ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 6(26)

УДК 519.24

Н.В. Семенчук

УМЕНЬШЕНИЕ СМЕЩЕНИЯ ВЕЙВЛЕТНОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Разработан метод уменьшения смещения для вейвлетной оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем. В основе метода лежит оценка для верхней границы смещения, полученная для ограниченных спектральных плотностей, удовлетворяющих условию Липшица. Данные результаты могут быть использованы для построения алгоритмов вычисления вейвлетных оценок спектральных плотностей с заданной степенью точности.

Ключевые слова: *смещение вейвлетной оценки, спектральная плотность, стационарный случайный процесс.*

В последнее время актуальным является применение методов вейвлет-анализа при исследовании временных рядов, так как результаты, полученные с его помощью, часто обладают большей информативностью и способны непосредственно обрабатывать такие особенности данных, которые при традиционном подходе анализировать затруднительно. Данная работа посвящена исследованию оценки спектральной плотности, построенной с помощью вейвлетов, и является развитием идей, предложенных M.H. Newmann в [1].

Спектральная плотность, представляющая собой преобразование Фурье ковариационной последовательности стационарного случайного процесса, определяет свойства процесса и позволяет анализировать его структуру. При построении оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов с дискретным временем обычно применяются периодограммные методы, в основе которых лежит квадрат модуля преобразования Фурье конечной реализации исследуемого процесса. Для получения состоятельных оценок спектральных плотностей, как правило, используется метод сглаживания периодограмм спектральными окнами. При этом, на сегодняшний день, имеется лишь небольшое количество работ, в которых проведены исследования по оцениванию спектральных плотностей с помощью вейвлетов.

Рассмотрим вейвлетную оценку неизвестной спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi;\pi]$ по T последовательным наблюдениям $X(0), X(1), \ldots, X(T-1)$ за стационарным случайным процессом $X(t)$ с $\mathbf{M}X(t) = 0,\ t \in \mathbf{Z}$, полученным через равные промежутки времени:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^{J(T)}} \hat{\alpha}_{J(T),k} \tilde{\varphi}_{J(T),k}(\lambda), \tag{1}$$

где

$$\hat{\alpha}_{J(T),k} = \int_{\Pi} I_T(\alpha) \tilde{\varphi}_{J(T),k}(\alpha) d\alpha \tag{2}$$

– оценки вейвлет-коэффициентов в разложении (1),

$$\tilde{\varphi}_{J(T),k}(\lambda)=\sum_{n\in Z}(2\pi)^{-1/2}\varphi_{J(T),k}\left((2\pi)^{-1}\lambda+n\right), \qquad (3)$$

$$\varphi_{J(T),k}(x)=2^{J(T)/2}\varphi\left(2^{J(T)}x-k\right),$$

$\lambda\in\Pi$, $\varphi(x)$ – масштабирующая функция [2], $x\in\mathbf{R}$; $I_T(\alpha)$ – расширенная периодограмма:

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)}d_T(\lambda)d_T(-\lambda),$$

$$d_T(\lambda)=\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)X(t)e^{-i\lambda t},$$

$$H_2^{(T)}(0)=\sum_{t=0}^{T-1}\left(h_T(t)\right)^2, \qquad (4)$$

$k\in\mathbf{N}=\{\mathbf{1,2,...}\}$, $T\in\mathbf{N}$, а функция $h_T(t)=h\left(\frac{t}{T}\right)$, $h:[0,1]\to\mathbf{R}$ – окно просмотра данных [3] .

При практическом использовании оценок (1) часто полагают $J(T)=[\log_2 T]$ или $[\log_2 T]-1$, где $[\bullet]$ – обозначает целую часть числа.

В работе [4] доказано, что вейвлетная оценка спектральной плотности $\hat{f}(\lambda)$ является асимптотически несмещённой. При этом для смещения данной оценки имеет место результат, сформулированный в теореме 1.

Теорема 1 [4]. Если спектральная плотность $f(\lambda)\in Lip_\alpha(L)$, $\lambda\in\Pi$, носитель масштабирующей функции $\varphi(x)$ содержится в $[-H_1,H_2]$ и $|\varphi(x)|\le A$, окно просмотра данных – функция с ограниченной постоянной $V>0$ вариацией, то для любого $\lambda\in\Pi$ имеет место

$$\left|M\hat{f}(\lambda)-f(\lambda)\right|\le LC_1^2V^2DR(\alpha,T)+LC(\alpha,J(T)),\quad 0<C_1\le\pi;$$

$$C(\alpha,J(T))=\frac{(2\pi)^\alpha(H_1+H_2+1)A}{2^{J(T)\alpha}}\left[\int_{\mathrm{R}}|z|^\alpha|\varphi(z)|dz+(H_1+H_2+1)^\alpha\int_{\mathrm{R}}|\varphi(z)|dz\right],$$

$$R(\alpha,T)=\begin{cases}\dfrac{4T^{1-\alpha}}{2\pi H_2^{(T)}(0)\left(1-\alpha^2\right)}-\dfrac{2\pi^{\alpha-1}}{2\pi H_2^{(T)}(0)(1-\alpha)}, & \text{если } 0<\alpha<1,\\ \dfrac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)}[2\ln(\pi T)+1], & \text{если } \alpha=1,\end{cases}$$

$$D=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\left|\varphi\left(\frac{2^J\lambda}{2\pi}-m\right)\right|\int_{\mathbf{R}}|\varphi(y)|dy<\infty. \qquad (5)$$

Проиллюстрируем результат теоремы 1 на примерах.

Пример 1. Если мы строим вейвлетную оценку спектральной плотности (1), используя масштабирующую функцию Добеши порядка 4 и треугольное окно просмотра данных, полученное из функции

$$h(x)=1-|x|,\ x\in[-1,1]$$

путем сжатия в два раза и сдвига на единицу вправо вдоль оси абсцисс, то $V=1$, $A=1{,}12165, [-H_1,H_2]=[0,7]$ $H_2^{(T)}(0)\approx hT$, $0<h<1$, $J(T)=\log_2 T$ и

$$C(\alpha,J(T))=\frac{8{,}9732(2\pi)^\alpha}{T^\alpha}\left[\int_R |z|^\alpha|\varphi(z)|dz+8^\alpha\int_R|\varphi(z)|dz\right],$$

$$R(\alpha,T)=\begin{cases}\dfrac{4}{2\pi hT^\alpha\left(1-\alpha^2\right)}-\dfrac{2\pi^{\alpha-1}}{2\pi hT(1-\alpha)}, & \text{если } 0<\alpha<1,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi hT}[2\ln(\pi T)+1], & \text{если } \alpha=1.\end{cases}$$

Пример 2. Если мы строим вейвлетную оценку спектральной плотности, используя масштабирующую функцию симмлета порядка 6 и окно просмотра данных Рисса, Бохнера – Парзена, полученное из функций

$$h(x)=1-x^2,\ x\in[-1,1]$$

путем сжатия в два раза и сдвига на единицу вправо вдоль оси абсцисс, то $V=1$, $A=1{,}15188, [-H_1,H_2]=[0,11]$ $H_2^{(T)}(0)\approx hT$, $h<\infty$, $J(T)=\log_2 T$ и

$$C(\alpha,J(T))=\frac{12{,}67068(2\pi)^\alpha}{T^\alpha}\left[\int_R |z|^\alpha|\varphi(z)|dz+11^\alpha\int_R|\varphi(z)|dz\right],$$

$$R(\alpha,T)=\begin{cases}\dfrac{4}{2\pi hT^\alpha\left(1-\alpha^2\right)}-\dfrac{2\pi^{\alpha-1}}{2\pi hT(1-\alpha)}, & \text{если } 0<\alpha<1,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi hT}[2\ln(\pi T)+1], & \text{если } \alpha=1.\end{cases}$$

Следствие 1. Для математического ожидания спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, удовлетворяющей условию Липшица с некоторыми показателями, масштабирующих функций с компактным носителем и окон просмотра данных с ограниченной вариацией справедливо

$$M\hat{f}(\lambda)=f(\lambda)+O\left(\frac{1}{T^\alpha}\right),\ 0<\alpha<1,$$

$$M\hat{f}(\lambda)=f(\lambda)+O\left(\frac{\ln\pi T}{T}\right)+O\left(\frac{1}{T}\right),\ \alpha=1$$

для любых $\lambda\in\Pi$.

Таким образом, решить задачу уменьшения смещения вейвлетной оценки спектральной плотности нужно в 2-х случаях:

1) если $0<\alpha<1$;

2) если $\alpha=1$.

Рассмотрим случай 1). Согласно теореме 1, вейвлетная оценка $\hat{f}(\lambda)$, $k=0,1,2,\ldots$, спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, построенная по T наблюдениям $X(0),X(1),\ldots,X(T-1)$ за составляющей процесса $X(t)$, $t\in Z$, является асимптотически несмещённой со смещением, убывающим как $T^{-\alpha}$, где α – действительное число, $\alpha\in(0,1)$. Математическое ожидание такой оценки можно представить в виде

$$M\hat{f}(\lambda)=f(\lambda)+\frac{a_{k+1}^{(k)}(\lambda)}{T^{\alpha(k+1)}}+\frac{a_{k+2}^{(k)}(\lambda)}{T^{\alpha(k+2)}}+\ldots, \tag{6}$$

где $a_{k+j}^{(k)}(\lambda)$ – некоторые действительные функции, не зависящие от T, $j=1,2,\ldots$, $k=0,1,2,\ldots$.

Для того чтобы уменьшить смещение $a_1^{(0)}(\lambda)T^{-\alpha}$ этой оценки воспользуемся методикой, приведённой в работах [5, 6].

Переобозначим $\hat{f}^{(0)}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, и рассмотрим в качестве новой вейвлетной оценки спектральной плотности статистику

$$\hat{f}^{(1)}(\lambda)=T^{\alpha}\hat{f}(\lambda)-\frac{(T-1)^{\alpha}}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{f}^{0,i}(\lambda).$$

Здесь и в дальнейшем $\hat{f}^{(k),i}(\lambda)$, $i=\overline{0,T-1}$, $k=0,1,2,\ldots$, обозначает оценку спектральной плотности, построенную по $T-1$ наблюдению (выброшено i-е наблюдение из T наблюдений за процессом $X(t)$), т.е. будем строить оценку по наблюдениям $X(0),X(1),\ldots,X(i-1),X(i),X(T-1)$. Исследуем первый момент построенной оценки. Нетрудно видеть, что

$$M\hat{f}^{(1)}(\lambda)=T^{\alpha}M\hat{f}^{(0)}(\lambda)-\left((T-1)^{\alpha}M\hat{f}^{(0),i}(\lambda)\right).$$

Применив соотношение (4),

$$M\hat{f}^{(1)}(\lambda)=f(\lambda)+a_2^{(0)}(\lambda)\left[\frac{1}{T^{\alpha}}-\frac{1}{(T-1)^{\alpha}}\right]+a_3^{(0)}(\lambda)\left[\frac{1}{T^{2\alpha}}-\frac{1}{(T-1)^{2\alpha}}\right]+\ldots=$$

$$=f(\lambda)+\frac{a_2^{(0)}(\lambda)}{T^{2\alpha}}K_{2,T}^{(0)}+\frac{a_3^{(0)}(\lambda)}{T^{3\alpha}}K_{3,T}^{(0)}+\ldots,$$

где

$$K_{l,T}^{(0)}=T^{\alpha l}\left[\frac{1}{T\alpha^{(l-1)}}-\frac{1}{(T-1)^{\alpha(l-1)}}\right],\ l=2,3,\ldots.$$

Поскольку

$$\lim_{T\to\infty}K_{l,T}^{(0)}=-(l-1),$$

то оценка $\hat{f}^{(1)}(\lambda)$ является асимптотически несмещённой со смещением, убывающим как $T^{-2\alpha}$.

Так как равенство (6) справедливо и при $k=1$, то рассматривая оценку

$$\hat{f}^{(2)}(\lambda)=\frac{1}{T^{2\alpha}-(T-1)^{2\alpha}}\left[T^{2\alpha}\hat{f}^{(1)}(\lambda)-\frac{(T-1)^{2\alpha}}{T\alpha}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{f}^{(1),i}(\lambda)\right],$$

получаем

$$M\hat{f}^{(2)}(\lambda)=\frac{1}{T^{2\alpha}-(T-1)^{2\alpha}}\left[T^{2\alpha}M\hat{f}^{(1)}(\lambda)-(T-1)^{2\alpha}M\hat{f}^{(1),i}(\lambda)\right]=$$

$$=f(\lambda)+\frac{a_3^{(1)}(\lambda)}{T^{3\alpha}}K_{3,T}^{(1)}+\frac{a_4^{(1)}(\lambda)}{T^{4\alpha}}K_{4,T}^{(1)}+\dots,$$

где $$K_{l,T}^{(1)}=T^{\alpha l}\left[\frac{1}{T^{\alpha(l-2)}}-\frac{1}{(T-1)^{\alpha(l-2)}}\right]\frac{1}{T^{2\alpha}-(T-1)^{2\alpha}},\ \ l=3,4,\dots.$$

Так как

$$\lim_{T\to\infty}K_{l,T}^{(1)}=-\frac{(l-2)}{2},\ \ l=3,4,\dots,$$

то оценка является асимптотически несмещённой со смещением, убывающим как $T^{-3\alpha}$. Эту процедуру можно продолжить и далее:

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda)=\frac{1}{T^{k\alpha}-(T-1)^{k\alpha}}\left[T^{k\alpha}\hat{f}^{(k-1)}(\lambda)-\frac{(T-1)^{k\alpha}}{T^{\alpha}}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{f}^{(k-1),i}(\lambda)\right],\ \ k=2,3\dots.$$

Найдём математическое ожидание построенной оценки:

$$M\hat{f}^{(k)}(\lambda)=\frac{1}{T^{k\alpha}-(T-1)^{k\alpha}}\left[T^{k\alpha}M\hat{f}^{(k-1)\alpha}(\lambda)-(T-1)^{k\alpha}M\hat{f}^{(k-1)\alpha,i}(\lambda)\right]=$$

$$=f(\lambda)+\frac{a_{k+1}^{(k-1)}(\lambda)}{T^{k\alpha}-(T-1)^{k\alpha}}\left[\frac{1}{T^{\alpha}}-\frac{1}{(T-1)^{\alpha}}\right]+\frac{a_{k+2}^{(k-1)}(\lambda)}{T^{\alpha k}-(T-1)^{\alpha k}}\left[\frac{1}{T^{2\alpha}}-\frac{1}{(T-1)^{2\alpha}}\right]+\dots=$$

$$=f(\lambda)+\frac{a_{k+1}^{(k-1)}(\lambda)}{T^{\alpha(k+1)}}K_{k+1,T}^{(k-1)}+\frac{a_{k+2}^{(k-1)}(\lambda)}{T^{\alpha(k+2)}}K_{k+2,T}^{(k-1)}+\dots,$$

где $$K_{k+j,T}^{(k-1)}=T^{\alpha(k+j)}\left[\frac{1}{T^{\alpha j}}-\frac{1}{(T-1)^{\alpha j}}\right]\frac{1}{T^{\alpha k}-(T-1)^{\alpha k}},$$

$$k=1,2,\dots\ \ j=1,2,\dots.$$

Заметим, что

$$\lim_{T\to\infty}K_{k+j,T}^{(k-1)}=-\frac{j}{k}.$$

Следовательно, оценка $\hat{f}^{(k)}(\lambda)$ является асимптотически несмещённой со смещением, убывающим как $T^{-\alpha(k+1)}$.

Найдём явный вид коэффициентов $a_{k+j}^{(k)}(\lambda)$ в представлении (6), $j=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$ Нетрудно видеть, что

$$a_{k+j}^{(k)}(\lambda)=\lim_{T\to\infty}a_{k+j}^{(k-1)}(\lambda)K_{k+j,T}^{(k-1)}=a_{k+j}^{(k-1)}(\lambda)\left(-\frac{j}{k}\right)=\ldots=$$
$$=\left(-\frac{j}{k}\right)\left(-\frac{j+1}{k-1}\right)\ldots\left(-\frac{j+k-2}{2}\right)\left(-\frac{j+k-1}{1}\right)a_{j+k}^{(0)}(\lambda)=$$
$$=(-1)^k C_{j+k-1}^k a_{j+k}^{(0)}(\lambda).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Оценка $\hat{f}^{(k)}(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t\in Z$, задаваемая статистикой

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda)=\frac{1}{T^{\alpha k}-(T-1)^{\alpha k}}\left[T^{\alpha k}\hat{f}^{(k-1)}(\lambda)-\frac{(T-1)^{\alpha k}}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{f}^{(k-1),i}(\lambda)\right],$$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T\to\infty}T^{\alpha(k+1)}\left[M\hat{f}^{(k)}-f(\lambda)\right]=a_{k+1}^{(k)}(\lambda),$$

где
$$a_{k+j}^{(k)}(\lambda)=(-1)^k C_{j+k-1}^k a_{j+k}^{(0)}(\lambda),\ j=1,2,\ldots,$$

для спектральных плотностей $f(\lambda)\in Lip_\alpha(L)$, $\lambda\in\Pi$, при любом $\alpha\in(0,1)$.

Таким образом, последовательно устраняя смещение вейвлетной оценки спектральной плотности, можно сделать его сколь угодно малым. Данный метод является достаточно мощным. При его применении дисперсия вейвлетной оценки (1) возрастает только на величину $\frac{1}{T^2}$. На основе результатов, полученных в работе [4], сформулируем следствие для дисперсии вейвлетной оценки спектральной плотности.

Следствие 2. В условиях теоремы 1, при ограниченности семиинвариантных спектральных плотностей 4-го порядка, для дисперсии оценки (1) имеем

$$D\left(\hat{f}(\lambda)\right)=\frac{2\pi H_4^{(T)}(0)}{\left(H_2^{(T)}(0)\right)^2}\sum_{k_1=1}^{2^{J(T)}}\sum_{k_2=1}^{2^{J(T)}}\tilde{\varphi}_{J(T),k_1}(\lambda)\tilde{\varphi}_{J(T),k_2}(\lambda)\times$$
$$\times\int_\Pi\tilde{\varphi}_{J(T),k_1}(\alpha)\left(\tilde{\varphi}_{J(T),k_2}(-\alpha)+\tilde{\varphi}_{J(T),k_2}(\alpha)\right)f^2(\alpha)d\alpha+O\left(\frac{1}{T}\right)+$$
$$+O\left(\frac{2^{J(T)}\ln^5(\pi T)}{T^{1+\nu}}\right)+O\left(\frac{2^{J(T)(\mu+1)}\ln^5(\pi T)}{T^{1+\mu}}\right)+O\left(\frac{2^{2J(T)}\ln^3(\pi T)}{T^2}\right),$$

для любых $\lambda\in\Pi$.

Тогда становится очевидным, что увеличение дисперсии на величину $\frac{1}{T^2}$ не влияет на величину среднеквадратического уклонения, а вот применение процедуры уменьшения смещения позволяет построить оценку с меньшим среднеквадратическим уклонением. Заметим, что для реализации описанного метода требуется построить T различных оценок, что может быть затруднительно с вычислительной точки зрения при больших значениях T.

Рассмотрим случай 2). Здесь лучше воспользоваться методом устранения смещения, приведённом в работах [7, 8]. Предположим, что $T = 2N$. Далее исключим главный член смещения. Для этого построим оценку по всем данным и оценку по половине данных:

$$M\hat{f}_{2N}(\lambda) = f(\lambda) + \frac{\ln 2\pi N}{2N} + O\left(\frac{1}{T}\right) = f(\lambda) + \frac{\ln \pi N}{2N} + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

$$M\hat{f}_{N}(\lambda) = f(\lambda) + \frac{\ln \pi N}{N} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

В качестве оценки будем рассматривать статистику

$$2\hat{f}_{2N}(\lambda) - \hat{f}_N(\lambda).$$

Далее, используя $\hat{f}_{2N}(\lambda)$ (оценку по всем данным) и $\hat{f}_N$ (оценку по половине данных), исключаем главный член смещения:

$$M\left(2\hat{f}_{2N}(\lambda) - \hat{f}_N(\lambda)\right) = 2f(\lambda) + \frac{2\ln \pi N}{2N} + O\left(\frac{1}{T}\right) - f(\lambda) - \frac{\ln \pi N}{N} + O\left(\frac{1}{T}\right) = f(\lambda) + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Оценка $\hat{f}_s(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in Z$, задаваемая статистикой

$$\hat{f}_s(\lambda) = 2\hat{f}_{2N}(\lambda) - \hat{f}_N(\lambda)$$

для спектральных плотностей $f(\lambda) \in Lip_\alpha(L), \lambda \in \Pi$, при $\alpha = 1$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T\to\infty} T\left[M\hat{f}_s(\lambda) - f(\lambda)\right] = G,$$

где G – некоторая константа, не зависящая от λ, T.

Дисперсия оценки при этом увеличивается на величину $\frac{1}{T}$. Для среднеквадратического уклонения построенной оценки справедливы те же самые выкладки, что и в предыдущем случае.

Можно также поступить следующим образом, разделить данные на две равные половины, получить оценки $\hat{f}_N(\lambda)$ и $\hat{f}'_N(\lambda)$, а далее вычислить новую оценку по формуле

$$2\hat{f}_{2N}(\lambda) - \frac{1}{2}\left(\hat{f}_N(\lambda) + \hat{f}'_N(\lambda)\right).$$

Математическое ожидание такой оценки

$$M\left(2\hat{f}_{2N}(\lambda) - \frac{1}{2}\left(\hat{f}_N(\lambda) + \hat{f}'_N(\lambda)\right)\right) = f(\lambda) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

а дисперсия также возрастёт на величину $\frac{1}{T}$, как и для предыдущей статистики.

Теорема 4. Оценка $\hat{f}_s(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in Z$, задаваемая статистикой

$$f_s(\lambda) = 2\hat{f}_{2N}(\lambda) - \frac{1}{2}\left(\hat{f}_N(\lambda) + \hat{f}'_N(\lambda)\right),$$

для спектральных плотностей $f(\lambda) \in Lip_\alpha(L), \lambda \in \Pi$, при $\alpha = 1$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T\to\infty} T\left[M\hat{f}_s(\lambda) - f(\lambda)\right] = G,$$

где G – некоторая константа, не зависящая от λ, T.

Далее рассмотрим койфлет-оценку, которая строится на основе оценки (1), с учётом специальных свойств масштабирующей функции Койфмана. Масштабирующая функция Койфмана $\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R})$ порядка $M \in \mathbf{N}$ является действительной функцией и удовлетворяет следующим свойствам [2]:

$$\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [-M, 2M-1],$$

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x) = 1,$$

$$\int_{\mathbf{R}} x^m \varphi(x) = 0$$

для $m = \overline{1, M-1}$.

Койфлет-оценка задаётся следующим образом:

$$\hat{\hat{f}}(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{J(T)}{2}}} \sum_{k=1}^{2^{J(T)}} I_T\left(\frac{2\pi k}{2^{J(T)}}\right)\tilde{\varphi}_{J(T),k}(\lambda), \tag{6}$$

где $I_T(\lambda)$ – расширенная периодограмма, $\tilde{\varphi}_{J(T),k}(\lambda)$ – 2π-периодическая масштабирующая функция, построенная путем периодизации масштабирующей функции Койфмана. Оценка (6), как и оценка (1), является асимптотически несмещённой. Для математического ожидания данной оценки справедлива следующая теорема.

Теорема 5 [9]. Если спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, имеет $m+1$ ограниченную производную, $m \in N_0$, $\varphi(x), x \in \mathbf{R}$, масштабирующая функция Койфмана с компактным носителем порядка *M*, то для математического ожидания оценки (6) справедливо

$$M\hat{\hat{f}}(\lambda) = f(\lambda) + \frac{C_1^2 V^2 LD}{2\pi H_2^{(T)}(0)}\left[2\ln(\pi T) + 1\right] +$$

$$+\frac{6\pi(M+1)AL}{2^J}\left[\int_{\mathrm{R}} |z||\varphi(z)|\,dz + 3(M+1)\int_{\mathrm{R}} |\varphi(z)|\,dz\right] +$$

$$+\left(\frac{2C_1^2 V^2}{2\pi H_2^{(T)}(0)}\left[2\ln(\pi T) + 1\right] + \frac{(2\pi)^{M+1} K|3M+3|^{M+2} A}{(M+2)!\,2^{J(M+1)}}\right)\int_{\mathbf{R}} |\varphi(y)|\,dy,$$

$H_2^{(T)}(0)$, D задаются соотношениями (4) и (5) соответственно, $0 < C_1 \le \pi$.

Далее сформулируем следствие из теоремы 5.

Следствие 3. В условиях теоремы 5 для математического ожидания оценки (6) справедливо

$$M\hat{\hat{f}}(\lambda) = M\hat{f}(\lambda) + O\left(\frac{\ln(\pi T)}{T}\right) + O\left(\frac{1}{T}\right) + O\left(\frac{1}{2^{J(m+1)}}\right),$$

где $M\hat{f}(\lambda)$ – математическое ожидание оценки (1).

Для устранения главного члена в смещении койфлетной оценки поступим аналогично, как и в выкладках к теоремам 3 и 4. Результат сформулируем в теореме 6.

Теорема 6. Оценка $\hat{\hat{f}}_s^{(k)}(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in Z$, задаваемая статистикой

$$\hat{\hat{f}}_s^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{T^k - (T-1)^k}\left[T^k \hat{\hat{f}}_s^{(k-1)}(\lambda) - \frac{(T-1)^k}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\hat{\hat{f}}_s^{(k-1),i}(\lambda)\right],$$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T\to\infty} T^{(k+1)}\left[M\hat{\hat{f}}_s^{(k)} - f(\lambda)\right] = a_{k+1}^{(k)}(\lambda),$$

где $$a_{k+j}^{(k)}(\lambda) = (-1)^k C_{j+k-1}^k a_{j+k}^{(0)}(\lambda), \; j = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство данной теоремы аналогично выкладкам, приведённым для теоремы 2.

Второй способ уменьшения смещения койфлетной оценки вытекает с учётом обобщения результатов теорем 3 и 4. Предлагается использовать данный метод рекуррентно, применяя последовательно рассмотренный механизм ко вновь построенным оценкам, пока не будет достигнут нужный эффект.

Теорема 7. Для оценки $\hat{\hat{f}}_s(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in Z$, задаваемой статистикой

$$\hat{\hat{f}}_s^{(k)}(\lambda) = 2\hat{\hat{f}}_{2N}^{(k-1)}(\lambda) - \frac{1}{2}\left(\hat{\hat{f}}_N^{(k-1)}(\lambda) + \hat{\hat{f}}_N'^{(k-1)}(\lambda)\right)$$

либо статистикой $$\hat{\hat{f}}_s^{(k)}(\lambda) = 2\hat{\hat{f}}_{2N}^{(k-1)}(\lambda) - \hat{\hat{f}}_N^{(k-1)}(\lambda),$$

справедливо $$\lim_{T\to\infty} T^k\left[M\hat{\hat{f}}_s^{(k)}(\lambda) - f(\lambda)\right] = G,$$

где G – некоторая константа, не зависящая от λ, T.

В отношении дисперсии и среднеквадратического уклонения оценки (6), при выполнении описанной процедуры устранения смещения, имеют место те же выводы, что и для оценки (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann M.H.* Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-Gaussian time series / M.H. Neumann // J. Time Ser. Anal. 1996. V. 17. No. 6. P. 137–166.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
3. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 560 с.

4. *Семенчук Н.В.* Скорость сходимости моментов оценки спектральной плотности, построенной при помощи вейвлетов / Н.В. Семенчук, Н.Н. Труш // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. Вып. 5. С.761–771.
5. *Труш Н.Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Минск: БГУ, 1999. 218 с.
6. *Терпугов А.Ф.* Математическая статистика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 138 с.
7. *Кендалл М.* Теория распределений / М. Кендалл, А. Стюарт. М.: Мир, 1966. 588 с.
8. *Quenoulee M.H.* Notes on bias in estimation / M.H. Quenoulee // Biometrica. 1956. V. 43. P. 353–359.
9. *Семенчук Н.В.* Скорость сходимости смещения оценки спектральной плотности, построенной с помощью масштабирующей функции Койфмана / Н.В. Семенчук, Н.Н. Труш // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2009. № 2. С. 57–61.

Статья поступила 12.02.2013 г.

Semenchuk N. REDUCING THE BIAS OF THE WAVELET ESTIMATE OF SPECTRAL DENSITY.This paper is devoted to the development of methods of the bias reduction for a wavelet estimate of spectral density of a stationary discrete time random process. The method is based on an estimate for the upper boundary of the bias obtained limited spectral densities satisfying the Lipschitz condition. These results can be used for creating algorithms for the calculation of wavelet estimates of spectral densities with a given accuracy.

Keywords: wavelet estimate bias, spectral density, stationary random process

SEMENCHUK Natal'ya Vladimirovna (Grodno State University)
E-mail: senata155@gmail.com