность) определяются в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости – в средних точках на границах ячеек. В целях приближения расчётной области к прибрежному профилю озера Камлупс применяется метод блокировки фиктивных областей [14]: приравниваются нулю компоненты скорости в выключенной зоне за счёт использования больших значений коэффициентов вязкости в этой зоне.

Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка – Николсон. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме QUICK Леонарда [16].

Для согласования рассчитываемых полей скорости и давления разработана процедура SIMPLED для течений с плавучестью, представляющая собой модификацию метода SIMPLE Патанкара и Сполдинга [14]. Алгоритм SIMPLED основан на циклической последовательности операций «предположение – коррекция»:

1. Задание приближенного поля давления p^* , температуры T^* и солёности S^* .

2. Решение уравнений количества движения для получения приближенных значений компонент скорости u^* и w^* из уравнений вида (здесь и ниже используются обозначения, принятые в [14])

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + b^u + (p_P^* - p_E^*) h_z;$$

$$a_n^w w_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^w w_{nb}^* + b^w + (p_P^* - p_N^*) \Delta x - \frac{\rho_n^* g}{\rho_0} h_x \cdot h_z,$$

где \sum_{nb} означает суммирование по всем соседним узлам конечного объема W, E, S и N ; h_x и h_z – шаги сетки в соответствующем направлении.

3. Решение уравнений энергии (для получения T) и солёности (для получения S) и расчёт $\rho' = \rho(p^*, T, S) - \rho(p^*, T^*, S^*)$.

4. Решение уравнения для поправки давления p' из уравнений

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b,$$

где $a_E = d_e h_z$, $a_W = d_w h_z$, $a_N = d_n h_x$, $a_S = d_s h_x$, $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$,

$$b = (u_w^* - u_e^*) h_z + (w_s^* - w_n^*) h_x + \frac{g}{\rho_0} (c_n \rho'_n - c_s \rho'_s) h_x.$$

5. Расчёт p путём добавления p' к p^* .

6. Корректировка компонент скорости u и w из формул вида

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E);$$

$$w_n = w_n^* + (p'_P - p'_N) d_n - \frac{\rho'_n g}{\rho_0} c_n,$$

где $d_e = \frac{h_z}{a_e^u}$, $d_n = \frac{h_x}{a_n^w}$, $c_n = \frac{h_x \cdot h_z}{a_n^w}$.

7. Решение уравнений энергии, солёности, количества движения для v и расчёт $\rho = \rho(p, T, S)$.

8. Возврат к пункту 2 и повтор расчётов до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Системы сеточных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом нижней релаксации или явным методом Н.И. Булеева [17].

Результаты расчётов

В работах [18, 19] представлены результаты тестовых экспериментов для случая квадратной каверны при изотермических боковых границах, которые полностью соответствуют картине течения, приведенной в книге В.И. Полежаева и др. [20]. В настоящей работе предпринята попытка повторить численный эксперимент П.Р. Холланда и др. [11].

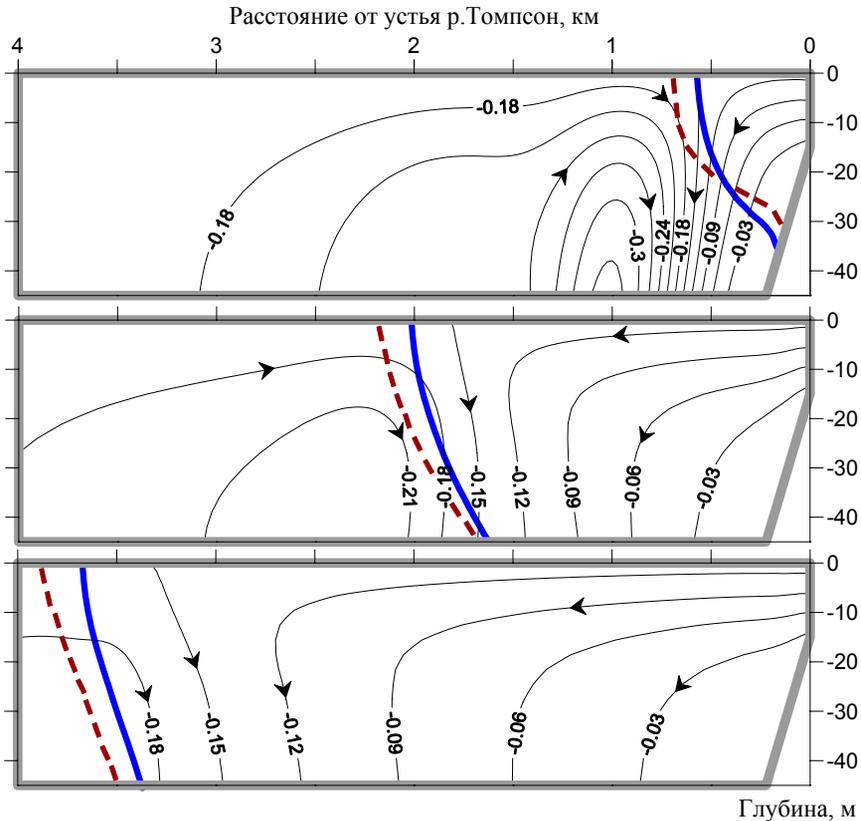


Рис. 3. Линии тока и профиль температуры максимальной плотности (жирная сплошная линия) через 8, 16 и 24 суток (сверху вниз) от начала вычислительного эксперимента. Пунктиром показано положение температуры максимальной плотности, приведенное в работе П.Р. Холланда и др. [11]

Начальное распределение температуры в озере Камлупс имеет постоянное значение, равное $2,4\text{ }^{\circ}\text{C}$, в то время как температура воды в реке соответствует $3,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ и нагревается на $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ в день. Река Томпсон впадает в озеро со скоростью $0,01\text{ м/с}$, минерализация воды в озере и в реке составляет $0,1\text{ г/кг}$. Поток тепла,

поступающий на водную гладь, равен 170 Вт/м^2 , коэффициент поглощения проникающей в воду солнечной радиации – $0,3 \text{ м}^{-1}$.

Расчётная область (см. рис. 2, б) покрывается равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25 \text{ м}$ и $h_z = 3 \text{ м}$. Шаг по времени $\Delta t = 60 \text{ с}$. Вычисления проводились на суперкомпьютере ТГУ «СКИФ Cyberia».

На рис. 3 изображены линии тока и температура максимальной плотности (жирная сплошная линия), которые рассчитаны для тех же моментов времени, как в работе [11]. Важно заметить, что результаты проведённых расчётов (см. рис. 3) показывают хорошее качественное и количественное согласование с результатами расчётов П.Р. Холланда и др. [11, рис. 2].

Также можно сопоставить рассчитанные значения плотности воды на глубине 5 м (рис. 4) и изотермы в озере через 20 суток (рис. 5).

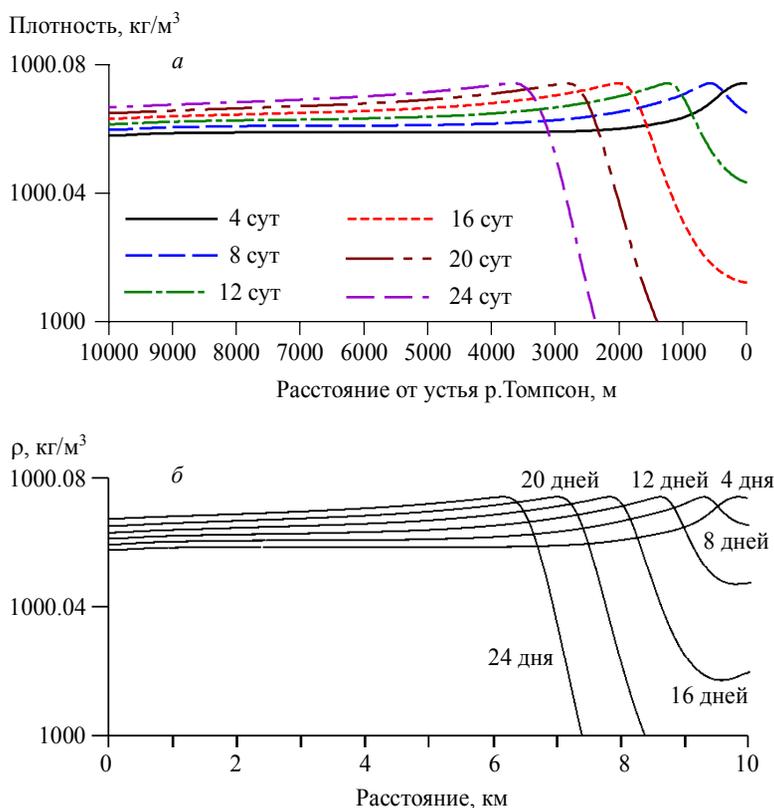


Рис. 4. Вычисленные значения плотности на глубине 5 м: результаты расчётов (а), результаты П.Р. Холланда и др. [11] (б)

Сравнивая рис. 4 и 5, видим, что физическая картина динамики развития термобара достаточно хорошо согласуется с результатами П.Р. Холланда и др. [11]. Следует заметить, что в численной модели некоторые параметры (например, солёность реки) заданы неточно ввиду отсутствия в литературе конкретных значений. Кроме того, есть отличие и в численном методе: в данной работе аппроксимация нестационарного члена осуществляется при помощи разностной схемы

Кранка – Николсона второго порядка точности. По этой причине имеет место незначительное различие результатов.

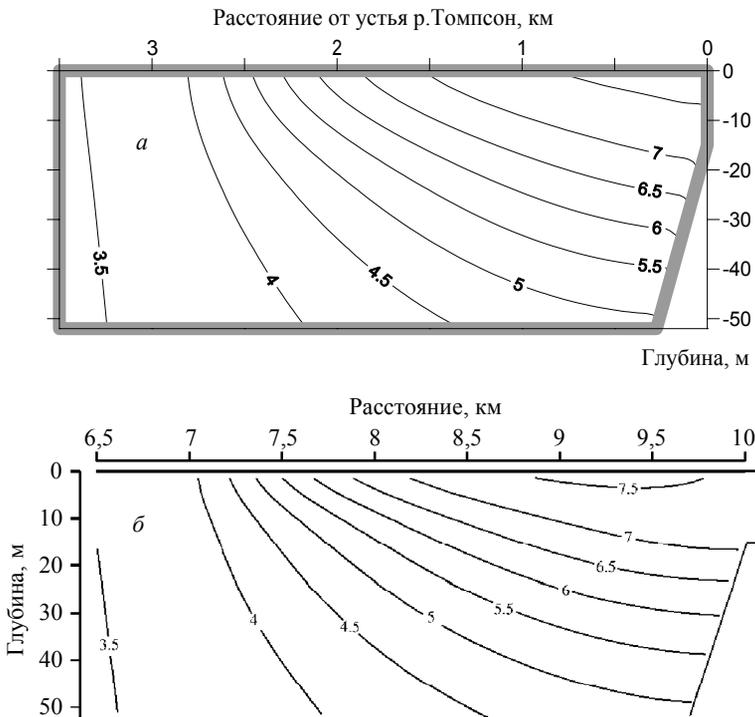


Рис. 5. Изотермы ($^{\circ}\text{C}$) через 20 сут от начала вычислительного эксперимента: результаты расчётов (а), результаты П.Р. Холланда и др. [11] (б)

С целью воспроизведения сценариев течений, соответствующих случаям «зима» (А), «ранняя весна» (В), «середина весны» (С) и «поздняя весна» (D) (см. рис. 1) проведена серия численных экспериментов. Рассмотрим эти случаи.

Случай «зима». Для моделирования данного вида циркуляции задавались следующие характеристики температуры: начальное распределение температуры в озере составляло $2,4^{\circ}\text{C}$, а температура воды втекающей реки Томпсон имела значение $0,4^{\circ}\text{C}$. На рис. 6 попарно представлены векторные поля скорости и изотермы, построенные через 8 сут от начала эксперимента.

Видно, что речная струя распространяется по поверхности озера благодаря тому, что на протяжении всего зимнего периода речная вода остаётся более холодной (следовательно, менее плотной), чем озёрная. В области впадения реки устанавливается обратная температурная стратификация с увеличением температуры воды в озере с глубиной (см. изотермы на рис. 6). За 8 суток поверхностная струя достигает расстояния 3,2 км, а затем её продвижение существенно замедляется. Целостная картина течений в зимний период заключается в том, что речная вода имеет тенденцию оставаться на поверхности озера в силу своей более низкой плотности, но при продвижении в центр озера непрерывно смешивается с водной массой водоёма. Важно также заметить, что в придонной области возникает очень слабое течение, вызванное силой Кориолиса.

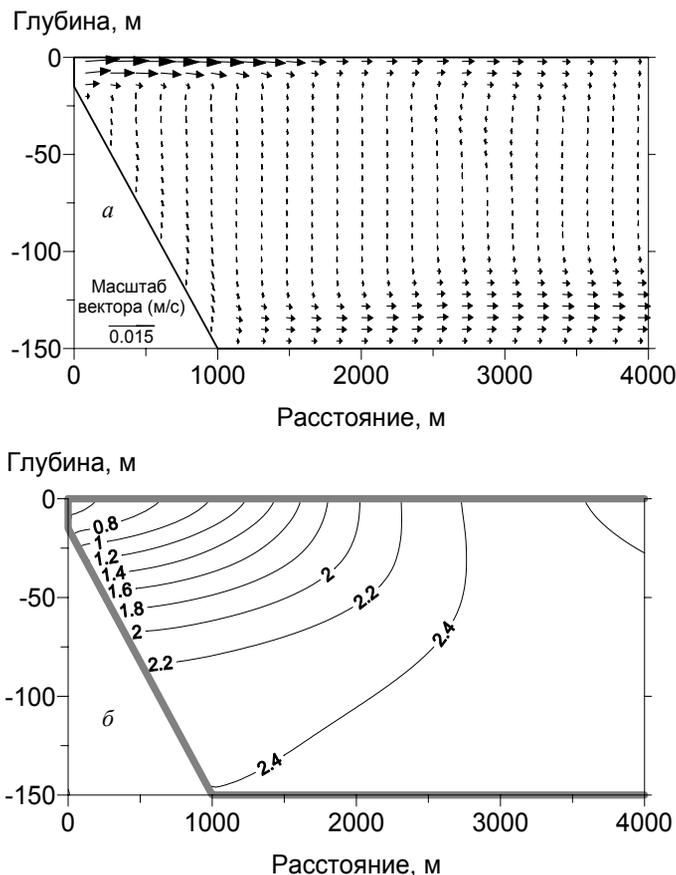


Рис. 6. Случай «зима». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Случай «ранняя весна». Весной циркуляционные течения в оз. Камлупс начинаются, когда температура воды притока приближается к температуре максимальной плотности. Особенность этого варианта численного эксперимента заключается в том, что речной приток поступает в озеро с температурой максимальной плотности ($T_R = 4\text{ }^\circ\text{C}$). Температура озёрной воды задаётся равной $2,4\text{ }^\circ\text{C}$ (как и в предыдущем случае).

Наиболее плотная речная вода под действием силы тяжести погружается в озеро по склону, индуцируя циркуляцию в прилегающей области. Циркуляционное течение отчётливо наблюдается на 8 сутки от начала эксперимента (см. рис. 7). Изотермы, изображенные на рис. 7, свидетельствуют о начале весенней гомотермии (явления однородности температуры воды по всей глубине водоёма) в озере Камлупс. Распределение температуры показывает, что процессы вертикального перемешивания достигают самого дна.

Случай «середина весны». Этот случай представляет особый интерес, поскольку он связан с возникновением и развитием термобара. Вычислительный эксперимент проводился при следующих условиях: начальная температура притока составляла $5\text{ }^\circ\text{C}$ и повышалась на $0,2\text{ }^\circ\text{C}$ в сутки, $T_L = 2,4\text{ }^\circ\text{C}$.

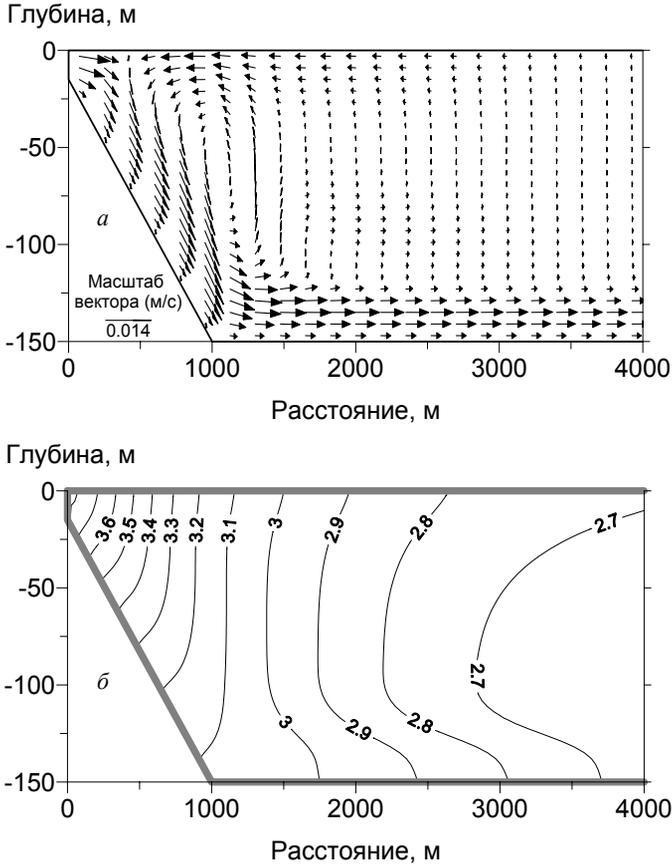


Рис. 7. Случай «ранняя весна». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Этот эксперимент отличается тем, что температура реки выше ТМП, а озера – ниже. По этой причине проникающий в озеро речной поток распространяется сначала поверхностной струёй, а затем, смешиваясь с более холодной озёрной водной массой и достигая ТМП, начинает погружаться вниз до дна, образуя термобар (см. рис. 8). Эти опускания происходят вследствие так называемой термобарической неустойчивости столба жидкости. Для инициирования такой неустойчивости необходима внешняя сила, способная преодолеть создаваемый архимедовыми силами потенциальный барьер. Иными словами, аномальный рост сжимаемости воды при приближении её температуры к температуре максимальной плотности приводит к необратимому погружению водных масс до дна. За 8 сут фронт термобара продвигается на расстояние 1,2–1,3 км от устья реки Томпсон, формируя по обе стороны циркуляционные ячейки с зоной схождения воды. По мере прогрева озера термобар смещается в центральную часть водоёма (на 16-е сутки достигает 2,7–2,8 км) и затем исчезает (24-е сутки).

Случай «поздняя весна». Для данного случая температура воды в озере задавалась равной 5 °С, а температура реки в начальный момент составляла 8 °С и нагревалась на 0,2 °С в день.

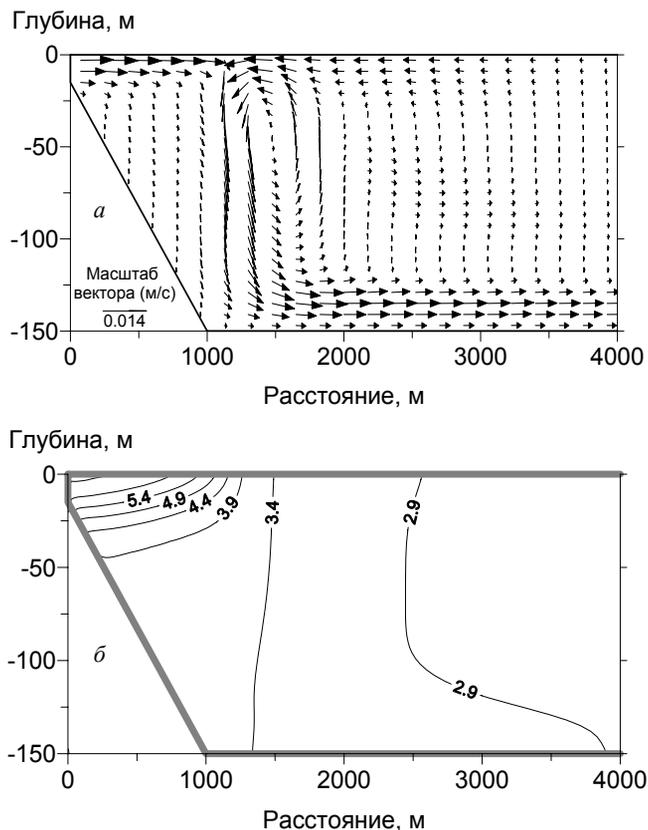


Рис. 8. Случай «середина весны». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Общая картина гидродинамических процессов для поздней весны аналогична случаю «зима». Однако есть и различие: рассматриваемый случай характеризуется более интенсивным распространением поверхностной струи за счёт усиления темпов теплонакопления речного притока и поверхностного слоя водоёма (см. рис. 9). В течение лета втекающая в озеро вода остаётся более тёплой (менее плотной), чем озёрная. По этой причине основная масса речной воды продвигается по поверхности водоёма, а часть, смешиваясь с озёрной, погружается вглубь. В озере устанавливается прямая температурная стратификация (см. изотермы на рис. 9). Как показывают изотермы на 24-е сутки, повышение температуры распространяется на глубину не менее 100 м.

Таким образом, рассмотренные выше случаи полностью соответствуют описаниям натуральных наблюдений Э.К. Кармака и др. [8] (см. рис. 1) в озере Камлупс. Следовательно, разработанная численная модель и построенный алгоритм адекватно отражают природу взаимодействия систем «река – озеро».

Заключение

Разработан численный метод второго порядка точности, позволяющий моделировать связанные с весенним термобаром гидродинамические сценарии в озере Камлупс начиная с зимнего периода и заканчивая поздней весной.

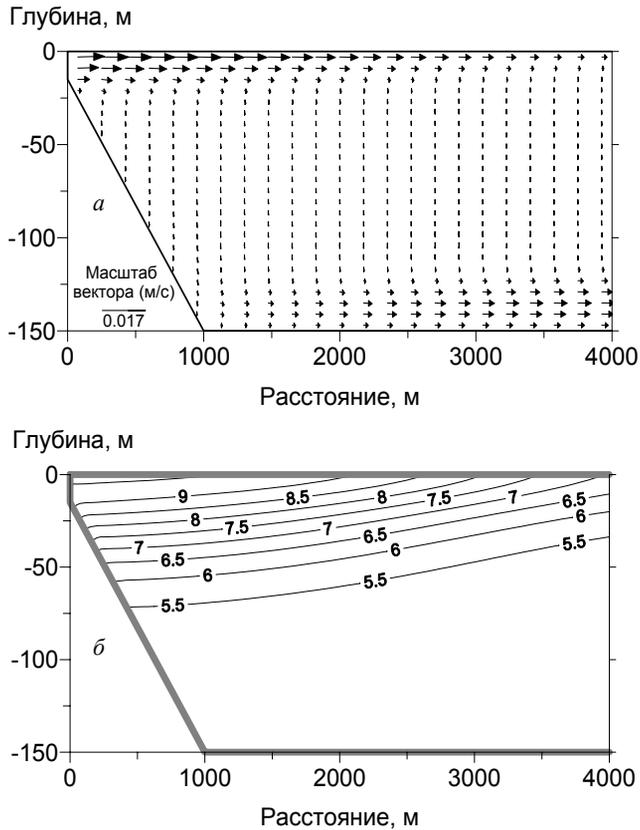


Рис. 9. Случай «поздняя весна». Векторное поле скорости (а) и изотермы (б) через 8 сут

Получено хорошее соответствие результатов вычислительных экспериментов с результатами других авторов и сведениями натуральных наблюдений. Построен алгоритм согласования поля скорости и давления SIMPLIFIED для течений с плавучестью, представляющий собой модификацию алгоритма SIMPLE Патанкара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forel F.A.* La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879-1880. Lac Léman // L'Écho des Alpes. 1880. № 3. P. 149–161.
2. *Тихомиров А.И.* О термическом баре в Якимварском заливе Ладожского озера // Изв. ВГО. 1959. Т. 91. № 5. С. 424–438.
3. *Rodgers G.K.* A Note on thermocline development and the thermal bar in Lake Ontario // Symposium of Garda, Int. Assoc. Scientific Hydrology. 1966. No. 1(70). P. 401–405.
4. *Hubbard D.W., Spain J.D.* The structure of the early spring thermal bar in Lake Superior // Proc. 16th Conf. Great Lakes Res., Int. Assoc. Great Lakes Res. 1973. P. 735–742.
5. *Moll R.A., Brahe M.* Seasonal and spatial distribution of bacteria, Chlorophyll and nutrients in nearshore Lake Michigan // J. Great Lakes Res. 1986. V. 12. No. 1. P. 52–62.
6. *Bolgrien D.W., Granin N.G., Levin L.* Surface temperature dynamics of Lake Baikal observed from AVHRR images // Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. 1995. V. 61. No. 2. P. 211–216.

7. Carmack E.C. Combined influence of inflow and lake temperatures on spring circulation in a riverine lake // *J. Phys. Oceanogr.* 1979. No. 9. P. 422–434.
8. Carmack E.C., Gray C.B.J., Pharo C.H., Daley R.J. Importance of lake-river interaction on seasonal patterns in the general circulation of Kamloops Lake, British Columbia // *Limnol. Oceanogr.* 1979. V. 24. No. 4. P. 634–644.
9. Wiegand R.C., Carmack E.C. Some types of temperature inversion encountered in a freshwater lake with short residence time // *Limnol. Oceanogr.* 1981. 26 (3). P. 565–571.
10. Killworth P.D., Carmack E.C. A filling-box model of river-dominated lakes // *Limnol. Oceanogr.* 1979. V. 24. No. 2. P. 201–217.
11. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Sys.* 2003. 43. P. 61–81.
12. Цветова Е.А. Численная модель термобара в озере Байкал // *Метеорология и гидрология.* 1997. № 9. С. 58–68.
13. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. V. 31. No. 3. P. 657–662.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
15. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // *Научно-технические ведомости. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та,* 2004. 2(36). С. 70–81.
16. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1979. V. 19. P. 59–98.
17. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Наука, 1995. 288 с.
18. Цыденов Б.О. Численное моделирование конвективных течений в каверне // *Перспективы развития фундаментальных наук: тр. VI Междунар. конф. Томск: Изд-во ТПУ,* 2009. Т.2. С. 673–676.
19. Цыденов Б.О., Старченко А. В. Численное моделирование эффекта термобара в озере Байкал в период весенне-летнего прогревания // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2011. № 1(13). С. 120–130.
20. Полежаев В.И., Бунз А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.

Статья поступила 04.07.2013 г.

Tsydenov B. O., Starchenko A. V. NUMERICAL MODEL OF RIVER-LAKE INTERACTION IN THE CASE OF A SPRING THERMAL BAR IN KAMLOOPS LAKE. The paper is devoted to modeling hydrodynamic processes related to the spring thermal bar in Kamloops Lake by the second-order numerical method. The results of simulations agree with the studies made by other authors and in-situ observations. An important feature of the numerical technique is to use the SIMPLIFIED procedure (a modification of the SIMPLE algorithm of Patankar and Spalding) for harmonization of pressure and velocity fields.

Keywords: thermal bar, mathematical model, temperature of maximum density, Boussinesq approximation, numerical experiment, Kamloops Lake.

TSYDENOV Bair Olegovich (Tomsk State University)
E-mail: btsydenov@gmail.com

STARCHENKO Alexander Vasil'evich (Tomsk State University)
E-mail: starch@math.tsu.ru