ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 6(26)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров, С.А. Копанев

ПРОБЛЕМА ОЦЕНКИ КРИВИЗНЫ ЛИНИИ УРОВНЯ ПРИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ КРУГА[1]

Обоснована как актуальная для исследования задача о нахождении точной верхней оценки для кривизны линий уровня на классе S однолистных голоморфных отображений из единичного круга и приведены известные её частичные решения для подклассов отображений из S.

Ключевые слова: *конформное отображение, линия уровня, кривизна, метод внутренних вариаций.*

Посвящаем памяти профессора,
доктора физико-математических наук
уважаемого ***Василия Васильевича Черникова****,*
проработавшего в Томском университете
более сорока лет.

Среди плоских топологических отображений областей богатством приложений в задачах механики сплошных сред, теплопроводности и т.д. выделяются отображения с сохранением в соответствующих друг другу точках величин углов, то есть конформные отображения. Все односвязные области $D \subset \mathbb{C}$, имеющие на своей границе более одной точки, конформно эквивалентны, в частности, единичному кругу $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Конформные отображения голоморфны и однолистны. Среди таких отображений имеется единственное, удовлетворяющее условиям $f(0) = w_0$, $\arg f'(0) = \alpha$, где $w_0 \in D$ и $\alpha \in [0, 2\pi)$ – фиксированные числа. Линейное преобразование w-плоскости позволяет из подобных друг другу областей выделить области, содержащие точку нуль и имеющие в ней конформный радиус равный единице. Множество отображений из круга E на такие области образует класс S голоморфных однолистных отображений $f : E \to \mathbb{C}$, $w = f(z) = z + c_2(f)z^2 + \ldots + c_n(f)z^n + \ldots$. Класс S является компактным относительно равномерной сходимости внутри E, но не обладает свойством линейности и, возможно, этим объясняется трудность решения многих геометрических и экстремальных задач, относящихся к S. Потребовалось развитие новых методов (метод структурных формул, метод площадей, метод параметрических представлений, метод внутренних вариаций и другие) для исследования и решения таких задач.

[1] В статье излагается доклад авторов «Об одной задаче в теории конформных отображений», сделанный на Всероссийской конференции по математике и механике 2–4 октября 2013 года в Национальном исследовательском Томском государственном университете. Прилагается список литературы, использованной в докладе.

1. Постановка задачи

Отдельное направление исследований сформировалось вокруг задачи об оценке кривизны линии уровня $L(f, r)$ – образа окружности $|z|=r$, $0<r<1$, относительно голоморфного однолистного отображения $f \in S$ и, следовательно, $L(f, r)$ – аналитическая замкнутая жорданова кривая.

Точная формулировка задачи следующая.

Фиксируется точка $z_0 \in E$, $|z_0|=r$, $0<r<1$, и для каждого отображения $f \in S$ подсчитывается кривизна $K(f, z_0)$ линии уровня $L(f, r)$ в точке $f(z_0)$. Нужно найти точную верхнюю $\bar{K}(S, z_0)$, точную нижнюю $\underline{K}(S, z_0)$ оценки кривизны $K(f, z_0)$, $f \in S$, и указать отображения, на которых они реализуются.

Простая по постановке экстремальная задача о кривизне в классе S с более чем полувековой историей остается одной из нерешенных задач в геометрической теории однолистных отображений.

Из определения кривизны кривой в точке получается для $K(f, z_0)$ формула

$$K(f, z_0) = \frac{1}{|z_0 f'(z_0)|} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right).$$

Из понятия кривизны кривой следует, что на выпуклых дугах линии уровня $L(f, r)$ кривизна положительна, на вогнутых – отрицательна. В классе S при $0<r<2-\sqrt{3}$ все $L(f, r)$ выпуклы, а при $2-\sqrt{3}<r<1$ имеются $L(f, r)$ с вогнутой дугой (например, для отображения $f(z)=z\left(1-e^{i\alpha}z\right)^{-2}$). Поэтому $\underline{K}(S,r)>0$ и $\bar{K}(S,r)>0$ при $0<r<2-\sqrt{3}$, а при $2-\sqrt{3}<r<1$ будет $\underline{K}(S,r)<0$ и $\bar{K}(S,r)>0$.

Известно, что величины $\underline{K}(S, z_0)$ и $\bar{K}(S, z_0)$ не зависят от аргумента точки z_0. Таким образом, задача об оценке кривизны линии уровня в классе S сводится к нахождению множества $I_1(S)=D(S,r)$ значений функционала

$$I_1 : S \to \mathbb{R}, \quad I_1(f) = \frac{1}{|rf'(r)|} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{rf''(r)}{f'(r)}\right). \qquad (1)$$

Множество значений функционала (1) совпадает с сегментом $D(S,r) = \left[\underline{K}(S,r), \bar{K}(S,r)\right]$.

Класс S обладает свойством линейной инвариантности, то есть отображение $f \in S$ тогда и только тогда, когда отображение $g \in S$, где

$$g(z) = -\frac{e^{i\theta}}{\left(1-r^2\right) f'(r)} \left(f\left(e^{-i\theta} \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right) - f(r) \right), \quad z_0 = re^{i\theta}.$$

Используя это свойство, задачу о кривизне линии уровня можно сформулировать в следующем виде: найти множество значений функционала

$$I_2 : S \to \mathbb{R}, \quad I_2(f) = \frac{1-r^2}{r} |f'(r)| \operatorname{Re}\left(1 + r^2 - 2rc_2(f)\right), \quad c_2(f) = \frac{f''(0)}{2}. \qquad (2)$$

Так как $\underline{K}(S,r)=\min_{f\in S} I_1(f)=\min_{f\in S} I_2(f)$, $\overline{K}(S,r)=\max_{f\in S} I_1(f)=\max_{f\in S} I_2(f)$, то множество $I_2(S)$ совпадает с $D(S,r)$.

Из формул (1) и (2) следует, что для решения поставленной задачи достаточно найти, например, множество значений функционала

$$I_3 : S\to\mathbb{C}, \quad I_3(f)=|f'(r)|+i\operatorname{Re}c_2(f) \tag{3}$$

или множество значений функционала

$$I_4 : S\to\mathbb{C}, \quad I_4(f)=|f'(r)|+i\operatorname{Re}\left(1+\frac{rf''(r)}{f'(r)}\right) \tag{4}$$

и завершить нахождение $\underline{K}(S,r)$, $\overline{K}(S,r)$, используя стандартные методы действительного анализа.

Рассматриваемая задача об оценке кривизны линии уровня естественным образом обобщается до следующей.

Пусть γ – достаточно гладкая кривая в E с уравнением $z=\varphi(s)$, проходящая через точку $z_0=\varphi(s_0)$, и $k(z_0)$ – кривизна кривой γ в точке z_0. Пусть $\Gamma(f)$ – образ кривой γ относительно отображения $f\in S$. Тогда для кривизны $K(f,z_0;\gamma)$ кривой $\Gamma(f)$ в точке $f(z_0)$ имеет место формула

$$K(f,z_0;\gamma)=\frac{1}{|\varphi'(s_0)f'(z_0)|}\left(|\varphi'(s_0)|k(z_0)+\operatorname{Im}\frac{\varphi'(s_0)f''(z_0)}{f'(z_0)}\right). \tag{5}$$

Задача состоит в нахождении $\underline{K}(S,z_0;\gamma)$ и $\overline{K}(S,z_0;\gamma)$, в частности для образов радиусов круга E (задача о кривизне ортогональных траекторий).

2. Решение задачи о кривизне в подклассах класса *S* и других классах

Область $D\subset\mathbb{C}$ называют выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две точки из D, принадлежит D. Пусть $S_p^0\subset S$, $p\in\mathbb{N}$, – множество отображений из E на выпуклые области, обладающие p-кратной симметрией вращения относительно точки нуль. Кривые $L(f,r)$ для $f\in S_p^0$, $0<r<1$, выпуклы.

В.А. Зморович [6] получил следующие значения для $\underline{K}(S_p^0,z_0)$ и $\overline{K}(S_p^0,z_0)$:

$$\underline{K}(S_p^0,z_0)=\frac{1-r^p}{r}\left(1+r^p\right)^{\frac{2}{p}-1},$$

$$\overline{K}(S_p^0,z_0)=\begin{cases}\dfrac{1+r^p}{r}\left(1-r^p\right)^{\frac{2}{p}-1}, & \text{если } 0<r^p<r_0^p,\\[2ex] \dfrac{1-r^p}{r}\left(1+r^p\right)^{\frac{2}{p}-1}\left(\dfrac{p(a-1)}{\ln a}\right)a^{\frac{a}{p(a-1)}-\frac{1}{\ln a}}, & \text{если } r_0^p<r^p<1,\end{cases}$$

где $a=\left(\dfrac{1+r^p}{1-r^p}\right)^2$ и r_0^p – корень уравнения $p(a-1)=a\ln a$.

Известны отображения, реализующие указанные точные оценки.

Независимо этот результат получен (методом внутренних вариаций) И.А. Александровым и В.В. Черниковым [5]. Ими же на классе $S_p^* \subset S$ отображений круга E на звездные области с p-кратной симметрией вращения вокруг центра звездности – точки нуль – найдены точные оценки [5]:

$$\underline{K}\left(S_p^*, r\right) = \frac{1-2\left(p+1\right)r^p + r^{2p}}{r}\frac{\left(1+r^p\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(1-r^p\right)^2},$$

$$\overline{K}\left(S_p^*, r\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(1+2\left(p+1\right)r^p + r^{2p}\right)\left(1-r^p\right)^{\frac{2}{p}}}{r\left(1+r^p\right)^2}, & 0 < r^p \le r_0^p, \\[2ex] \dfrac{2p\left(1+r^p\right)^{\frac{2}{p}}}{r} a^{\frac{1}{p(a-1)}} \Phi\left(x_0\right), & r_0^p \le r^p < 1, \end{cases}$$

где r_0^p – корень уравнения $p\left(a-1\right)\left(3-a\right) + \left(1-a-\dfrac{2a}{p}\right) a \ln a = 0$,

$$\Phi\left(x\right) = \left(-2ax^2 + \frac{a+1}{2}x + \frac{1}{2p}\right) a^{-\frac{1}{2p(a-1)x}},$$

x_0, $\dfrac{1}{2a} < x_0 < \dfrac{1}{2}$, – корень уравнения

$$8ap\left(a-1\right)x^3 - \left(\left(a^2-1\right)p - 2a\ln a\right)x^2 - \frac{\left(a+1\right)\ln a}{2}x - \frac{\ln a}{2p} = 0, \quad a = \left(\frac{1+r^p}{1-r^p}\right)^2.$$

Точная нижняя граница $\underline{K}\left(S^*, r\right)$, $0 < r < 1$, была установлена, как отметил Г.В. Корицкий [11], И.Е. Базилевичем в его устном сообщении.

П.И. Сижук [17] получил точные оценки $K\left(f, z_0\right)$ на классе $S_{Rp}^0 \subset S_p^0$ отображений с действительными тейлоровскими коэффициентами $c_n\left(f\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что величины $\underline{K}\left(S_{Rp}^0, z_0\right)$ и $\overline{K}\left(S_{Rp}^0, z_0\right)$ зависят от аргумента точки z_0.

В 1976 г. В.В. Черников [18], используя метод внутренних вариаций, получил точную верхнюю оценку кривизны линии уровня на классе S_R однолистных голоморфных в E отображений с действительными коэффициентами $c_n\left(f\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Приведем этот результат.

Максимум $K\left(f, z_0\right)$, $f \in S_R$, $z_0 = r$, $2\rho = r + r^{-1}$, находится среди чисел

$$K = U_1\left(x\right)V_1\left(y\right)e^{U_2(x)+V_2(y)}, \quad K = W_1\left(u\right)V_1\left(v\right)e^{W_2(u)+V_2(v)} \quad \text{и} \quad K = \frac{\pi}{2}V_1\left(\omega\right)e^{V_2(\omega)-2},$$

где $$U_1\left(x\right) = \frac{8X^5}{1-X^4}A\left(x\right), \quad U_2\left(x\right) = \frac{2}{X}\boldsymbol{F}\left(\alpha, x\right) - \frac{2}{X}\boldsymbol{E}\left(\alpha, x\right) - B\left(x\right),$$

$$V_1(s)=\frac{2Y}{\boldsymbol{K}(s)\sin(\pi\delta)}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\left(1-\kappa^{2m}\right)^2}{1-2\kappa^{2m}\cos(2\pi\delta)+\kappa^{4m}},$$

$$V_2(s)=\frac{8Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\left(\boldsymbol{E}(\gamma,s)-\boldsymbol{F}(\gamma,s)\right)+\pi\delta\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\delta\right)+$$
$$+4\pi\delta\sin(\pi\delta)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\kappa^{2m}}{1-2\kappa^{2m}\cos(\pi\delta)+\kappa^{4m}},$$

$$W_1(u)=\frac{2Z^2\left(Z+\sqrt{1+Z^2}\right)}{\sqrt{1+Z^2}}A(u),\quad W_2(u)=\frac{2}{Z}\boldsymbol{F}(\alpha,u)-\frac{2}{Z}\boldsymbol{E}(\alpha,u)-B(u).$$

Здесь x,y – решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{3X^2-1}{2X}\left(\boldsymbol{K}(x)-\boldsymbol{\Pi}(n,x)\right)+\dfrac{1}{X}\boldsymbol{E}(x)=\\ =4Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{\Pi}(\nu,y)}{4(1+\rho)Y^2}+\dfrac{\boldsymbol{E}(y)-\boldsymbol{K}(y)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\right),\\ \dfrac{1}{X}\boldsymbol{E}(\hat{x})-\dfrac{1}{X}\boldsymbol{K}(\hat{x})+\dfrac{1-X^2}{2X}\boldsymbol{\Pi}(n',\hat{x})=\\ =\dfrac{\rho-1}{Y}\boldsymbol{\Pi}(\nu',\hat{y})-\dfrac{Y}{\rho+1}\boldsymbol{K}(\hat{y})+\dfrac{4Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\boldsymbol{E}(\hat{y});\end{cases}$$

u,v – решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{1}{Z}\boldsymbol{E}(u)-\dfrac{1}{Z}\boldsymbol{K}(u)+\boldsymbol{\Pi}(m,u)\sqrt{1+Z^2}=\\ 4Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{\Pi}(\nu,v)}{4(1+\rho)Y^2}+\dfrac{\boldsymbol{E}(v)-\boldsymbol{K}(v)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\right),\\ Z\boldsymbol{\Pi}(n',\hat{u})+\dfrac{1}{Z}\boldsymbol{E}(\hat{u})-\left(Z+\sqrt{1+Z^2}\right)\boldsymbol{K}(\hat{u})=\\ \dfrac{\rho-1}{Y}\boldsymbol{\Pi}(\nu',\hat{v})-\dfrac{Y}{\rho+1}\boldsymbol{K}(\hat{v})+\dfrac{4Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\boldsymbol{E}(\hat{v})\end{cases}$$

и ω,ρ – решение системы

$$\begin{cases}4Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)\left(\dfrac{\boldsymbol{\Pi}(\nu,\omega)}{4(1+\rho)Y^2}+\dfrac{\boldsymbol{E}(\omega)-\boldsymbol{K}(\omega)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\right)=\sqrt{3}-\ln\sqrt{\sqrt{3}+2},\\ \dfrac{\rho-1}{Y}\boldsymbol{\Pi}(\nu',\hat{\omega})-\dfrac{Y}{\rho+1}\boldsymbol{K}(\hat{\omega})+\dfrac{4Y\left(Y^2+1-\rho^2\right)}{3\rho Y^2+(2-\rho)\left(\rho^2-1\right)}\boldsymbol{E}(\hat{\omega})=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

где $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{\Pi}$ – полные эллиптические интегралы, $\boldsymbol{F}(\varphi, t)$, $\boldsymbol{E}(\varphi, t)$ – неполные эллиптические интегралы с параметром t,

$$X = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1 - x^2 + x^4} - x^2\right)}, \ Y = \sqrt{\frac{2\left(\rho^2 - 1\right)}{(1+\rho)y^2 + 1 - \rho}},$$

$$Z = \sqrt{\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1 - x^2 + x^4} - 1\right)},$$

$$3m = -1 - x^2 + \sqrt{1 - x^2 + x^4}, \ n = 1 - x^2 - \sqrt{1 - x^2 + x^4}, \ -2\nu' = (1+\rho)\left(1 - y^2\right),$$

$$-2\nu = (1+\rho)y^2 + 1 - \rho, \ 3n' = -2 + x^2 - \sqrt{1 - x^2 + x^4},$$

$$A(s) = \boldsymbol{K}(s)\sin(\pi\beta)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1 - 2q^{2m}\cos(2\pi\beta) + q^{4m}}{\left(1 - q^{2m}\right)^2},$$

$$B(s) = \pi\beta\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\beta\right) + 4\pi\beta\sin(\pi\beta)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1 - 2q^{2m}\cos(\pi\beta) + q^{4m}},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + s^2 + \sqrt{1 - s^2 + s^4}}}, \ \beta = \frac{\boldsymbol{F}(\alpha, s)}{\boldsymbol{K}(s)}, \ \gamma = \arcsin\sqrt{\frac{(1+\rho)s^2 + 1 - \rho}{2s^2}},$$

$$\delta = \frac{\boldsymbol{F}(\gamma, s)}{\boldsymbol{K}(s)}, \ q = e^{-\pi\frac{\boldsymbol{K}(\hat{s})}{\boldsymbol{K}(s)}}, \ \kappa = e^{-\pi\frac{\boldsymbol{K}(\hat{s})}{\boldsymbol{K}(s)}}, \ \hat{s} = \sqrt{1 - s^2}, \ \hat{x} = \sqrt{1 - x^2}, \ \hat{y} = \sqrt{1 - y^2},$$

$$\hat{u} = \sqrt{1 - u^2}, \ \hat{v} = \sqrt{1 - v^2}, \ \hat{\omega} = \sqrt{1 - \omega^2}.$$

Ю.А. Мартынов [13] вариационным методом в классе V_α отображений с ограниченным вращением порядка α, $0 \le \alpha < 1$ (отображений из класса S, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} f'(z) > \alpha \ \ \forall z \in E$), доказал, что

$$\underline{K}(V_\alpha, r) = \frac{1+\gamma}{r}\left(\frac{1 - 2\gamma - a}{(1+\gamma)\left|f'(r)\right|} + 1 + \frac{\gamma(a+\gamma)}{(1+\gamma)^2\left|f'(r)\right|^2}\right),$$

$$\overline{K}(V_\alpha, r) = \frac{1}{r\left|f'(r)\right|}\left(1 + a - \frac{a\gamma + 1}{(1+\gamma)\left|f'(r)\right|}\right),$$

где $a = \dfrac{1 + r^2}{1 - r^2}$, $\gamma = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha}$, $0 < r < 1$.

Отсюда он получил точные значения $\underline{K}(V_\alpha, r)$ и $\overline{K}(V_\alpha, r)$ на классе V_α.

Другим методом эта задача ранее решена Т.Г. Эзрохи [23].

Точные оценки кривизны линии уровня во множестве отображений, реализуемых интегралом Кристоффеля – Шварца, получены Г.В. Корицким [9].

Приведем для полноты точные оценки кривизны линии уровня

$$\underline{K}\left(\Sigma_p^0,\rho\right)=\frac{\rho\left(\rho^p-1\right)}{\left(1+\rho^p\right)^{1+\frac{2}{p}}},\ \overline{K}\left(\Sigma_p,\rho\right)=\overline{K}\left(\Sigma_p^*,\rho\right)=\frac{\rho\left(\rho^{2p}+2(p-1)\rho^p+1\right)}{\left(\rho^p-1\right)^2\left(\rho^p+1\right)^{\frac{2}{p}}},$$

$$\overline{K}\left(\Sigma_p^0,\rho\right)=\frac{\rho\left(\rho^p+1\right)}{\left(\rho^p-1\right)^{1+\frac{2}{p}}},\ 1<\rho<\infty,$$

полученные в работах [10, 11, 19].

Задача о нахождении $\underline{K}(S,z_0;\gamma)$ и $\overline{K}(S,z_0;\gamma)$, в частности задача о кривизне ортогональных траекторий, решена на некоторых классах отображений. Г.В. Корицкий [9] получил точные оценки $\underline{K}\left(S_p^0,z_0;\gamma_0\right)$, $\underline{K}\left(\Sigma_p^0,z_0;\gamma_0\right)$ и $\overline{K}\left(S_p^0,z_0;\gamma_0\right)$, $\overline{K}\left(\Sigma_p^0,z_0;\gamma_0\right)$; Т.Г. Эзрохи [23] – $\underline{K}(V_\alpha,z_0;\gamma_0)$ и $\overline{K}(V_\alpha,z_0;\gamma_0)$, где $\gamma_0=\left\{z\in\mathbb{C}:\arg z=\varphi_0, 0\le|z|\le 1\right\}$. С.М. Югай в [24] нашла точные оценки кривизны образов окружностей с центрами, не совпадающими с началом, на классе S_p^0.

И.Е. Базилевич и Г.В. Корицкий провели исследования свойств семейств линий уровня при однолистном конформном отображении.

3. Исследования по кривизне в классе *S*

Первые оценки кривизны линии уровня в классе S получены в 1921 году Л. Бибербахом [25]. Однако они не являются лучшими даже в смысле порядка.

Точная нижняя оценка

$$\underline{K}(S,r)=\frac{1-4r+r^2}{r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2$$

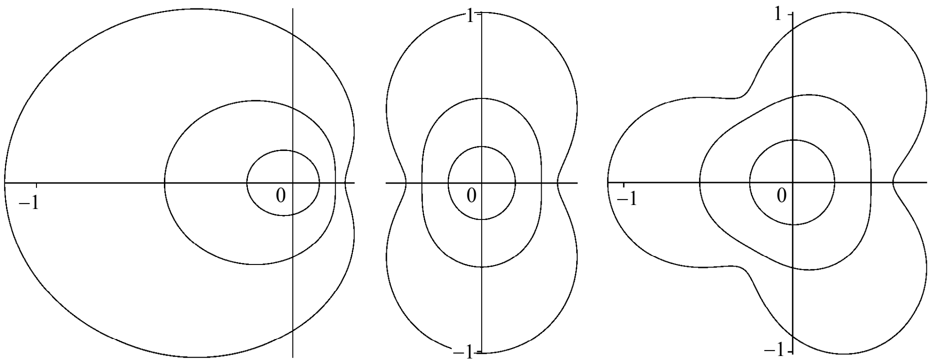
впервые получена в 1951 году Я.С. Мирошниченко [14] при $2-\sqrt{3}\le r<1$ и позже Г.В. Корицким [11] при $0<r<2-\sqrt{3}$. Ими был использован метод параметрических представлений. Более простыми приемами эта оценка была повторена В.В. Черниковым и М.А. Арендарчук [21], а также в работах [3] и [7]. Отметим, что $\underline{K}(S;0{,}01)\approx 100$, $\underline{K}(S;0{,}1)\approx 9{,}1$, $\underline{K}(S;0{,}2)\approx 2{,}7$, $\underline{K}\left(S;2-\sqrt{3}\right)=0$, $\underline{K}(S;0{,}3)\approx -1{,}3$, $\underline{K}(S;0{,}5)\approx -13{,}5$, $\underline{K}(S;0{,}9)\approx -718$, $\underline{K}(S;0{,}99)\approx -79000$.

Если, например, было бы известно множество $\Delta=I_4(S)=X+iY$, то $\overline{K}(S,r)$ $\left(\underline{K}(S,r)\right)$ есть абсолютный максимум (абсолютный минимум) отображения $F:\Delta\to\mathbb{R}$, $F(X,Y)=\dfrac{Y}{rX}$. Эти наблюдения использованы в работе [3].

Известно [11, 14], что

$$\underline{K}\left(S_p,r\right)=\frac{1-2(p+1)r^p+r^{2p}}{r}\frac{\left(1+r^p\right)^{\frac{2}{p}}}{\left(1-r^p\right)^2}\ \text{при}\ 0<r<1,$$

причем $\underline{K}\left(S_p, \sqrt[p]{p+1-\sqrt{p^2+2p}}\right)=0$. Равенство реализуется в точке $z_0=r$ отображением $f_p(z)=\dfrac{z}{\left(1+z^p\right)^{\frac{2}{p}}}\in S_p$. Ниже приведены линии уровня этого отображения при разных значениях p ($p=1,2,3$) и r ($r_k=\dfrac{k}{2}\sqrt[p]{p+1-\sqrt{p^2+2p}}$, $k=1,2,3$).



Рядом авторов получены неточные оценки сверху кривизны линии уровня на классе S. В работе В.В. Черникова [20] приведена лучшая в настоящее время неточная оценка сверху. Сформулируем этот результат.

В классе S имеют место неравенства:

при $0<r\le 0,279624$

$$\overline{K}(S,r)<\frac{1}{r}\frac{(1+x)^4}{\left(1+x^2\right)(1-x)^2}e^{\frac{4x}{1-x^2}\ln\frac{r}{x}},$$

где x, $0<x<r$, однозначно определяется уравнением

$$\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{4x}{1-x}\ln\frac{r}{x}+4\ln\frac{1}{1-x}=1+r^2+\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}};$$

при $0,279624<r<1$

$$\overline{K}(S,r)<\frac{1+r^2}{r}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4\left(\frac{r}{x}\right)^{\frac{4x}{1-x^2}},$$

где x, $0<x<r$, однозначно определяется уравнением

$$\left(1+r^2\right)\frac{1+x^2}{(1-x)^4}\left(\frac{r}{x}\right)^{\frac{2x}{1-x}}=1+\frac{r}{\sqrt{e}(1-r)^2}.$$

В работе [8] проведен наиболее полный качественный анализ функционально-дифференциального уравнения в задаче (2) при рассмотрение ее методом внутренних вариаций. Этим методом устанавливается уравнение вида

$$\frac{A(w)}{w^3\left(w-f(r)\right)^2}dw^2=\frac{B(z)}{z^3\left(z-r\right)^2\left(z-\dfrac{1}{r}\right)^2}dz^2,$$

которому удовлетворяет экстремальное отображение, реализующее значения $\underline{K}\left(S,z_0\right)$ и $\overline{K}\left(S,z_0\right)$. В уравнении $B\left(z\right)=z^6+B_5z^5+B_4z^4+B_3z^3+\overline{B_4}z^2+\overline{B_5}z+1$ и $A(w)=A_2w^2+A_1w+A_0$, где $A_2=\dfrac{1-\mu r}{2f^2(r)}$, $A_1=\dfrac{\mu}{4}-\dfrac{1}{f(r)}$, $A_0=\dfrac{1}{2}$, $\mu=2\mathrm{Re}(\rho-c_2(f))$, и поэтому оно указывает на равенство абелевых дифференциалов второго порядка на экстремальных отображениях. Средствами аналитической теории дифференциальных уравнений и теории простейших вариаций получено в общем виде описание геометрических свойств экстремальных отображений. Они голоморфны на $\overline{E}$, за исключением конечного множества точек на границе круга, в которых отображения имеют алгебраические особенности. Образом круга E относительно экстремальных отображений является плоскость $\mathbb{C}$ с конечным числом разрезов по аналитическим дугам, образующим граф Γ с корнем на бесконечности. Отметим, что далее точки из множества $f^{-1}\left(M\right)$ обозначаются буквой μ, а точки из $f^{-1}\left(N\right)$ – буквой η, где M – множество конечных концевых точек графа Γ, а N – множество общих концов аналитических дуг, составляющих Γ. Возможны следующие варианты.

Пусть $A(w)=A_2(w-w_1)(w-w_2)$. Тогда

1. Γ состоит из одной кривой. При этом:

a) $$B(z)=\left(z-\mu\right)^2\left(z-\zeta_1\right)\left(z-\frac{1}{\overline{\zeta_1}}\right)\left(z-\zeta_2\right)\left(z-\frac{1}{\overline{\zeta_2}}\right),$$

где $w_k=f(\zeta_k)$ и $\zeta_k\in E$, $k=1,2$;

b) $$B(z)=\left(z-\mu\right)^4\left(z-\zeta_1\right)\left(z-\frac{1}{\overline{\zeta_1}}\right),$$

где $w_1=f(\zeta_1)$, $w_2=f(\mu)$ и $\zeta_1\in E$.

2. Γ состоит из двух кривых, имеющих общим концом точку w_1 и образующих в ней углы, равные $\dfrac{4\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$. При этом:

a) $$B(z)=\left(z-\mu\right)^2\left(z-\eta\right)^2\left(z-\zeta_1\right)\left(z-\frac{1}{\overline{\zeta_1}}\right),$$

где $w_2=f(\zeta_1)$, $w_1=f(\eta)$ и $\zeta_1\in E$;

b) $$B(z)=\left(z-\mu\right)^4\left(z-\eta\right)^2,$$

где $w_1=f(\eta)$, $w_2=f(\mu)$.

3. Γ состоит из четырёх кривых. Кривые Γ_1, Γ_2 и Γ_3 имеют общим концом точку w_1 и образуют в ней равные углы, а кривые Γ_3 и Γ_4 имеют общим концом

точку w_2 и образуют в ней углы, равные $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$. При этом

$$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2(z-\eta)^2, \text{ где } w_2=f(\eta).$$

4. Γ состоит из трёх кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Кривые Γ_1 и Γ_2 имеют общим концом точку w_1 и образуют в ней углы, равные $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$, а кривые Γ_2 и Γ_3 имеют общим концом точку w_2 и образуют в ней углы, равные $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$. При этом $B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\eta_1)^2(z-\eta_2)^2$, где $w_k=f(\eta_k)$, $k=1,2$.

5. Γ состоит из трёх кривых, имеющих общим концом точку w_1 и образующих в ней равные углы. При этом:

a) $$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2(z-\zeta_1)\left(z-\frac{1}{\overline{\zeta_1}}\right), \text{ где } w_2=f(\zeta_1) \text{ и } \zeta_1\in E;$$

b) $$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^4, \text{ где } w_2=f(\mu_2).$$

6. Γ состоит из пяти кривых. Кривые Γ_1, Γ_2 и Γ_3 имеют общим концом точку w_1 и образуют в ней равные углы, а кривые Γ_3, Γ_4 и Γ_5 имеют общим концом точку w_2 и образуют в ней равные углы. При этом

$$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2(z-\mu_3)^2.$$

Пусть $A(w)=A_1(w-w_1)$. Тогда

7. Γ состоит из двух кривых, имеющих общим концом бесконечно удалённую точку, и образуют в ней угол равный π. При этом:

a) $$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2(z-\zeta_1)\left(z-\frac{1}{\overline{\zeta_1}}\right), \text{ где } w_1=f(\zeta_1) \text{ и } \zeta_1\in E;$$

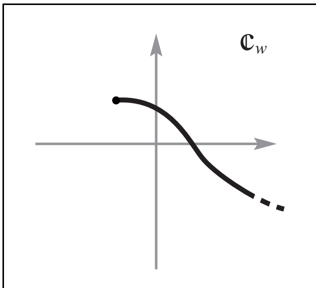
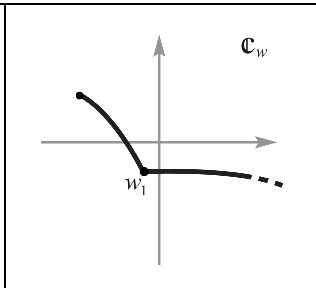
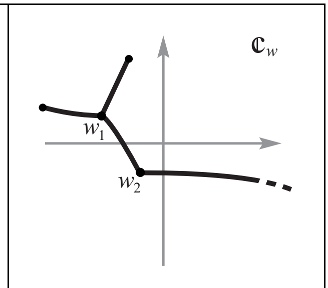
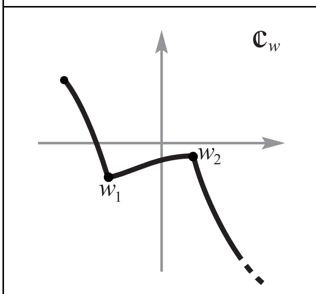
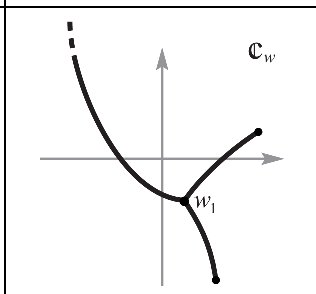
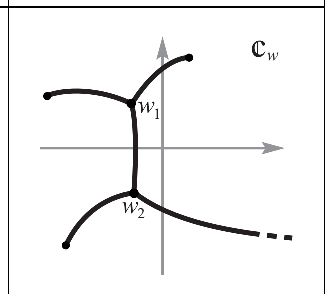
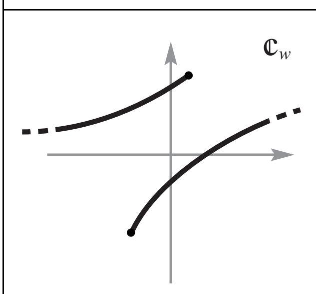
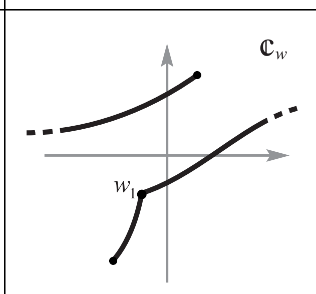
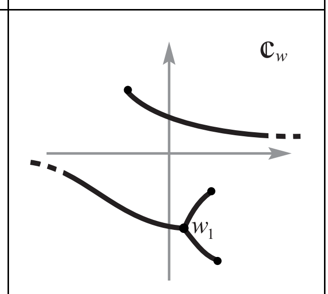
b) $$B(z)=(z-\mu_1)^4(z-\mu_2)^2, \text{ где } w_1=f(\mu_1).$$

8. Γ состоит из трёх кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Кривые Γ_1 и Γ_2 имеют общим концом точку w_1 и образуют в ней углы, равные $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$, а кривые Γ_2 и Γ_3 имеют общим концом бесконечно удалённую точку и образуют в ней угол равный π. При этом

$$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2(z-\eta)^2, \text{ где } w_1=f(\eta).$$

9. Γ состоит из четырёх кривых. Кривые Γ_1, Γ_2 и Γ_3 имеют общим концом точку w_1 и образуют в ней равные углы, а кривые Γ_3 и Γ_4 имеют общим концом бесконечно удалённую точку и образуют в ней угол равный π. При этом

$$B(z)=(z-\mu_1)^2(z-\mu_2)^2(z-\mu_3)^2.$$

		
Вариант 1	*Вариант* 2	*Вариант* 3
		
Вариант 4	*Вариант* 5	*Вариант* 6
		
Вариант 7	*Вариант* 8	*Вариант* 9

4. Проблема

Значение $\overline{K}(S,r)$ не найдено. Оно принадлежит [12] интервалу $\left(K_*, K^*\right)$, где $K_* = \dfrac{1-r+r^2}{(1-r)^2}$, $\quad K^* = \dfrac{1}{r}\left(1+4r+r^2+\dfrac{2r(1+r)^2}{\sqrt{e}(1-r)^2}\right)$. Отсюда следует, что $\overline{K}(S,r) = O\left(\dfrac{1}{(1-r)^2}\right)$ при $r \to 1$.

В работе [18] В.В. Черников высказал предположение, что оценка в классе S_R справедлива и во всем классе S, то есть $\overline{K}(S,r) = \overline{K}(S_R, r)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Геометрические свойства однолистных функций // Труды Томского ун-та. Т. 175. Вопросы геометрической теории функций. 1964. Вып. 2. С. 29–38.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томский государственный университет, 2001. 220 с.
3. *Александров И.А.* Об оценке кривизны линий уровня при конформных отображениях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3 (23). С. 5–7.
4. *Александров И.А.*, *Прохорова А.Е.* Оценки кривизны линий уровня на классе $\widetilde{S_p}$ // ДАН СССР. 1972. Т. 203. № 2. С. 267–269.
5. *Александров И.А. Черников В.В.* Экстремальные свойства звездообразных отображений // Сиб. матем. журнал. 1963. Т. 4. № 2. С. 23–30.
6. *Зморович В.А.* О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций // Укр. матем. журнал. 1952. Т. 4. № 3. С. 276–298.
7. *Копанев С.А.* Заметка о кривизне линии уровня относительно конформного отображения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3 (23). С. 34–36.
8. *Копанев С.А.*, *Сыркашев А.Н.* Качественный анализ дифференциально-функционального уравнения для одного функционала // Исследования по математическому анализу и алгебре: сб. Томск, 2001. Вып. 3. С. 125–134.
9. *Корицкий Г.В.* О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий при конформных отображениях // Матем. сб. 1955. Т. 37(79). № 1. С. 103–116.
10. *Корицкий Г.В.* О кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях // Докл. АН. 1957. 115. № 4. С. 653–654.
11. *Корицкий Г.В.* К вопросу о кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях // Успехи матем. наук. 1960. Т. XV. Вып. 5 (95). С. 179–182.
12. *Корицкий Г.В.* К оценке кривизны линий уровня при однолистных конформных отображениях // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 34–36.
13. *Мартынов Ю.А.* О геометрических свойствах дуг линий уровня при однолистных конформных отображений // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 53–61.
14. *Мирошниченко Я.С.* Об одной задаче теории однолистных функций // Учен. зап. Сталинск. пед. ин-та. 1951. Вып. 1. С. 63–75.
15. *Мирошниченко Я.С.* Улучшение границы кривизны линий уровня для некоторых классов однолистных функций // Учен. зап. Сталинск. пед. ин-та. 1959. Вып. 5.
16. *Мирошниченко Я.С.* К вопросу о кривизне линий уровня // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 62–65.
17. *Сижук П.И.* О некоторых геометрических свойствах звездообразных функций с вещественными коэффициентами // Труды Томского ун-та. Т. 238. Вопросы геометрической теории функций. 1974. Вып. 7. С. 82–98.
18. *Черников В.В.* Об оценке кривизны линий уровня в одном классе однолистных функций // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 381–388.
19. *Черников В.В.* Оценка кривизны линий уровня в классах Σ , Σ^p // Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Томского университета, 1980. С. 126–129.
20. *Черников В.В.* Об оценке кривизны линий уровня в классе всех регулярных однолистных в круге функций // Сиб. матем. журнал. 1985. Т. 26. № 2. С. 210–213.
21. *Черников В.В.*, *Арендарчук М.А.* Об оценке кривизны линий уровня // Труды Томского ун-та. Т. 238. Вопросы геометрической теории функций. 1974. Вып. 7. С. 118–123.
22. *Черников В.В.*, *Куваев М.Р.*, *Кан В.И.* Некоторые итоги исследований по теории функций комплексного переменного в Томском университете // Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Томского университета, 1980. С. 3–41.

23. *Эзрохи Т.Г.* О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий в классе функций с ограниченным вращением // Укр. матем. журнал. 1965. Т. 17. № 4. С. 91–99.
24. *Югай С.М.* Оценка кривизны образов окружностей при отображении их выпуклыми однолистными в круге функциями // Матем. заметки. 1993. Т. 53. Вып. 1. С. 133–137
25. *Bieberbach L.* Neuere Forschungen im Gebiete der konformen Abbildung // Glasnik hrr. Prirod. Drustva. 1921. Bd 33.

Статья поступила 09.10.2013 г.

Aleksandrov I.A., *Kopanev S.A.* THE PROBLEM OF ESTIMATING THE CURVATURE OF THE LEVEL LINE UNDER CONFORMAL MAPPINGS OF A CIRCLE. A task about finding an exact upper estimate for the curvature of level lines on the class S of univalent holomorphic mappings from a unit circle S is justified as a topical one and its well-known partial solutions for subclasses of mappings from S are presented.

Keywords: conformal mapping, level line, curvature, method of internal variations.

ALERSANDROV Igor ’ Aleksandrovich (Tomsk State University)
E-mail: ma@math.tsu.ru

COPANEV Sergey Anatol’evich (Tomsk State University)
E-mail: copanev_d@mail.ru