УДК 517.54

И.А. Колесников

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА КРУГОВОЙ МНОГОУГОЛЬНИК С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Конформное отображение единичного круга $E=\{\xi\in \boldsymbol{C}:|\xi|<1\}$ на круговой $2n$-угольник, $n\in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$, с n-кратной симметрией вращения относительно точки $w=0$ и симметрией относительно прямой $l=\left\{w\in \boldsymbol{C}:\arg w=\dfrac{\pi}{n}\right\}$ получено в интегральном виде.

Ключевые слова: *конформное отображение, симметрия вращения, круговой многоугольник, производная Шварца.*

Решается задача о построении конформного отображения единичного круга $E=\{\xi\in \boldsymbol{C}:|\xi|<1\}$ на $2n$-угольник, граница которого состоит из дуг окружностей, обладающий n-кратной симметрией вращения относительно точки $w=0$, $n\in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$, и симметрией относительно прямой $l=\left\{w\in C:\arg w=\dfrac{\pi}{n}\right\}$. Такие области будем называть круговыми многоугольниками с двойной симметрией.

Конформное отображение на круговой многоугольник с двойной симметрией находит приложения в задаче Сен-Венана о кручении стержня, в гидродинамике и задачах теплопроводности. Известны точные и приближенные решения задачи о кручении стержня для разнообразных сечений: в форме эллипса, различных многоугольников, областей, обладающих симметрией вращения и др. Заметим, что некоторые из рассматриваемых в этих задачах областей с симметрией вращения являются частными случаями кругового многоугольника с двойной симметрией.

Seth B.R. [1] решает задачу о кручении однородного стержня с поперечным сечением в форме правильного n-угольника с прямолинейной границей. Решение представлено медленно сходящимися рядами Тейлора. W.A. Bassali [2] решает задачу о кручении стержня для некоторых сечений, обладающих симметрией вращения и имеющих криволинейную границу, аппроксимируемую дугами окружностей. Формула Шварца – Кристоффеля записана K. Lee [3] для правильных n-угольников с прямолинейной границей и n-кратной симметрией вращения и применяется в задаче о кручении стержня. Задачу о кручении стержня, в сечении которого область с прямолинейной границей в форме правильного n-угольника, циклического $n\times m$-угольника (многоугольник с n-кратной симметрией вращения и $n\times m$ числом вершин), решает Hassenpflug W.C. [4] с привлечением интеграла Шварца – Кристоффеля, интеграла Трефтца, алгебры сверток. И.А. Александров [5] решает задачу о кручении стержня с поперечным сечением в форме правильного кругового n-угольника с помощью конформного отображения, в этой же монографии В.В. Соболев предлагает новый численный метод решения задачи Сен-Венана о кручении стержня с произвольной односвязной областью сечения. Дифференциальное уравнение типа уравнения Левнера получено И.А. Александровым, Г.Д. Садритдиновой [6] для отображения единичного круга на область с n-кратной симметрией вращения. Задачу Сен-Венана для стержней, в сечении которых правильный многоугольник со скругленными углами, решает C.Y. Wang [7] с помощью метода Ритца.

В настоящей работе конформное отображение единичного круга на круговой многоугольник с двойной симметрией строится с помощью функции Шварца и принципа симметрии Римана – Шварца.

Определение 1. Пусть функция w голоморфна в области G, $G \subset \boldsymbol{C}$ и имеет производную, не принимающую значение нуль. Производной Шварца функции w в области G называется функция

$$\{w(z), z\} = \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 .$$

Определение 2. Функцией Шварца [8, с. 105] называют функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\{w, z\} = 2I(\varphi, \psi, \mu, z), \tag{1}$$

где
$$I(\varphi, \psi, \mu, z) = \frac{1-\varphi^2}{4z^2} + \frac{1-\psi^2}{4(1-z)^2} + \frac{1-\varphi^2-\psi^2+\mu^2}{4z(1-z)},$$

$\varphi, \psi, \mu \in [-2, 2]$.

Замечание 1. Пусть f_1, f_2 – два линейно-независимых решения уравнения

$$f''(z) + I(\varphi, \psi, \mu, z) f(z) = 0.$$

Положим $w(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, тогда имеем

$$\{w, z\} = 2I(\varphi, \psi, \mu, z).$$

Замечание 2. Г.А. Шварц показал, что функция Шварца w отображает верхнюю полуплоскость на треугольник, ограниченный тремя дугами окружностей (некоторые из них могут вырождаться в отрезки прямой). Внутренние углы треугольника в точках, соответствующих точкам $z = 0, 1, \infty$, равны $\varphi\pi$, $\psi\pi$, $\mu\pi$. Верно и обратное, если функция отображает верхнюю полуплоскость на круговой треугольник, то она является функцией Шварца и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).

Для конформного отображения единичного круга на круговой многоугольник с двойной симметрией получен следующий результат.

Теорема. *Пусть функция* $w(\xi)$ *голоморфно и однолистно отображает единичный круг* $E = \{\xi \in \boldsymbol{C} : |\xi| < 1\}$ *на круговой многоугольник* D *с двойной симметрией,* $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$, *так, что* $w(1) = 1$, $w\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right) = r\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$, *где* 1, $r\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$ – *вершины многоугольника* D *с углами* $2\varphi\pi$, $2\psi\pi$ *при них соответственно,* $\varphi, \psi \in [0,1]$,

$$r = \frac{\sin\frac{\pi}{n}\sin\psi\pi - \cos\varphi\pi - \cos\psi\pi\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\varphi\pi - \cos\psi\pi - \cos\varphi\pi\cos\frac{\pi}{n}}.$$ *Тогда функция* $w(\xi)$ *имеет вид*

$$w(z)=\frac{w_0(z)}{cw_0(z)+d}, \tag{2}$$

где
$$w_0(z)=\frac{\int_0^1 t^{\tau+\frac{1}{n}}(1-t)^{-\tau-1}(z-t)^{\lambda-\frac{1}{n}}dt}{\int_0^1 t^{\tau}(1-t)^{-\tau-1-\frac{1}{n}}(z-t)^{\lambda}dt},$$

$$z=z(\xi)=\frac{1}{4}\left(2-\xi^n-\xi^{-n}\right),\ \tau=-\frac{1+n(1-\varphi+\psi)}{2n},\ \lambda=\frac{1-n(1-\varphi-\psi)}{2n},$$

$$c=\frac{\sin\tau\pi-r\sin\left(\tau\pi+\frac{\pi}{n}\right)}{re^{i\frac{\pi}{n}}\sin\tau\pi-r\sin\left(\tau\pi+\frac{\pi}{n}\right)},\ d=\frac{\left(re^{i\frac{\pi}{n}}-1\right)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\tau+1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\tau\pi+\frac{\pi}{n}\right)}{re^{i\frac{\pi}{n}}\Gamma(\tau+1)\Gamma(\lambda+1)\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\sin\tau\pi-\sin\left(\tau\pi+\frac{\pi}{n}\right)\right)},$$

Γ – гамма-функция.

Доказательство. Обозначим за $\Omega_{(k,s)}$ двуугольник

$$\Omega_{(k,s)}=\{\xi\in\boldsymbol{C}:k\pi<\arg\xi<s\pi\},\ 0\le k<s\le 1.$$

Запишем отображение $z=z(\xi)$ сектора круга $E\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ на верхнюю полуплоскость $\Pi^+=\{z\in\boldsymbol{C}:\operatorname{Im}z>0\}$.

Отображение $\zeta(\xi)=\ln\xi$ переводит сектор круга $E\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ на полуполосу $\left\{\zeta\in\boldsymbol{C}:\operatorname{Re}\zeta<0;0<\operatorname{Im}\zeta<\frac{\pi}{n}\right\}$. Отображение $z(\zeta)=\sin^2 i\frac{n\zeta}{2}$ переводит полуполосу $\left\{\zeta\in\boldsymbol{C}:\operatorname{Re}\zeta<0;0<\operatorname{Im}\zeta<\frac{\pi}{n}\right\}$ на верхнюю полуплоскость Π^+. Композиция $z(\zeta(\xi))=z(\xi)=\frac{1}{4}\left(2-\xi^n-\xi^{-n}\right)$ отображает сектор $E\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ на полуплоскость Π^+ так, что $z(0)=\infty$, $z(1)=0$, $z\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)=1$.

Найдем отображение $w(z)$ верхней полуплоскости Π^+ на треугольник $D\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ с углами $\varphi\pi$, $\psi\pi$, $\frac{\pi}{n}$, $n\in\boldsymbol{N}\setminus\{1\}$, $\varphi,\psi\in[0,1]$ при вершинах $A_1=1$, $A_2=re^{i\frac{\pi}{n}}$, $A_3=0$, такой, что стороны A_1A_3, A_2A_3 являются прямолинейными отрезками. Пусть отображение $w(z)$ переводит точки z-плоскости 0, 1, ∞ соответственно в вершины A_1, A_2, A_3. Согласно замечанию 2, отображение $w(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{w,z\}=\frac{1-\varphi^2}{2z^2}+\frac{1-\psi^2}{2(1-z)^2}+\frac{1+n^2\left(1-\varphi^2-\psi^2\right)}{2n^2z(z-1)}. \tag{3}$$

Согласно замечанию 1, решение уравнения (3) можно искать в виде $w(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где f_1, f_2 – два линейно независимых решения уравнения

$$f''(z)+\frac{z^2\left(n^2-1\right)+z\left(1-n^2\left(1-\varphi^2+\psi^2\right)\right)+n^2\left(1-\varphi^2\right)}{4n^2z^2(z-1)^2}f(z)=0. \qquad (4)$$

Введем обозначения $\alpha=\dfrac{n(1-\varphi-\psi)-1}{2n}$, $\beta=\dfrac{n(1-\varphi-\psi)+1}{2n}$, $\gamma = 1 - \varphi$ и в уравнении (4) выполним замену $f(z)=z^{\frac{1-\varphi}{2}}(1-z)^{\frac{1-\psi}{2}}g(z)$, получим гипергеометрическое уравнение [8, с. 69]

$$z(1-z)g''(z)+\left(\gamma-(\alpha+\beta+1)z\right)g'(z)-\alpha\beta g(z)=0.$$

Двумя линейно-независимыми решениями этого уравнения будут гипергеометрические ряды

$$g_1(z)=z^{-\alpha}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma;1+\alpha-\beta;\frac{1}{z}\right),$$

$$g_2(z)=z^{-\beta}F\left(\beta,1+\beta-\gamma;1+\beta-\alpha;\frac{1}{z}\right),$$

которые сходятся при $|z| < 1$.

Таким образом, одним из решений уравнения (2) будет функция

$$w_0(z)=z^{-\frac{1}{n}}\frac{F\left(\dfrac{n(1-\varphi-\psi)+1}{2n},\dfrac{n(1+\varphi-\psi)+1}{2n};1+\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{z}\right)}{F\left(\dfrac{n(1-\varphi-\psi)-1}{2n},\dfrac{n(1+\varphi-\psi)-1}{2n};1-\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{z}\right)}.$$

Выразим гипергеометрические ряды через определенные интегралы [8, с. 123], получим

$$w_0(z)=\frac{\int_0^1 t^{\tau+\frac{1}{n}}(1-t)^{-\tau-1}\left(z-t\right)^{\lambda-\frac{1}{n}}dt}{\int_0^1 t^{\tau}(1-t)^{-\tau-1-\frac{1}{n}}\left(z-t\right)^{\lambda}dt},$$

где $\tau=-\dfrac{1+n(1-\varphi+\psi)}{2n}$, $\lambda=\dfrac{1-n(1-\varphi-\psi)}{2n}$.

В силу инвариантности производной Шварца относительно дробно-линейного преобразования, отображение w верхней полуплоскости на треугольник $D\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ имеет вид (2).

Композиция $w(z(\xi))=w(\xi)$ отображает сектор круга $E\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ на треугольник $D\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$. Часть границы сектора $E\cap\Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ – отрезок

$R_1 = \left\{ \xi \in \boldsymbol{C} : \xi = \rho e^{i\frac{\pi}{n}}, 0 < \rho < 1 \right\}$ – отображение $w(\xi)$ переводит в часть границы треугольника $D \cap \Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ – отрезок $R_1^* = A_2 A_3 = \left\{ w \in \boldsymbol{C} : w = \rho e^{i\frac{\pi}{n}}, 0 < \rho < r \right\}$. Продолжим отображение $w(\xi)$ согласно принципу симметрии Римана – Шварца через отрезок R_1 на сектор круга $E \cap \Omega_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}$. Продолженное отображение $w(\xi)$ переводит конформно сектор круга $E \cap \Omega_{\left(0,\frac{2}{n}\right)}$ на область $D \cap \Omega_{\left(0,\frac{2}{n}\right)}$. Оно является однолистным, так как области $E \cap \Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ и $E \cap \Omega_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}$, а также $D \cap \Omega_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$ и $D \cap \Omega_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}$ не пересекаются. Далее, возьмем сужение функции $w(\xi)$ на сектор круга $E \cap \Omega_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}$ и продолжим его по симметрии через отрезок $R_2 = \left\{ \xi \in \boldsymbol{C} : \xi = \rho e^{i\frac{2\pi}{n}}, 0 < \rho < 1 \right\}$ на сектор $E \cap \Omega_{\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right)}$, получим конформное однолистное отображение $w(\xi)$ сектора $E \cap \Omega_{\left(0,\frac{3}{n}\right)}$ на область $D \cap \Omega_{\left(0,\frac{3}{n}\right)}$. Выполнив эту процедуру n раз, получим отображение $w(\xi)$, переводящее половину единичного круга $E \cap \Pi^+$ на область $D \cap \Pi^+$. Наконец, продолжив это отображение по симметрии через отрезок вещественной оси $\{\xi \in C : \operatorname{Re}\xi \in (-1,1), \operatorname{Im}\xi = 0\}$, получим искомое отображение единичного круга E на круговой многоугольник D с двойной симметрией. Теорема доказана.

Обратное отображение может быть записано как композиция $w^{-1} \circ z^{-1}$, где $w^{-1} = w^{-1}(z, \varphi, \psi, \mu)$, $\mu = \dfrac{1}{n}$ – функция, обратная к функции Шварца. Шварц указал все значения $\varphi\pi$, $\psi\pi$, $\mu\pi$, при которых функция w^{-1} алгебраическая [9], при некоторых из этих значений функция w^{-1} является рациональной.

Если в условиях теоремы положить $\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\psi = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$, то отображение $w(\xi)$ будет конформно переводить единичный круг $E = \{\xi \in \boldsymbol{C} : |\xi| < 1\}$ на правильный прямолинейный n-угольник и будет иметь вид

$$w(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} (z-t)^{-\frac{1}{n}} dt,$$

где
$$z(\xi) = \frac{1}{4}\left(2 - \xi^n - \xi^{-n}\right).$$

Заметим, что если в уравнении (3) выполнить подстановку $z(\upsilon)=\frac{1}{4}\left(1-\upsilon-\upsilon^{-1}\right)$, где $\upsilon=\xi^n$, используя соотношение

$$\frac{\{w,\upsilon\}-\{z,\upsilon\}}{\left(z'(\upsilon)\right)^2}=\{w,z\},$$

то получим уравнение класса Фукса с четырьмя особыми точками

$$\{w,\upsilon\}=\left(\left(n^2-1\right)\upsilon^4+4n^2\left(\psi^2-\varphi^2\right)\upsilon^3+2\left(1+n^2\left(1-4\left(\psi^2+\varphi^2\right)\right)\right)\upsilon^2+\right.$$
$$\left.+4n^2\left(\psi^2-\varphi^2\right)\upsilon+n^2-1\right)\Big/2n^2\upsilon^2(\upsilon-1)^2.$$

Положим здесь $\psi=\frac{1}{2}$, уравнение примет вид

$$\{w,\upsilon\}=\frac{\upsilon^2\left(n^2-1\right)+\upsilon\left(2-n^2-4n^2\varphi^2\right)+n^2-1}{2n^2\upsilon^2\left(\upsilon-1\right)^2}.$$

Решение этого уравнения можем искать в виде отношения двух линейно-независимых решений дифференциального уравнения второго порядка

$$f''(\upsilon)+\frac{\upsilon^2\left(n^2-1\right)+\upsilon\left(2-n^2-4n^2\varphi^2\right)+n^2-1}{4n^2\upsilon^2\left(\upsilon-1\right)^2}f(\upsilon)=0.$$

Введем обозначения $\frac{1-2\varphi}{2}-\frac{1}{n}=\alpha$, $\frac{1-2\varphi}{2}=\beta$, $1-\frac{1}{n}=\gamma$ и выполним замену $f(\upsilon)=g(\upsilon)\upsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}(1-v)^{\frac{1}{2}-\varphi}$, имеем уравнение (являющееся гипергеометрическим уравнением Гаусса), которое совпадает с уравнением, полученным ранее Г.М. Голузиным [10] при решении задачи об отображении единичного круга на внутренность правильного кругового n-угольника.

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. С.А. Копаневу за ценные консультации по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Seth B.R.* Torsion of beams whose cross-section is a regular polygon of *n* side // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1934. V. 30. No. 2. P. 139–149.
2. *Bassal W.A.* The classical torsion problem for sections with curvilinear boundaries // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960. V. 8. P. 87–99.
3. *Lee K.* Torsion of fibers of an *n*-sided regular polygonal cross-section // Textile Research Journal. 2007. V. 77. No. 2. P. 111–115.
4. *Hassenpflug W.C.* Torsion of uniform bars with polygon cross-section // Computers and Mathematics with Applications. 2003. V. 46. P. 313–392.
5. *Александров И.А.*, *Соболев В.В.* Математические задачи теории упругости, задача Сен-Венана. LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 100 с.
6. *Александров И.А.*, *Садритдинова Г.Д.* Отображение с симметрией вращения // Известия высших учебных заведений. 1998. № 10(437). С. 3–6.
7. *Wang C.Y.* Optimization of torsion bars with rounded polygonal cross section // Journal of Engineering Mechanics. 2013. No. 139. P. 629–634.
8. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Т. 1. М.: Наука. Физматлит, 1965. 296 с.

9. *Poole E.G.C.* Introduction to the theory of linear differential equations. London: Oxford University Press, 1936. 202 c.
10. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функции комплексного переменного. М.: Наука. Физматлит, 1966. 628 с.

Статья поступила 05.10.2013 г.

Kolesnikov I. A. CONFORMAL MAPPING ONTO A CIRCULAR POLYGON WITH DOUBLE SIMMETRY. A conformal mapping of the unit disk $E=\{\xi\in \boldsymbol{C}:|\xi|<1\}$ onto a circular 2n-gon, $n\in \boldsymbol{N}\setminus\{1\}$, with *n*-fold symmetry of rotation relatively to the point $w=0$ and with symmetry relatively to the straight $l=\left\{w\in \boldsymbol{C}:\arg w=\frac{\pi}{n}\right\}$ has been obtained in the integral form.

Keywords: conformal mapping, symmetry of rotation, circular polygon, Schwarz derivative.

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich **(**Tomsk State University)
E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru