

УДК 511.2

А.И. Забарина, Г.Г. Пестов

О ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ

Если $\eta_1, \dots, \eta_n$ есть корни полинома степени n с целыми коэффициентами, неприводимого над полем рациональных чисел, со старшим коэффициентом 1, то для каждого натурального k сумма $(\eta_1)^k + \dots + (\eta_n)^k$ есть число целое.

Ключевые слова: *целые, алгебраические, неприводимые.*

Исследование целых алгебраических чисел – традиционный раздел теории алгебраических чисел [1, 2].

п. 1. Пусть $f(z)$ есть многочлен степени n с целыми коэффициентами, неприводимый над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, $f(0) = 1$. Обозначим корни этого многочлена через $\xi_1, \dots, \xi_n$. Так как $f(z)$ неприводим над $\mathbf{Q}$, то все эти корни – простые. По условию,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + 1,$$

где $a_0 \neq 0$. Обозначим $g(z) = -(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z)$. Имеем

$$f(z) = 1 - g(z).$$

п. 2. Выражение $\frac{f'(z)}{f(z)}$ двумя способами представим в виде бесконечной суммы.

Во-первых, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-g'(z)}{1 - g(z)}$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $|z| < \varepsilon$ влечёт

$$|a_0 z^n| + |a_1 z^{n-1}| + \dots + |a_{n-1} z| < 1. \quad (1)$$

Теперь при $|z| < \varepsilon$ имеем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-g'(z)}{1 - g(z)} = -g'(z)(1 + g(z) + \dots + g^k(z) + \dots) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m + \dots$$

Здесь все коэффициенты b_m – целые числа. В самом деле, каждый из этих коэффициентов равен сумме конечного числа целых чисел. Итак,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m + \dots, \quad b_m \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

п. 3. Получим второе разложение функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в ряд по степеням z . Так как корни знаменателя $\xi_1, \dots, \xi_n$ – простые, то имеем разложение [3]

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = c_1(z - \xi_1)^{-1} + \dots + c_n(z - \xi_n)^{-1}, \quad (3)$$

где c_k – рациональные числа.

Умножая это равенство почленно на $(z - \xi_1)$ и переходя к пределу при $z \rightarrow \xi_1$, получим $c_1 = 1$. Аналогично имеем $c_i = 1$ ($1 \leq i$).

Итак, (3) принимает вид

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (z - \xi_1)^{-1} + \dots + (z - \xi_n)^{-1}. \quad (4)$$

П.4. Согласно (2), $\frac{f'(z)}{f(z)}$ представимо в виде степенного ряда. Из теории аналитических функций [4] известно выражение для коэффициентов степенного ряда

$$b_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)_{z=0}.$$

Используя равенство (4), получим

$$b_m = -((\xi_1)^{-(m+1)} + \dots + (\xi_n)^{-(m+1)}).$$

Так как $b_m \in \mathbf{Z}$, то $((\xi_1)^{-(m+1)} + \dots + (\xi_n)^{-(m+1)}) \in \mathbf{Z}$.

Обозначим $(\xi_m)^{-1}$ через η_m . Теперь $\eta_1, \dots, \eta_n$ есть корни уравнения с целыми коэффициентами: $a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = 0$. Итак, справедлива

Теорема 1. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ есть n отличных от нуля сопряжённых целых алгебраических чисел степени n . Тогда для каждого натурального k сумма $(\eta_1)^k + \dots + (\eta_n)^k$ есть число целое.

П. 5. **Следствие 1.** Пусть в условиях теоремы 1 выполнены неравенства

$$|\eta_1| < 1, \dots, |\eta_m| < 1,$$

где $1 \leq m < n$. Тогда разность между величиной $(\eta_{m+1})^k + \dots + (\eta_n)^k$ и ближайшим целым стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
2. Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
3. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1976.
4. Александров И.А. Комплексный анализ. Часть 1, 2. Томск: Издательство Томского университета, 2012.

Статья поступила 16.10.2013 г.

Zabarina A.I., Pestov G.G. ON ALGEBRAIC INTEGERS. If $\eta_1, \dots, \eta_n$ are roots of a polynomial of degree n irreducible over the field of rationals with the highest coefficient 1, then the sum $(\eta_1)^k + \dots + (\eta_n)^k$ is an integer for each natural k .

Keywords: integer, algebraic, irreducible

Zabarina Anna Ivanovna (Tomsk State Pedagogical University)

Pestov German Gavrilovich (Tomsk State University)

E-mail: gpestov@mail.ru